

## FRECUENCIAS NATURALES DE PIEZAS EMPRESILLADAS VIA SERIES DE POTENCIAS

C. P. Filipich y E. A. Bambill

Departamento de Ingeniería, Area Construcciones, Universidad Nacional del Sur  
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200  
e-mail: [ebambill@criba.edu.ar](mailto:ebambill@criba.edu.ar) , web page: <http://www.uns.edu.ar/>

Departamento de Ingeniería Civil , Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional  
11 de Abril 461 B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4555220–Interno 132  
e-mail: [ebambill@frbb.utn.edu.ar](mailto:ebambill@frbb.utn.edu.ar) , web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/>

**Palabras claves:** barra, empresillada, larguero, presilla, frecuencias, serie de potencias.

**Resumen.** *El uso divulgado de barras compuestas empresilladas, especialmente dentro de la construcción metálica, conlleva conocer su comportamiento estático, dinámico y de estabilidad. Son conocidos desde hace varios años, los sistemas diferenciales que gobiernan cada uno de dichos problemas. Pese a ello, no están muy divulgadas en la bibliografía específica, ni las soluciones para las elásticas ni para las formas modales y autovalores para los problemas de estabilidad y de vibraciones libres, en este tipo de piezas.*

*En este trabajo se aborda entonces el especial sistema para frecuencias naturales, por medio de una eficiente herramienta matemática que los autores han utilizado frecuentemente, como es la simulación de formas modales, por medio del conocido método de las series de potencias.*

*El uso sistemático de esta metodología, permite resolver por medio de un algoritmo automático de recurrencia, el sistema diferencial homogéneo, que para cualquier condición de vínculo conduce a una ecuación característica que en todos los casos es de orden tres.*

*La aplicación a diversos esquemas completan el presente desarrollo.*

## 1 INTRODUCCIÓN

Analizamos el caso de barras compuestas empresilladas, a fin de determinar las frecuencias naturales de este tipo de piezas estructurales. Las barras son de directriz recta, sección trasversal constante, con un plano  $XY$  de simetría. Admitimos además, un comportamiento dentro de la resistencia elástica de los materiales. [1] y [2].

Sea la pieza de la Figura 1, de longitud  $L$ , constituida por dos largueros unidos por un plano de presillas iguales (en la práctica podrían ser varios planos). El área de la sección transversal de cada larguero es  $F$  y la de cada presilla es  $f$ . El momento de inercia de cada larguero respecto de su eje baricéntrico, paralelo al eje  $Z$  valdrá  $J$ . El momento de inercia de la sección de cada presilla respecto del eje  $Z$  se denomina  $j$ . Admitimos que para cada sección, conformada por larguero y presilla, los ejes  $Z$  e  $Y$  dibujados, son baricéntricos y de simetría.

Aceptamos que la separación  $D$  entre presillas es relativamente pequeña respecto a la longitud de la barra, lo que equivale a aceptar un número de presillas suficientemente grande.

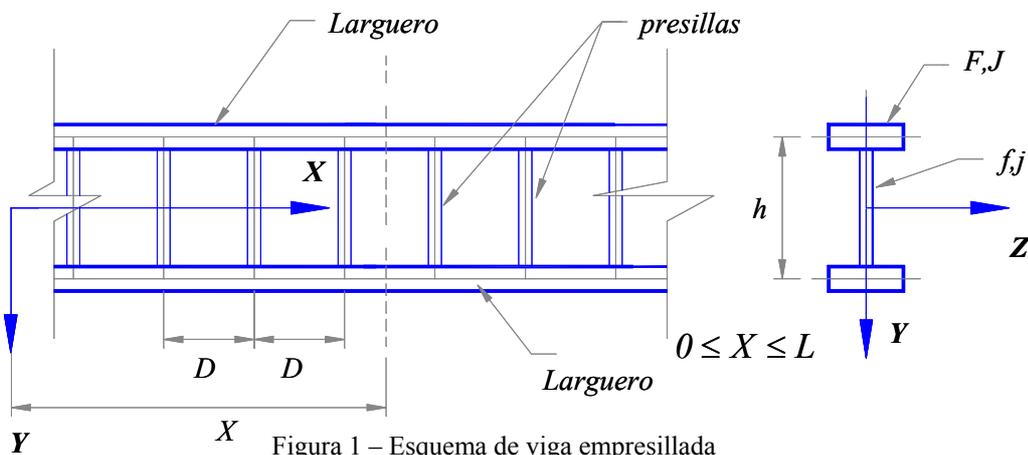


Figura 1 – Esquema de viga empresillada

Como en realidad no se trata de un sistema continuo (porque el número  $n$  de presillas es un número finito), asumiremos que es posible asimilar la suma de las energías de deformación de las presillas, a una integral, admitiendo  $n$  suficientemente grande, y la relación  $D/L$  suficientemente pequeña. [3].

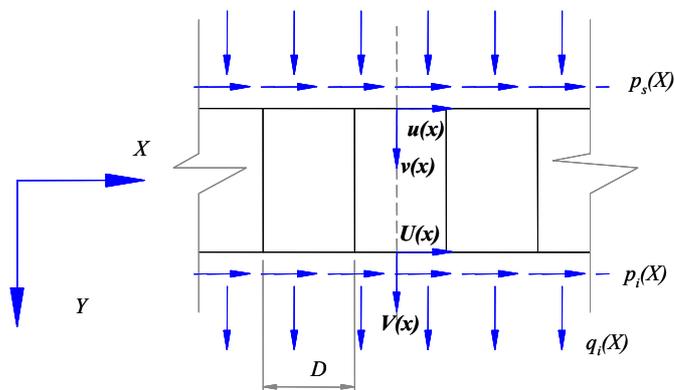


Figura 2

En la Figura 2, presentamos las funciones corrimientos básicos  $u(x)$ ,  $U(x)$ ,  $v(x)$  y  $V(x)$  de nuestro problema. Se trata de los corrimientos flexionales y axiales del baricentro de la sección de los largueros, y de las cargas generales que pueden aplicarse al sistema deformable.

En la figura 3, mostramos los corrimientos axil y transversal de cada presilla  $k$ -ésima:

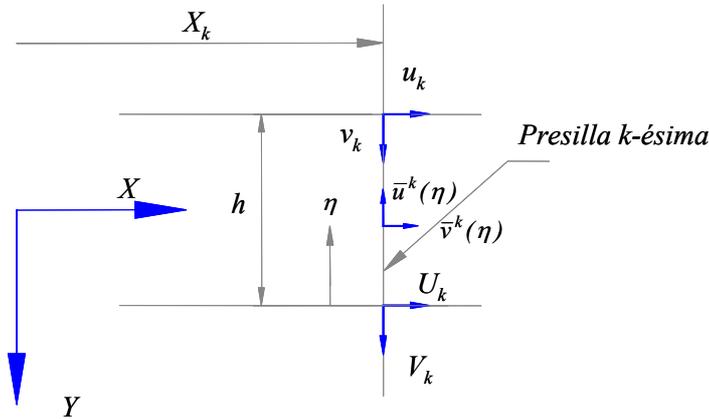


Figura 3

Suponemos que con el mismo material elástico de módulo  $E$  se construyen los largueros y las presillas.

## 2. PLANTEO DEL PROBLEMA

Para el análisis del problema dinámico, (ver ref. [7]), planteamos las energías de deformación  $W$ , posicional  $G$  de las cargas y cinética  $T$ . Resolvemos basándonos en el método energético, utilizando el Principio de Hamilton. [8].

A fin de lograr el movimiento real de la barra, se debe garantizar:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W + G - T) dt = 0 \quad (1)$$

donde  $t_0$  y  $t_1$  son dos instantes consecutivos arbitrarios, donde se supone que  $\delta u|_{t_1}^{t_2} = \delta U|_{t_1}^{t_2} = \delta v|_{t_1}^{t_2} = \delta V|_{t_1}^{t_2} = 0$

Pasamos ahora a determinar las expresiones de  $W$ ,  $G$  y  $K$ . La energía de deformación  $W$  del sistema deformado, como se sabe, genéricamente es:

$$W = W_L + \sum_{k=1}^n W_P^{(k)} \quad (2)$$

donde  $W_L$  es la energía almacenada por los largueros, y vale

$$W_L = \frac{EJ}{2} \int_0^L (v_{xx}^2 + V_{xx}^2) dX + \frac{EF}{2} \int_0^L (u_x^2 + U_x^2) dX \quad (3)$$

y  $W_P^{(k)}$  -energía de la cada presilla  $k$ -ésima- la expresamos como:

$$W_P^{(k)} = \frac{Ej}{2} \int_0^h \left( \bar{v}_{\eta\eta}^{(k)} \right)^2 d\eta + \frac{Ef}{2} \int_0^h \left( \bar{u}_{\eta}^{(k)} \right)^2 d\eta \quad (4.)$$

Con el propósito de no aumentar la complejidad algebraica, asumimos para las presillas un comportamiento estático. La deformación de cada presilla descargada, depende algebraicamente de los corrimientos extremos  $u_k \equiv u(X_k)$ ,  $U_k \equiv U(X_k)$ ,  $v_k \equiv v(X_k)$ ,  $V_k \equiv V(X_k)$ ,  $(v_x)_k \equiv v_x(X_k)$  y  $(V_x)_k \equiv V_x(X_k)$ . Dicho con más precisión, las deformadas axil y transversal de cada presilla sin carga aplicada, responden a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\bar{v}_{\eta\eta\eta\eta}^{(k)} = \bar{u}_{\eta\eta}^{(k)} = 0 \quad (5.)$$

cuya solución, vale:

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(k)} &= A_k \eta^3 + B_k \eta^2 + C_k \eta + D_k \\ \bar{u}^{(k)} &= a_k \eta + b_k \end{aligned} \quad (6.)$$

siendo:

$$\begin{aligned} h^3 A_k &= (v_{Xk} + V_{Xk})h + 2(U_k - u_k) & (a) \\ h^2 B_k &= -(v_{Xk} + 2V_{Xk})h - 3(U_k - u_k) & (b) \\ h C_k &= V_{Xk} h & (c) \quad ; \quad D_k = U_k & (d) \\ h a_k &= (V_k - v_k) & (e) \quad ; \quad b_k = -V_k & (f) \end{aligned} \quad (7.)$$

por lo cual (2.3) puede escribirse como

$$W_P^{(k)} = 2Ej \left( 3h^3 A_k^2 + h B_k^2 + 3h^2 A_k B_k \right) + \frac{Efh}{2} a_k^2 \quad (8.)$$

Ahora bien, por la hipótesis asumida (que por supuesto habrá de verificarse en el problema real cuando la cantidad  $n$  de presillas sea muy grande, con una separación  $D$  entre ellas muy pequeña. Matemáticamente sería como proponer que  $D \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ).

$$W_P = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ D \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n W_P^{(k)} \quad (9.)$$

o bien, con  $dX=D$

$$W_P = \frac{2Ej}{D} \int_0^L \left( 3h^2 A^2 + hB^2 + 3h^2 AB \right) dX + \frac{Efh}{2D} \int_0^L a^2 dX \quad (10.)$$

donde,  $A$ ,  $B$  y  $a$  son las constantes detalladas en (7), pero sin el subíndice  $k$ . Observamos que las constantes  $C$  y  $b$  no intervienen, es decir:

$$\begin{aligned} h^3 A &= (v_X + V_X)h + 2(U - u) & (a) \\ h^2 B &= -(v_X + 2V_X)h - 3(U - u) & (b) \\ h a &= (V - v) & (c) \end{aligned} \quad (11.)$$

La energía  $G$  de posición de las cargas vale:

$$G = - \int_0^L (q_s v + q_i V + p_s u + p_i U) dx \quad (12.)$$

Las energías cinéticas, despreciando inercia rotatoria de largueros y presillas, valen a su vez

$$T_L = \frac{\rho F}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{U}^2 + \dot{v}^2 + \dot{V}^2) dx \quad (13.)$$

y la energía cinética  $T_P^{(k)}$  de cada presilla  $k$ -ésima es:

$$T_P^{(k)} = \frac{\rho f}{2} \int_0^h (\dot{u}^{(k)})^2 + (\dot{v}^{(k)})^2 d\eta \quad (14.)$$

siendo  $\rho$  la densidad uniforme de largueros y presillas.

Asumiendo como dijimos, que la separación entre presillas  $D$  es relativamente muy pequeña respecto a la longitud  $L$  de los largueros, podemos escribir finalmente que

$$T_P = \frac{\rho f}{D^2} \int_0^L (\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 dx \quad (15.)$$

con lo cual queda completado el planteo energético.

### 3 SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES NATURALES

Liberamos la pieza de cargas aplicadas, de modo que  $p_s(x) = p_i(x) = q_s(x) = q_i(x) = 0$ . Admitimos modos normales de vibración, de frecuencia circular " $\omega$ " e introducimos el siguiente parámetro adimensional de frecuencia

$$\Omega = 2 \frac{\rho F}{EJ_y} \omega^2 L^4 \quad \text{donde} \quad J_y = 2J + 2F \left( \frac{h}{2} \right)^2 \quad (16.)$$

Resulta de utilidad plantear el problema basados en las siguientes funciones que ponen de manifiesto las deformadas simétricas y asimétricas. Para ello introducimos::

$$\begin{aligned} p &\equiv u - U & (a) & ; & P &\equiv u + U & (b) \\ r &\equiv v - V & (c) & ; & R &\equiv v + V & (d) \end{aligned} \quad (17.)$$

Recordemos que el principio de Hamilton conduce al movimiento real entre dos instantes cualesquiera  $t_0$  y  $t_1$  si se cumple (1) y si  $\delta p$ ,  $\delta P$ ,  $\delta r$ ,  $\delta R$  y sus derivadas respecto a  $x$  se anulan para  $t_0$  y  $t_1$ . Luego de integrar por partes hasta factorar dentro de las integrales  $\delta p$ ,  $\delta P$ ,  $\delta r$ ,  $\delta R$ , y debido a que estas cuatro variaciones son, en general, independientes entre sí, se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 r'''' + c_{12} r'' + c_{10} r + D_{11} P' &= 0 & (a) \\
 P'' + D_{30} P + c_{31} r' &= 0 & (b) \\
 R'''' + C_{12} R'' + C_{10} R + d_{11} p' &= 0 & (c) \\
 p'' + d_{30} p + C_{31} R' &= 0 & (d)
 \end{aligned}
 \tag{18.}$$

El problema ha sido adimensionalizado con  $x = X/L$ ,  $0 \leq x \leq 1$  e indicamos como  $(\bullet)' = \frac{d(\bullet)}{dx}$ ;  $(\bullet)'' = \frac{d^2(\bullet)}{dx^2}$ , etc. A su vez, obtenemos las siguientes condiciones de borde

$$\begin{aligned}
 |(C_{12} R' + R'''' + d_{11} P) \delta R|_{x_0}^{x_1} &= 0 & (a) & ; & |P' \delta P|_{x_0}^{x_1} &= 0 & (d) \\
 |(c_{12} r' + r'''' + D_{11} P) \delta r|_{x_0}^{x_1} &= 0 & (b) & ; & |r'' \delta r'|_{x_0}^{x_1} &= 0 & (e) \\
 |p' \delta p|_{x_0}^{x_1} &= 0 & (c) & ; & |R'' \delta R'|_{x_0}^{x_1} &= 0 & (f)
 \end{aligned}
 \tag{19.}$$

donde por  $x_0$  y  $x_1$  indicamos las coordenadas de los extremos del tramo que consideramos, y donde hemos definido como sigue, los parámetros geométricos intervinientes:

$$C_{12} = -\frac{6j}{hDJ} + \Omega^2 \frac{Jy h^3 f}{840 L^4 F J D} ; \quad c_{12} = -\frac{2j}{hDJ} + \Omega^2 \frac{Jy h^3 f}{120 L^4 F J D} \tag{20.}$$

$$C_{10} = -\Omega^2 \frac{Jy \left( F + \frac{hf}{3D} \right)}{2 L^4 F J} + \Omega^2 \frac{Jy h f}{12 L^4 J D} ; \tag{21.}$$

$$c_{10} = \frac{2f}{hDJ} - \Omega^2 \frac{Jy \left( F + \frac{hf}{3D} \right)}{2 L^4 F J} - \Omega^2 \frac{Jy h f}{12 L^4 J D} \tag{22.}$$

$$D_{11} = -\Omega^2 \frac{Jy h^2 f}{24 L^4 F J D} ; \quad d_{11} = \frac{12j}{h^2 J D} - \Omega^2 \frac{3}{280} \frac{Jy h^2 f}{L^4 F J D} \tag{23.}$$

$$D_{30} = \Omega^2 \frac{Jy}{2 L^4 F} \left( 1 + \frac{13hf}{35DF} \right) + \Omega^2 \frac{9}{140} \frac{Jy hf}{L^4 F^2 D} \tag{24.}$$

$$d_{30} = -\frac{24j}{h^3 DF} + \Omega^2 \frac{Jy}{2 L^4 F} \left( 1 + \frac{13hf}{35DF} \right) - \Omega^2 \frac{9}{140} \frac{Jy hf}{L^4 F^2 D} \tag{25.}$$

$$C_{31} = \frac{12j}{h^2 DF} - \Omega^2 \frac{3}{280} \frac{Jy h^2 f}{L^4 F^2 D} ; \quad c_{31} = -\Omega^2 \frac{Jy h^2 f}{24 L^4 F^2 D} \tag{26.}$$

Haremos un breve análisis de la solución clásica, sin hallarla, previo a la resolución por series de potencias, que es nuestra finalidad. Este paso, nos brindará una vía matemáticamente coherente y en la práctica muy simplificada, que permitirá reducir notablemente el trabajo del algoritmo que implementaremos, sin perder por ello la generalidad en el tratamiento del problema.

### 3.1 Solución Clásica

Para la solución clásica del problema homogéneo (19) proponemos las formas trascendentes:

$$r = \alpha e^{\lambda x}; \quad R = \beta e^{\lambda x}; \quad p = \varepsilon e^{\lambda x}; \quad P = \varphi e^{\lambda x} \quad (27.)$$

dando lugar al siguiente sistema lineal homogéneo en las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  y  $\varphi$ .

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} (\lambda^4 + c_{12}\lambda^2 + c_{10}) & D_{11}\lambda & 0 & 0 \\ c_{31}\lambda & (\lambda^2 + D_{30}) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (\lambda^4 + C_{12}\lambda^2 + C_{10}) & d_{11}\lambda \\ 0 & 0 & C_{31}\lambda & (\lambda^2 + d_{30}) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \alpha \\ \varphi \\ \beta \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28.)$$

La nulidad del determinante nos conduce a las doce (12) raíces u autovalores del problema. Sin embargo, por la forma particular del mismo, surgen dos posibilidades independientes

$$\begin{aligned} (\lambda^4 + c_{12}\lambda^2 + c_{10}) (\lambda^2 + D_{30}) - D_{11} c_{31} \lambda^2 &= 0 \quad (a) \\ (\lambda^4 + C_{12}\lambda^2 + C_{10}) (\lambda^2 + d_{30}) - d_{11} C_{31} \lambda^2 &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (29.)$$

Logramos de este modo disociar las formas modales en asimétricas y simétricas. En efecto, rescribiendo las (32), obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_a^6 + \lambda_a^4 (D_{30} + c_{12}) + \lambda_a^2 (c_{12}D_{30} + c_{10} - D_{11} c_{31}) + c_{10} D_{30} &= 0 \quad (a) \\ \lambda_b^6 + \lambda_b^4 (d_{30} + C_{12}) + \lambda_b^2 (C_{12}d_{30} + C_{10} - d_{11} C_{31}) + C_{10} d_{30} &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (30.)$$

Las seis raíces  $\lambda_{aj}; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  corresponden a  $\beta = \varepsilon = 0$ , permiten obtener las **formas modales asimétricas**.

$$R = p = 0 \quad v = -V; \quad u = U \quad (31.)$$

Por otro lado, las seis raíces  $\lambda_{bj}; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  corresponden a  $\alpha = \varphi = 0$ , con lo cual obtenemos las **formas modales simétricas**.

$$r = P = 0 \quad v = V; \quad u = -U \quad (32.)$$

A su vez

$$\varphi_j = -\frac{c_{31} \lambda_{aj}}{(\lambda_{aj}^2 + D_{30})} \alpha_j; \quad \varepsilon_j = -\frac{C_{31} \lambda_{bj}}{(\lambda_{bj}^2 + d_{30})} \beta_j \quad \text{con } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (33.)$$

con lo cual, distinguimos

$$\text{Modo Asimétrico} \left\{ \begin{aligned} r &= \sum_{j=1}^6 \alpha_j e^{\lambda_{aj}x}; \quad P = -c_{31} \sum_{j=1}^6 \frac{\lambda_{aj}}{(\lambda_{aj}^2 + D_{30})} \alpha_j e^{\lambda_{aj}x} \end{aligned} \right. \quad (34.)$$

$$\text{Modo Simétrico} \left\{ R = \sum_{j=1}^6 \beta_j e^{\lambda_{bj}x}; p = -C_{31} \sum_{j=1}^6 \frac{\lambda_{bj}}{(\lambda_{bj}^2 + d_{30})} \beta_j e^{\lambda_{bj}x} \right. \quad (35.)$$

Hemos deducido que el sistema diferencial (18) de  $4 \times 4$  en realidad consiste en dos sistemas independientes de  $2 \times 2$ , lo que reduce notablemente la implementación algebraica.

#### 4 SOLUCIÓN EN SERIES DE POTENCIAS

En ingeniería estamos interesados en algunos aspectos del mundo físico real, y normalmente para investigarlos recurrimos a la ayuda de un modelo matemático. El uso del modelo satisface dos objetivos; nos permite aislar los aspectos relevantes de una situación física compleja y también especificar con precisión el problema a resolver.

Dejamos aquí de lado el análisis matemático convencional, para centrarnos en un procedimiento alternativo, que permite expresar la solución del problema, mediante el uso de series de potencias, evaluadas mediante un algoritmo matemáticos recurrente implementado en una computadora personal.

Es de destacar, que la gran ventaja de la aproximación numérica propuesta, permite que el modelo sea tratado de un modo tan real como se desee. El análisis computacional, nos provee de un resultado numérico tan preciso como sea menester, a la par que facilita la comprensión general del comportamiento de la presilla, luego de determinar cuales son los factores mas importantes.

Las series de potencias representan las funciones analíticas trascendentes de deformación de la barra empresillada, y sortean con éxito la complejidad matemática que conlleva la solución trascendente convencional.

Atento a que con la introducción de las funciones  $r$ ,  $R$ ,  $p$  y  $P$  hemos logrado disociar los modos simétricos y asimétricos, se simplifica notablemente el tratamiento del problema. Imponemos que los corrimientos sean series de potencias de  $x$ .

##### 4.1. Modo Simétrico

Imponemos que en el dominio analizado, es decir,  $0 \leq x \leq l$

$$R = R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \quad ; \quad p = p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i \quad (36.)$$

donde, como vemos, las series se extienden hasta el infinito. En la práctica, las mismas serán finitas, de  $M + l$  términos, dependiendo  $M$  del grado de precisión arbitraria con el que se quiera determinar el autovalor.

El sistema lineal homogéneo a resolver en este caso, es

$$\begin{aligned} R'''' + C_{12} R'' + C_{10} R + d_{11} p' &= 0 & (a) \\ p'' + d_{30} p + C_{31} R' &= 0 & (b) \end{aligned} \quad (37.)$$

y teniendo en cuenta que las derivadas  $k$ -ésimas pueden escribirse como

$$R^{(k)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{k!} A_{i+k} x^i \quad ; \quad p^{(k)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{k!} B_{i+k} x^i \quad (38.)$$

reemplazando en el sistema , hallaremos las siguientes recurrencias, igualando los factores de cada  $x^i$  (con  $i=0,1,2,\dots,M+1$ ).

$$A_{i+4} = -\frac{C_{12}\varphi_2 A_{i+2} + C_{10} A_i + d_{11} \varphi_1 B_{i+1}}{\varphi_4}$$

$$B_{i+2} = -\frac{d_{30} B_i + C_{31} \varphi_1 A_{i+1}}{\varphi_2} \quad (39.)$$

El procedimiento clásico de recurrencia es aplicado en el presente trabajo. La metodología aplicada se detalla en el Apéndice A.

Observamos que las recurrencias comienzan a partir de  $A_4$  y  $B_2$ . Luego, deben ser previamente conocidas las seis constantes  $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0$  y  $B_1$ . A partir de las condiciones de borde, se determinan tres (3) de ellas en  $x=0$  y las otras tres (3) restantes con las CB en  $x=1$ . La consideración de esta propuesta da lugar a un sistema homogéneo de (3x3), de donde surge el autovalor del problema.

En realidad, la imposición de las seis (6) CB homogéneas –tres (3) en  $x=0$  y tres (3) en  $x=1$ - da por lo general un sistema homogéneo de (6x6) en esas seis constantes, cuyo determinante debe anularse para obtener una solución matricial. Es un clásico problema de valores propios, a partir del cual se obtienen las frecuencias naturales y sus correspondientes formas modales.

Consideramos los siguientes casos posibles,

### Caso 1 – Barra empresillada biarticulada

En  $x=0$  las condiciones de borde

$$p'(0) = R(0) = R''(0) = 0 \quad (40.)$$

permiten determinar respectivamente las constantes  $B_1 = 0, A_0 = 0$  y  $A_2 = 0$ . Luego, quedan por determinar  $A_1, A_3$  y  $B_0$ , recurriendo para ello a las condiciones que determina el extremo  $x=1$ .

### Caso 2 – Viga ménsula empresillada

En  $x = 0$  las condiciones de borde

$$p'(0) = R''(0) = 0 \quad (41.)$$

determinan respectivamente las constantes  $B_1 = 0$  y  $A_2 = 0$ . En el mismo borde, la consideración de (19b), nos lleva a que

$$B_0 = -C_{12}A_1 + 6A_3 \quad (42.)$$

quedando libres las constantes  $A_0, A_1$  y  $A_3$ . En  $x=1$ , donde la barra está empotrada, ocurre que

$$p(1) = R(1) = R'(1) = 0 \quad (43.)$$

**Caso 3 – Barra empresillada biempotrada.**

En  $x = 0$  las condiciones de borde

$$p(0) = R(0) = R'(0) = 0 \tag{44.}$$

determinan respectivamente las constantes  $B_0 = A_0 = A_1 = 0$  y  $A_2 = 0$ . Quedan libres  $B_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , que se determinan a partir de las condiciones del borde empotrado  $x = 1$ .

$$p(1) = R(1) = R'(1) = 0 \tag{45.}$$

**Caso 4 – Barra empresillada articulada-empotrada.**

Este caso, a partir de las condiciones en  $x=0$  (borde articulado),

$$p'(0) = R(0) = R''(0) = 0 \tag{46.}$$

podemos determinar respectivamente que  $B_1 = 0, A_0 = 0$  y  $A_2 = 0$ . Las condiciones de borde empotrado en  $x = 1$

$$p(1) = R(1) = R'(1) = 0 \tag{47.}$$

permiten encontrar las constantes libre  $B_0, A_1$  y  $A_3$ .

En los casos descritos, al imponer las tres CB en  $x=1$  llegamos a un sistema de  $(3 \times 3)$  en las constantes que tenemos o elegimos como libres. Cada columna  $k$ -ésima ( $k=1,2,3$ ) de la matriz  $(3 \times 3)$  se halla imponiendo las tres C.B. y alternativamente igualando a la unidad la constante libre  $k$ -ésima y anulando las otras dos.

**4.2. Modo Asimétrico**

El tratamiento es análogo al caso anterior. En este caso, imponemos que en el dominio  $0 \leq x \leq 1$

$$r = r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i; \quad P = P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i \tag{48.}$$

y si bien las series se extienden hasta el infinito, en la práctica, las consideramos finitas, de  $M + 1$  términos, dependiendo  $M$  del grado de precisión arbitraria con el que se quiera determinar el autovalor.

El sistema lineal homogéneo a resolver en este caso, es el siguiente

$$\begin{aligned} r'''' + c_{12} r'' + c_{10} R + D_{11} P' &= 0 & (a) \\ P'' + D_{30} P + c_{31} r' &= 0 & (b) \end{aligned} \tag{49.}$$

El tratamiento del problema es completamente análogo al análisis que hemos hecho para los modos simétricos, de ahí que obviamos aquí el desarrollo del mismo.

Se analizan los mismos casos de barras empresilladas, es decir, se hallan la frecuencia natural de oscilación de la barra biarticulada, biempotrada, ménsula y articulada-empotrada.

**5 METODOLOGÍA UTILIZADA**

Para fijar ideas, sea el caso de la presilla biarticulada. En ambos extremos, es evidente que en  $x=0$

$$N(0) = v(0) = M(0) = 0 \quad (50.)$$

con lo cual, tenemos

$$p'(0) = \sum_{i=0} (i+1) B_{i+1} x^i \Rightarrow B_1 = 0; \quad R(0) = \sum_{i=0} A_i x^i \Rightarrow A_0 = 0$$

$$R''(0) = \sum_{i=0} \varphi_2 A_{i+2} x^i \Rightarrow A_2 = 0 \quad (51.)$$

con lo cual las constantes libres son  $B_0$ ,  $A_1$  y  $A_3$ . En el borde empotrado,  $x = 1$

$$p'(1) = R(1) = R''(1) = 0 \quad (52.)$$

es decir,

$$p(1) = \sum_{i=0} \varphi_1 B_{i+1} x^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0} \varphi_1 B_{i+1} = 0; \quad R(1) = \sum_{i=0} A_i x^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0} A_i$$

$$R''(1) = \sum_{i=0} \varphi_2 A_{i+2} x^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0} \varphi_2 A_{i+2} = 0 \quad (53.)$$

con estas tres condiciones homogéneas, obtenemos la ecuación característica, en que es un sistema lineal homogéneo en  $B_0$ ,  $A_1$  y  $A_3$ , de donde hallamos los autovalores  $\omega$

Para resolver, hacemos lo siguiente:

- *Paso 1* : Imponemos  $B_0 = 1$  y  $A_1 = A_3 = 0$ , con lo cual, hacemos

$$b_{11} = \sum_{i=0} \varphi_1 B_{i+1}; \quad b_{21} = \sum_{i=0} A_i; \quad b_{31} = \sum_{i=0} \varphi_2 A_{i+2} \quad (54.)$$

- *Paso 2* : Imponemos  $B_0 = 0$ ;  $A_1 = 1$  y  $A_3 = 0$ , con lo cual, hacemos

$$b_{12} = \sum_{i=0} \varphi_1 B_{i+1}; \quad b_{22} = \sum_{i=0} A_i; \quad b_{32} = \sum_{i=0} \varphi_2 A_{i+2} \quad (55.)$$

- *Paso 3* : Imponemos  $B_0 = A_1 = 0$  y  $A_3 = 1$ , con lo cual, hacemos

$$b_{13} = \sum_{i=0} \varphi_1 B_{i+1}; \quad b_{23} = \sum_{i=0} A_i; \quad b_{33} = \sum_{i=0} \varphi_2 A_{i+2} \quad (56.)$$

y finalmente, obtenemos el sistema  $3 \times 3$

$$\begin{aligned}
 b_{11} B_0 + b_{12} A_1 + b_{13} A_3 &= 0 \\
 b_{21} B_0 + b_{22} A_1 + b_{23} A_3 &= 0 \\
 b_{31} B_0 + b_{32} A_1 + b_{33} A_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{57.}$$

Modificando los valores de  $\Omega^2$  hasta anular el determinante de (3x3) hallamos las frecuencias de la barra empresillada.

### 6. FRECUENCIAS NATURALES DE PIEZAS EMPRESILLADAS

Los valores que se presentan a continuación, corresponden a una barra recta empresillada, cuyas características se detallan a continuación Longitud larguero  $L= 400\text{ cm}$ ; altura de la viga  $h= 30\text{ cm}$ ; Separación entre presillas  $D=20\text{ cm}$ ; Sección de un larguero  $F= 17\text{ cm}^2$ ; Inercia flexional larguero  $J= 43,2\text{ cm}^4$ ; Inercia flexional  $J_y= 7736,4\text{ cm}^4$ ; Sección de la presilla  $f= 6\text{ cm}^2$ ; Inercia flexional presilla  $j= 4,5\text{ cm}^4$ .

En los distintos ejemplos analizados se ha determinado la primera frecuencia natural mediante el algoritmo recurrente en series de potencias, y se compara con los obtenidos con el método de Runge Kutta.

Las tablas siguientes permiten comparar ambos procedimientos en la determinación de la primera frecuencia natural. Se analizan los cuatro casos según el tipo de vinculación de la barra empresillada, y se varía la rigidez flexional de la presilla mediante un factor  $\psi f$ .

En general se observa que a medida que aumenta la rigidez  $j$  de las presillas los resultados pierden precisión. Se estima que esta situación deriva de la alta complejidad del algoritmo utilizada.

#### 6.1 Frecuencias Formas Modales Simétricas

Tabla 1 : Viga Biarticulada - Forma modal simétrica

$\psi$	RUNGE KUTTA	SERIES POTENCIAS	$\psi$	RUNGE KUTTA	SERIES POTENCIAS
0.00	2.079915652221	0,927428364416119	1.75	4.461475443513	4,46147532290778
0.25	2.079915652221	2,07991565221455	2.00	4.676626801525	4,67662174511933
0.50	2.736764620452	2,73676462044241	2.25	4.868758907155	4,86871756314066
0.75	3.223213614999	3,22321361497743	2.50	5.041775153498	5,04163898855912
1.00	3.613213309150	3,61321330927312	2.75	5.198663424606	5,19796190918422
1.25	3.938944538135	3,93894453693646	3.00	5.341767928002	5,33853567122714
1.50	4.218043640144	4,21804358209483	3.25	5.472964977440	5,44018068786244

Tabla 2 : Viga Biempotrada - Forma modal simétrica

$\psi$	RUNGE KUTTA	SERIES POTENCIAS	$\psi$	RUNGE KUTTA	SERIES POTENCIAS
0.00	2.10236169657658	2,10236167280236	1.75	5.62757831024898	5,62756639370926
0.25	2.96657872372218	2,96657869827468	2.00	5.92569460975894	5,92544497753259
0.50	3.59917147313542	3,59917144696228	2.25	6.20302412773978	6,201472372876
0.75	4.11559638944856	4,11559635766316	2.50	6.46262856386613	6,45963134847114
1.00	4.55903137910336	4,5590313714696	2.75	6.70687998810302	6,62484716286416
1.25	4.95114242617357	4,95114230508915	3.00	6.93766154540468	6,23730163570725
1.50	5.30460288767796	5,30459936184342	3.25	7.15649871353437	5,09490222035673

Tabla 3 : Viga Libre - Empotrada - Forma modal simétrica

$\psi$	RUNGE KUTTA	SERIES POTENCIAS	$\psi$	RUNGE KUTTA	SERIES POTENCIAS
0.00	---		1.75	---	3,80145599467505
0.25	---	1,93538016921375	2.00	---	3,98885344920564
0.50	---	2,41543363839155	2.25	---	4,15951729379594
0.75	---	2,78801927822642	2.50	---	4,31560324037855
1.00	---	3,09669361124979	2.75	---	4,46020949167723
1.25	---	3,36170469671487	3.00	---	4,58713280376105
1.50	---	3,59443493280559	3.25	---	4,69782175138243

Tabla 4 : Viga Articulada - Biempotrada

$\psi$	RUNGE KUTTA	SERIES POTENCIAS	$\psi$	RUNGE KUTTA	SERIES POTENCIAS
0.00	1.44881344715823	1,44881343485322	1.75	4.96400178195833	4,96400170325068
0.25	2.46404540205644	2,4640453891363	2.00	5.21916992748505	5,21916940542868
0.50	3.10903488460117	3,10903486858588	2.25	5.45337859627278	5,45337522203334
0.75	3.60560682741341	3,60560680849012	2.50	5.66996230783047	5,66992187196155
1.00	4.01674201891521	4,01674201886635	2.75	5.87146189535652	5,87141159959136
1.25	4.37079825982817	4,37079825948457	3.00	6.05986664456778	6,05940040424465
1.50	4.68334834562221	4,68334834121632	3.25	6.23676916481637	6,23007046504643

## 6.2 Frecuencias Formas Modales Asimétricas

En el análisis de las primeras frecuencias naturales correspondientes a las formas modales asimétricas, se observa un comportamiento de las presillas independiente como varíe la inercia flexional de la presilla,  $\psi f$ , cosa que no sucedía en el caso de las formas modales simétricas, altamente sensible a este parámetro geométrico.

En los casos de viga biarticulada, biempotrada y articulada-empotrada, independientemente de la rigidez flexional  $\psi f$  adoptado de la presilla, el parámetro de frecuencia hallada es

$$\Omega = 74,077154172258$$

## 7. CONCLUSIONES

La potencialidad de esta metodología para resolver problemas de valores propios y formas modales es sorprendente si la comparamos con otros métodos clásicos. En todo momento, la cantidad de incógnitas es solo y nada más que tres. Comparado con elementos finitos, la ventaja surge de modo inmediato, ya que en este caso resulta determinar tres incógnitas por cada uno de los nudos en que se hace necesario discretizar el dominio para resolver.

La metodología aquí aplicada nos permite considerar la solución trascendente, ligando los desplazamientos verticales con los axiles. En general la solución trascendente, hiperbólica, tiene una difícil convergencia, según han corroborado los autores en trabajos anteriores. El uso de las series de potencias suaviza de algún modo esta problemática, estimándose conveniente realizar un estudio más profundo en próximos análisis.

Se han corroborado los valores de las frecuencias con el método de Runge Kutta, en la resolución del sistema lineal a coeficientes constantes que fue derivado en el caso de la barra empesillada.

Como un dato de destacar, es que en el uso de las series de potencias, resultó conveniente para lograr una mayor convergencia de los valores de las frecuencias obtenidas, dividir el dominio de

la viga en  $n$  tramos. Pese a la aparente sencillez geométrica de la barra, que hacía presuponer el tratamiento del problema sin necesidad de tener que discretizar el dominio, a fin de lograr valores más preciso y convergentes, fue necesario la división del dominio en varios tramos.

## 8 REFERENCIAS

- [1] DIN 4114 – El Acero en la Construcción. Editorial reverté. S. A. 1972.
- [2] CIRSOC 302 – *Fundamentos y métodos de cálculo para los problemas de Estabilidad del Equilibrio en estructuras de Acero*. 1980.
- [3] L. Norzi. *Il carico di Punta di una Colonna a Maglie Rettangolari*. Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Serie VIII, vol. X, fasc. 3. 1951.
- [4] Y.C. Fung. *Foundation of Solid Mechanics*. Edit. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. 1968.
- [5] C.P. Filipich. *Inestabilidad del Equilibrio*. Curso 813. Secretaría Argentina para el Centro Internacional de Ciencias mecánicas. Argentina. 1981.
- [6] C.P. Filipich. *Inestabilidad del Equilibrio – Pandeo*. Curso de Postgrado dictado en el año 1984. Dpto. de Ingeniería de la UNS. 1985.
- [7] C.P. Filipich. *Vigas compuestas empresilladas*.
- [8] F.B. Hildebrand. *Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. 1968.
- [9] C.P. Filipich, M.B. Rosales, F. Buezas. “*Some non-lineal mechanical problems solved with an analytical solution*” Para publicar en Latin American Applied Research.

## APÉNDICE A – SERIES DE POTENCIAS

Recurrencia : [9]

Consideremos una función continua  $f = f(x)$  con  $0 \leq x \leq 1$ . Escribimos la expansión en series de potencias como

$$[f] \equiv \sum_{k=0}^N a_{1k} x^k \quad (A1)$$

y para potencias  $m$ -ésimas

$$[f^m] \equiv \sum_{k=0}^N a_{mk} x^k \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (A2)$$

Para cumplir con la *condición de consistencia algebraica (C.A.)* se debe satisfacer la siguiente relación

$$[f^m] = [f^{m-1}][f] \quad (A3)$$

Después de reemplazar las series en cada factor de esta ecuación, se obtiene la siguiente expresión de recurrencia

$$a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)p} a_{1(k-p)} \quad \text{o} \quad a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)(k-p)} a_{1p} \quad (A4)$$

Ahora expandimos una función analítica  $h = \hat{h}(x) = \hat{h}(y(x)) = h(x)$  en series de Taylor

$$\hat{h}(y) = \sum_{m=0}^M \alpha_m y^m \quad (\text{A5})$$

donde  $\alpha_m$  son conocidas. En particular, indicamos

$$[1] = \sum_{k=0}^N \delta_{0k} x^k \quad (\text{A6})$$

donde  $a_{0k} = \delta_{0k}$  y  $\delta_{0k}$  son los deltas de Kronecker. Si sustituimos la ecuación (2) en la ecuación (5) (con  $y(x) \equiv f(x)$ ), podemos escribir

$$[h(x)] = \sum_{k=0}^N \varphi_k x^k \quad \varphi_k = \sum_{m=0}^M \alpha_m a_{mk} \quad (\text{A7})$$

Esta expresión será usada para cualquier función analítica.

Ahora si tenemos una función racional  $\hat{F}(y)$

$$\hat{F}(y) = \frac{\hat{g}(y)}{\hat{h}(y)} = \frac{g(x)}{h(x)} = F(x) \quad (\text{A8})$$

siendo  $\hat{g}(y)$  y  $\hat{h}(y)$  funciones analíticas y  $\hat{h}(0) \neq 0$  y  $\hat{g}(y) = \sum_{m=0}^M \beta_m y^m$  y  $\beta_m$  conocidas. Entonces se puede escribir

$$[g(x)] = \sum_{k=0}^N \varepsilon_k x^k \quad (\text{a}) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_k = \sum_{m=0}^M \beta_m a_{mk} \quad (\text{b}) \quad (\text{A9})$$

Si denominamos

$$[F(x)] = \sum_{k=0}^N \lambda_k x^k \quad (\text{A10})$$

Ahora la C.A. debe aplicarse

$$[F(x)][h(x)] = [g(x)] \quad (\text{A11})$$

$$\left( \sum_{k=0}^N \lambda_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^N \varphi_k x^k \right) = \sum_{k=0}^N \varepsilon_k x^k \quad \text{donde} \quad \varepsilon_k = \sum_{p=0}^k \varphi_p \lambda_{(k-p)} \quad (\text{A12})$$

Los  $\lambda_k$  son desconocidos y los conjuntos  $\varphi_k$  y  $\varepsilon_k$  son conocidos.

Es evidente que  $\lambda_0 = \varepsilon_0 / \varphi_0$ . Ahora la relación de recurrencia para  $\lambda_k$  es

$$\lambda_k = \frac{\varepsilon_k - \sum_{p=1}^k \varphi_p \lambda_{(k-p)}}{\varphi_0} \quad \text{donde} \quad \varphi_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A13})$$

Debe notarse que  $\varphi_0 \neq 0$  para que  $F(0)$  exista.

También las expansiones pueden efectuarse alrededor de  $x_0$ . En nuestro caso siempre  $x_0 = 0$ .