

DINÁMICA DE VIGAS CURVAS CONSTRUIDAS CON MATERIALES COMPUESTOS, BAJO CARGAS MÓVILES

Marcelo T. Piovan[†] y Víctor H. Cortínez[†]

[†] Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-0291-4555220 FAX: 0291 4555311
e-mail: mpiovan@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/gasm>

Palabras clave: Vigas Curvas. Paredes Delgadas. Anisotropía. Cargas Móviles

Resumen. *En este artículo se desarrolla una solución numérica para el caso de vigas horizontalmente curvadas, sometidas a la acción de cargas móviles verticales y horizontales. Este estudio extiende y complementa a muchos de los recientes estudios sobre vibraciones inducidas por cargas móviles en puentes entre otras aplicaciones de vigas curvas no flexibles por corte, ya que aquí se emplea una formulación de viga curva con deformación por corte completa. El concepto de deformación por corte completo implica, la incorporación de deformación por corte debido a la flexión y debida al alabeo por torsión no uniforme. Se desarrolla un elemento finito acorde con la teoría general de viga curva y se emplea un esquema de cálculo basado en el método de Newmark para efectuar el análisis paramétrico correspondiente, y cotejar las diferencias entre soluciones con modelos que contemplan y desprecian la flexibilidad por corte.*

1 INTRODUCCIÓN

Las vibraciones en el plano y fuera del plano en vigas curvadas horizontalmente han atraído la atención de muchos investigadores durante años. Históricamente el análisis dinámico en vigas curvas (de paredes delgadas o no) fue dirigido principalmente al caso de vibraciones fuera del plano (es decir fuera del plano que contiene la línea curvada de centros de referencia de la viga) y al caso particular de cargas móviles con el fin de modelar puentes curvados ^[1]. La respuesta de vigas curvas en relación con cargas móviles o transitorias es diferente de aquella prevista para sus homónimas estáticas. A su vez cargas móviles pueden inducir diferentes patrones de vibración, especialmente en vigas construidas con materiales compuestos. En el análisis dinámico de vigas curvas isótropas, durante los últimos veinte años, se han utilizado diferentes tipos de modelos. Recientemente, Yang y colaboradores ^[1] utilizaron un modelo de vigas curvas que desprecia los efectos de flexibilidad por corte. Por otro lado Wang y Sang ^[2] utilizaron un modelo de viga curva que considera efectos de corte flexionales pero despreciaron efectos de corte por alabeo debidos a torsión no uniforme. Los autores ^[3] estudiaron problemas de vibraciones de vigas curvas de paredes delgadas de material compuesto, empleando un modelo que contempla la flexibilidad por corte completa, es decir, flexibilidad por corte debida a flexión y debida a torsión no uniforme. Una revisión en la literatura técnica-científica, permite establecer la escasez de investigaciones en problemas de vibraciones transitorias en vigas curvas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos.

En este artículo los autores, introducen una generalización de los modelos de vigas curvas con paredes delgadas de materiales compuestos por ellos desarrollados^[4], con el objeto de contemplar sollicitaciones transitorias. Se emplea el método de elementos finitos para estudiar diferentes tipos de cargas transitorias y sus patrones de vibración en vigas curvadas construidas con materiales compuestos con diferentes secuencias de laminación. A su vez, se efectúan estudios comparativos en relación a la influencia del efecto de deformación por corte.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL

Se considera una viga curvada en el plano, con sección genérica de paredes delgadas como la expuesta en Figura 1. En ella se pueden apreciar los dos sistemas de referencia cartesianos y dextrógiros, que se emplean. El sistema de referencia $\{C : \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, es el principal y sobre el mismo se mide la mecánica global de la viga. El sistema de referencia secundario $\{A : \hat{x}, \hat{s}, \hat{n}\}$ es solidario a la línea media del perfil seccional y, en el mismo se evalúan las características propias de la sección transversal. Las coordenadas (s, n) son tangente y normal a la línea media, respectivamente, tal como se puede apreciar en la Figura 2 a. En tal figura se muestra el perfil de una sección genérica de paredes delgadas, donde se ven las entidades geométricas que permiten definir la cinemática de la sección y por ende de la viga. En tanto que en la Figura 2.b se muestra la manera en que se idealiza la sección, como si se tratara de una sucesión de segmentos indefinidamente pequeños, cada uno de los cuales responde al comportamiento de una placa plana.

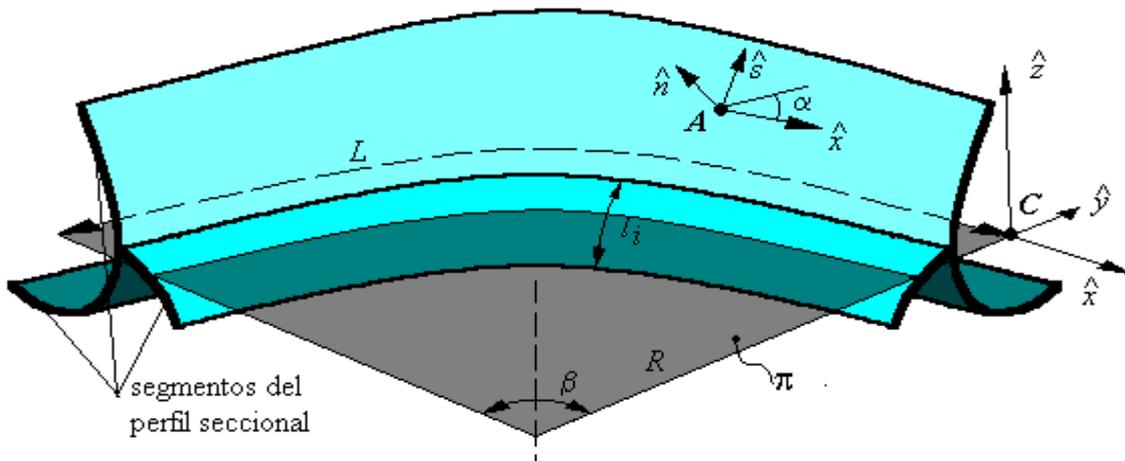


Figura 1. Viga curva genérica de paredes delgadas con sus sistemas de referencia básicos

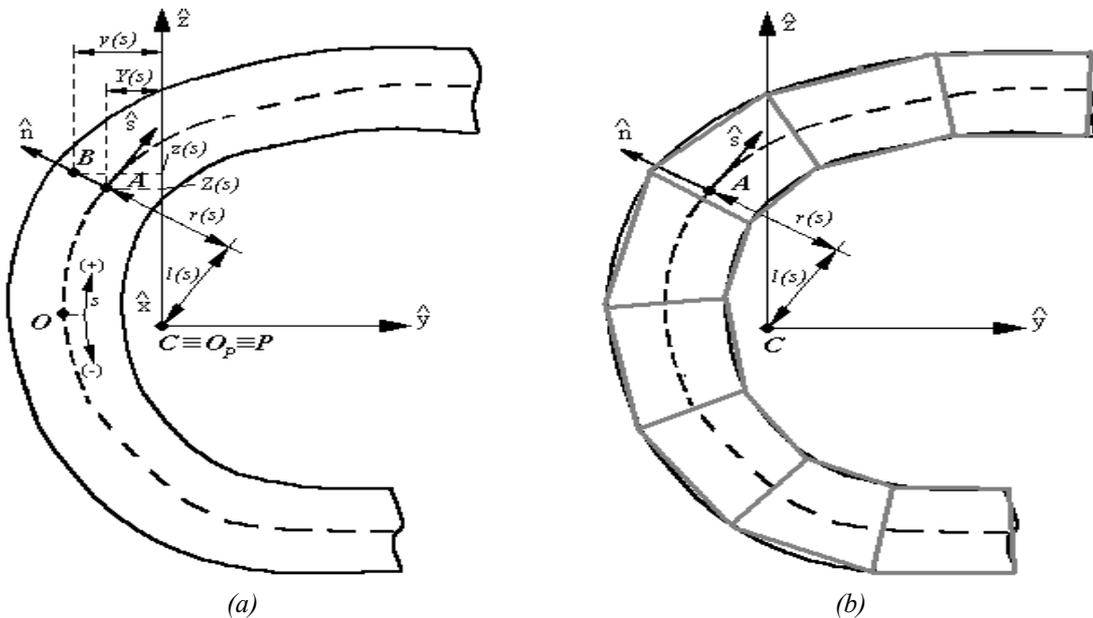


Figura 2. Descripción del perfil y entidades geométricas de una sección genérica

Los puntos P , C , O_P y O son el polo de la sección, el centro geométrico de la sección, el centro de referencia y el origen de la coordenada “ s ”. Con el objeto de simplificar la descripción analítica del modelo los tres primeros puntos se consideran coincidentes. Algunas teorías ^[5] de materiales isotrópicos suelen definirse en función de dos polos, para poder simplificar las expresiones constitutivas en virtud de la anulación de determinadas integrales en el área, sin embargo en el caso de materiales anisótropos, la presencia de acoplamientos intensos, no permite tal anulación, conduciendo a expresiones mucho más complejas.

3 DESCRIPCION DEL MODELO MATEMATICO

El modelo matemático en el que se sustenta este estudio fue desarrollado por los autores para analizar problemas de vibraciones libres en el contexto tanto de materiales isótropos ^[5] como de materiales compuestos laminados ^[3,4].

El comportamiento dinámico de una viga curva flexible por corte, con los aportes de flexibilidad cortante debida a flexión y a alabeo por torsión no uniforme, puede representarse con la siguiente formulación de trabajos virtuales

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_4 = 0 \quad (1)$$

Donde \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 , \mathbf{L}_3 y \mathbf{L}_4 son los trabajos virtuales de los esfuerzos internos, de las fuerzas de inercia, de las fuerzas externas y de las fuerzas de amortiguamiento respectivamente, los cuales vienen dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 = & \int_L [\mathbf{Q}_x \delta \varepsilon_{D1} - \mathbf{M}_y \delta \varepsilon_{D3} - \mathbf{M}_z \delta \varepsilon_{D2} - \mathbf{B} \delta \varepsilon_{D4}] dx + \\ & + \int_L [\mathbf{Q}_y \delta \varepsilon_{D5} + \mathbf{Q}_z \delta \varepsilon_{D6} + \mathbf{T}_{sv} \delta \varepsilon_{D8} + \mathbf{T}_w \delta \varepsilon_{D7}] dx \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{L}_2 = \int_L [\mathbf{M}_1 \delta u_{xc} + \mathbf{M}_3 \delta \theta_z + \mathbf{M}_5 \delta \theta_y + \mathbf{M}_7 \delta \theta_x + \mathbf{M}_2 \delta u_{yc} + \mathbf{M}_4 \delta u_{zc} + \mathbf{M}_6 \delta \phi_x] dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_3 = & - \int_L [\mathbf{Q}_1(x,t) \delta u_{xc} + \mathbf{Q}_3(x,t) \delta \theta_z + \mathbf{Q}_5(x,t) \delta \theta_y + \mathbf{Q}_7(x,t) \delta \theta_x] dx - \\ & - \int_L [\mathbf{Q}_2(x,t) \delta u_{yc} + \mathbf{Q}_4(x,t) \delta u_{zc} + \mathbf{Q}_6(x,t) \delta \phi_x] dx \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{L}_4 = \int_L [\mathbf{D}_1 \delta u_{xc} + \mathbf{D}_2 \delta u_{yc} + \mathbf{D}_3 \delta \theta_z + \mathbf{D}_4 \delta u_{zc} + \mathbf{D}_5 \delta \theta_y + \mathbf{D}_6 \delta \phi_x + \mathbf{D}_7 \delta \theta_x] dx \quad (5)$$

En las expresiones (2) a (4) se han efectuado las siguientes definiciones:

$$\{\mathbf{Q}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z, \mathbf{B}\} = \int_A \sigma_{xx} \{1, z, y, \omega\} dA, \{\mathbf{Q}_y, \mathbf{Q}_z\} = \int_A \{\sigma_{xy}, \sigma_{xz}\} dA \quad (6)$$

$$\{\mathbf{T}_{sv}, \mathbf{T}_w\} = \int_A \left\{ \left[\sigma_{xz} \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \sigma_{xy} \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right], \left[\sigma_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \right\} dA \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_x = \int_A [\sigma_{xz} y - \sigma_{xy} z] dA = \mathbf{T}_{sv} + \mathbf{T}_w \quad (8)$$

$$\mathbf{Q}_1(x,t) = \int_A \bar{X}_x \frac{1}{F} dA, \mathbf{Q}_2(x,t) = \int_A \bar{X}_y \frac{1}{F} dA, \mathbf{Q}_3(x,t) = - \int_A \bar{X}_x \frac{y}{F} dA \quad (9)$$

$$\mathbf{Q}_4(x,t) = \int_A \bar{X}_z \frac{1}{F} dA, \mathbf{Q}_5(x,t) = - \int_A \bar{X}_x \frac{z}{F} dA, \mathbf{Q}_7(x,t) = - \int_A \bar{X}_x \frac{\omega}{F} dA \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}_6(x,t) = \int_A (\bar{X}_z y - \bar{X}_y z) \frac{1}{F} dA \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_1 = \left(\mathbf{J}_{11}^\rho + \frac{2\mathbf{J}_{13}^\rho}{R} + \frac{\mathbf{J}_{33}^\rho}{R^2} \right) \ddot{u}_{xc} - \left(\mathbf{J}_{13}^\rho + \frac{\mathbf{J}_{33}^\rho}{R} \right) \ddot{\theta}_z - \left(\mathbf{J}_{12}^\rho - \frac{\mathbf{J}_{14}^\rho}{R} + \frac{\mathbf{J}_{23}^\rho}{R} - \frac{\mathbf{J}_{34}^\rho}{R^2} \right) \ddot{\theta}_y - \left(\mathbf{J}_{14}^\rho + \frac{\mathbf{J}_{34}^\rho}{R} \right) \ddot{\theta}_x \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{J}_{11}^\rho \ddot{u}_{yc} - \mathbf{J}_{12}^\rho \ddot{\phi}_x \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_3 = - \left(\mathbf{J}_{13}^\rho + \frac{\mathbf{J}_{33}^\rho}{R} \right) \ddot{u}_{xc} + \mathbf{J}_{33}^\rho \ddot{\theta}_z + \left(\mathbf{J}_{23}^\rho - \frac{\mathbf{J}_{34}^\rho}{R} \right) \ddot{\theta}_y + \mathbf{J}_{37}^\rho \ddot{\theta}_x \quad (14)$$

$$\mathbf{M}_4 = \mathbf{J}_{11}^\rho \ddot{u}_{zc} + \mathbf{J}_{13}^\rho \ddot{\phi}_x \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_5 = - \left(\mathbf{J}_{12}^\rho - \frac{\mathbf{J}_{14}^\rho}{R} + \frac{\mathbf{J}_{23}^\rho}{R} - \frac{\mathbf{J}_{34}^\rho}{R^2} \right) \ddot{u}_{xc} + \left(\mathbf{J}_{23}^\rho + \frac{\mathbf{J}_{34}^\rho}{R} \right) \ddot{\theta}_z + \left(\mathbf{J}_{22}^\rho - \frac{2\mathbf{J}_{24}^\rho}{R} + \frac{\mathbf{J}_{44}^\rho}{R^2} \right) \ddot{\theta}_y + \left(\mathbf{J}_{24}^\rho - \frac{\mathbf{J}_{44}^\rho}{R} \right) \ddot{\theta}_x \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_6 = -\mathbf{J}_{12}^\rho \ddot{u}_{yc} + \mathbf{J}_{13}^\rho \ddot{u}_{zc} + (\mathbf{J}_{22}^\rho + \mathbf{J}_{33}^\rho) \ddot{\phi}_x \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_7 = - \left(\mathbf{J}_{14}^\rho + \frac{\mathbf{J}_{34}^\rho}{R} \right) \ddot{u}_{xc} + \left(\mathbf{J}_{22}^\rho - \frac{2\mathbf{J}_{24}^\rho}{R} + \frac{\mathbf{J}_{44}^\rho}{R^2} \right) \ddot{\theta}_z + \left(\mathbf{J}_{24}^\rho - \frac{\mathbf{J}_{44}^\rho}{R} \right) \ddot{\theta}_y + \mathbf{J}_{44}^\rho \ddot{\theta}_x \quad (18)$$

$$\mathbf{D}_1 = \left(\mathbf{J}_{11}^\mu + \frac{2\mathbf{J}_{13}^\mu}{R} + \frac{\mathbf{J}_{33}^\mu}{R^2} \right) \ddot{u}_{xc} - \left(\mathbf{J}_{13}^\mu + \frac{\mathbf{J}_{33}^\mu}{R} \right) \ddot{\theta}_z - \left(\mathbf{J}_{12}^\mu - \frac{\mathbf{J}_{14}^\mu}{R} + \frac{\mathbf{J}_{23}^\mu}{R} - \frac{\mathbf{J}_{34}^\mu}{R^2} \right) \ddot{\theta}_y - \left(\mathbf{J}_{14}^\mu + \frac{\mathbf{J}_{34}^\mu}{R} \right) \ddot{\theta}_x \quad (19)$$

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{J}_{11}^\mu \ddot{u}_{yc} - \mathbf{J}_{12}^\mu \ddot{\phi}_x \quad (20)$$

$$\mathbf{D}_3 = - \left(\mathbf{J}_{13}^\mu + \frac{\mathbf{J}_{33}^\mu}{R} \right) \ddot{u}_{xc} + \mathbf{J}_{33}^\mu \ddot{\theta}_z + \left(\mathbf{J}_{23}^\mu - \frac{\mathbf{J}_{34}^\mu}{R} \right) \ddot{\theta}_y + \mathbf{J}_{37}^\mu \ddot{\theta}_x \quad (21)$$

$$\mathbf{D}_4 = \mathbf{J}_{11}^\mu \ddot{u}_{zc} + \mathbf{J}_{13}^\mu \ddot{\phi}_x \quad (22)$$

$$\mathbf{D}_5 = - \left(\mathbf{J}_{12}^\mu - \frac{\mathbf{J}_{14}^\mu}{R} + \frac{\mathbf{J}_{23}^\mu}{R} - \frac{\mathbf{J}_{34}^\mu}{R^2} \right) \ddot{u}_{xc} + \left(\mathbf{J}_{23}^\mu + \frac{\mathbf{J}_{34}^\mu}{R} \right) \ddot{\theta}_z + \left(\mathbf{J}_{22}^\mu - \frac{2\mathbf{J}_{24}^\mu}{R} + \frac{\mathbf{J}_{44}^\mu}{R^2} \right) \ddot{\theta}_y + \left(\mathbf{J}_{24}^\mu - \frac{\mathbf{J}_{44}^\mu}{R} \right) \ddot{\theta}_x \quad (23)$$

$$\mathbf{D}_6 = -\mathbf{J}_{12}^\mu \ddot{u}_{yc} + \mathbf{J}_{13}^\mu \ddot{u}_{zc} + (\mathbf{J}_{22}^\mu + \mathbf{J}_{33}^\mu) \ddot{\phi}_x \quad (24)$$

$$\mathbf{D}_7 = - \left(\mathbf{J}_{14}^\mu + \frac{\mathbf{J}_{34}^\mu}{R} \right) \ddot{u}_{xc} + \left(\mathbf{J}_{22}^\mu - \frac{2\mathbf{J}_{24}^\mu}{R} + \frac{\mathbf{J}_{44}^\mu}{R^2} \right) \ddot{\theta}_z + \left(\mathbf{J}_{24}^\mu - \frac{\mathbf{J}_{44}^\mu}{R} \right) \ddot{\theta}_y + \mathbf{J}_{44}^\mu \ddot{\theta}_x \quad (25)$$

donde las constantes \mathbf{J}_{ij}^ρ y \mathbf{J}_{ij}^μ se definen de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\left\{ \mathbf{J}_{ij}^\rho, \mathbf{J}_{ij}^\mu \right\} = \int_A \left\{ \rho, \mu \right\} \bar{g}_i^{(a)} \bar{g}_j^{(a)} \frac{1}{F} dA \quad \text{con} \quad \bar{g}^{(a)} = \left\{ 1, Z + n \frac{dY}{ds}, Y - n \frac{dZ}{ds}, \omega_p + n l(s) \right\} \quad (26)$$

Siendo ρ y μ la densidad y la constante de amortiguamiento, respectivamente y F dada por:

$$F = \frac{R}{R+y} \quad (27)$$

En las expresiones (6)-(8) se definen las resultantes de tensión en el área que identifican a los esfuerzos representativos de una viga, estos son Esfuerzo Normal, Q_x ; Momentos Flectores, M_Y y M_Z ; Bimomento, B ; Esfuerzos de Corte, Q_Y y Q_Z ; Momento de Torsión Pura, T_{SV} ; Momento Flexotorsor, T_W y momento torsor total M_X .

Las expresiones (9)-(11) representan las componentes de carga externa, definidas en función de cargas volumétricas \bar{X}_x , \bar{X}_y y \bar{X}_z . Mientras que las expresiones (12)-(25) representan las funciones de inercia y de amortiguamiento estructural del cuerpo curvo asociadas a fuerzas de inercia y de amortiguamiento.

En (2), las ε_{Di} representan deformaciones generalizadas, las cuales vienen descriptas en función de los desplazamientos generalizadas mediante las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{D1} = \left(\frac{\partial u_{xc}}{\partial x} + \frac{u_{yc}}{R} \right), \quad \varepsilon_{D2} = \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\phi_x}{R} \right) \quad (28 a)$$

$$\varepsilon_{D3} = \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_{xc}}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{D4} = \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (28 b)$$

$$\varepsilon_{D5} = \left(\frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \theta_z \right), \quad \varepsilon_{D6} = \left(\frac{\partial u_{zc}}{\partial x} - \theta_y \right) \quad (28 c)$$

$$\varepsilon_{D7} = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x \right), \quad \varepsilon_{D8} = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\theta_y}{R} \right) \quad (28 d)$$

En (28), ε_{D1} significa la deformación axial, ε_{D2} y ε_{D3} significan las deformaciones flexionales, ε_{D4} es la deformación por alabeo, ε_{D5} y ε_{D6} son las deformaciones por corte flexional, ε_{D7} es la deformación por corte torsional y ε_{D8} es la deformación por corte puro o de Saint Venant. En tanto que u_{xc} , u_{yc} y u_{zc} representan desplazamientos del centro seccional en las direcciones X , Y y Z respectivamente; ϕ_x , θ_y y θ_z representan las rotaciones en las direcciones X , Y y Z respectivamente; en tanto que θ_x es una magnitud que pondera el alabeo seccional a lo largo de la estructura de la viga.

4 DESCRIPCIÓN CONSTITUTIVA

El modelo descrito someramente en el Apartado 3, se completa con la formulación constitutiva que se sustenta en imponer las siguientes restricciones:

$$N_{ss} = N_{sn} = M_{ss} = 0 \quad (29)$$

Luego, con las condiciones (29), las relaciones constitutivas básicas se pueden escribir en términos de las resultantes de tensión en el espesor N_{xx} , N_{xs} , N_{xn} , M_{xx} y M_{xs} como función de las deformaciones de placas, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{xx} \\ \mathbf{N}_{xs} \\ \mathbf{N}_{xn} \\ \mathbf{M}_{xx} \\ \mathbf{M}_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{16} & 0 & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{16} \\ \bar{A}_{16} & \bar{A}_{66} & 0 & \bar{B}_{16} & \bar{B}_{66} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{16} & 0 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{16} \\ \bar{B}_{16} & \bar{B}_{66} & 0 & \bar{D}_{16} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_{xn} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

siendo

$$\varepsilon_{xx} = [\varepsilon_{D1} - Y(s)\varepsilon_{D3} - Z(s)\varepsilon_{D2} - \omega_P(s)\varepsilon_{D4}] F, \kappa_{xx} = \left[\frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D2} - l(s)\varepsilon_{D4} \right] F \quad (31)$$

$$\gamma_{xs} = \left[\frac{dY}{ds} \varepsilon_{D5} + \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D6} + [r(s) + \psi(s)]\varepsilon_{D7} + \psi(s)\varepsilon_{D8} \right] F, \kappa_{xs} = [-2\varepsilon_{D8} + \varepsilon_{D7}] F \quad (32)$$

$$\gamma_{xn} = \left[-\frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D5} + \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D6} + l(s)\varepsilon_{D7} \right] F \quad (33)$$

Las deformaciones descritas en el sistema de referencia de la membrana y las funciones ω_P , $r(s)$, $l(s)$ y $\psi(s)$ son funciones que permiten definir el alabeo seccional^[6].

De forma que teniendo en cuenta (30) y considerando (31) a (33), la expresión general de las ecuaciones constitutivas de los esfuerzos en función de las deformaciones generalizadas queda con la siguiente forma:

$$\{\mathbf{Q}^E\} = [\mathbf{J}_E] \{\Delta\} \quad (34)$$

Donde $\{\mathbf{Q}^E\}$ es el vector de esfuerzos generalizados de viga, $\{\Delta\}$ es el vector de deformaciones generalizadas y $[\mathbf{J}_E]$ es la matriz constitutiva de los esfuerzos. Los cuales se describen a continuación:

$$\{\mathbf{Q}^E\} = \{\mathbf{Q}_X \quad \mathbf{M}_Y \quad \mathbf{M}_Z \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{Q}_Y \quad \mathbf{Q}_Z \quad \mathbf{T}_W \quad \mathbf{T}_{sv}\}^T \quad (35)$$

$$\{\Delta\} = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T \quad (36)$$

$$[\mathbf{J}_E] = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^{11} & \mathbf{J}_{12}^{11} & \mathbf{J}_{13}^{11} & \mathbf{J}_{14}^{11} & \mathbf{J}_{15}^{16} & \mathbf{J}_{16}^{16} & \mathbf{J}_{17}^{16} & \mathbf{J}_{18}^{16} \\ & \mathbf{J}_{22}^{11} & \mathbf{J}_{23}^{11} & \mathbf{J}_{24}^{11} & \mathbf{J}_{25}^{16} & \mathbf{J}_{26}^{16} & \mathbf{J}_{27}^{16} & \mathbf{J}_{28}^{16} \\ & & \mathbf{J}_{33}^{11} & \mathbf{J}_{34}^{11} & \mathbf{J}_{35}^{16} & \mathbf{J}_{36}^{16} & \mathbf{J}_{37}^{16} & \mathbf{J}_{38}^{16} \\ & & & \mathbf{J}_{44}^{11} & \mathbf{J}_{45}^{16} & \mathbf{J}_{46}^{16} & \mathbf{J}_{47}^{16} & \mathbf{J}_{48}^{16} \\ & & & & \mathbf{J}_{55}^{66} & \mathbf{J}_{56}^{66} & \mathbf{J}_{57}^{66} & \mathbf{J}_{58}^{66} \\ & & & & & \mathbf{J}_{66}^{66} & \mathbf{J}_{67}^{66} & \mathbf{J}_{68}^{66} \\ & & & sim & & & \mathbf{J}_{77}^{66} & \mathbf{J}_{78}^{66} \\ & & & & & & & \mathbf{J}_{88}^{66} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Los elementos de la matriz constitutiva (37) de los esfuerzos se obtienen con la expresión:

$$\mathbf{J}_{ij}^{kh} = \int_S \bar{A}_{kh} (\bar{g}_i^{(b)} \bar{g}_j^{(b)}) F ds + \int_S \bar{B}_{kh} (\bar{g}_i^{(b)} \bar{g}_j^{(d)} + \bar{g}_i^{(d)} \bar{g}_j^{(b)}) F ds + \int_S \bar{A}_{55}^{(H)} (\bar{g}_i^{(c)} \bar{g}_j^{(c)}) F ds + \int_S \bar{D}_{kh} (\bar{g}_i^{(d)} \bar{g}_j^{(d)}) F ds \quad (38)$$

para $\{i, j\} = \{1, \dots, 8\}$ y $\{h, k\} = \{1, 6\}$ y con los vectores:

$$\bar{g}^{(b)} = \left\{ 1, Z(s), Y(s), \omega_p(s), \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r(s) - \psi(s), \psi(s) \right\} \quad (39)$$

$$\bar{g}^{(c)} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{dZ}{ds}, -\frac{dY}{ds}, -l(s), 0 \right\}, \quad \bar{g}^{(d)} = \left\{ 0, \frac{dY}{ds}, -\frac{dZ}{ds}, l(s), 0, 0, 1, -2 \right\} \quad (40)$$

5 FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

Para efectuar el estudio paramétrico del problema, se emplea un elemento finito de eje curvo desarrollado previamente por los autores^[7] para el análisis estático de vigas curvas de materiales compuestos. El elemento finito consta de siete grados de libertad en cada uno de sus dos nodos. Los desplazamientos son descritos en la siguiente forma matricial^[6,7]:

$$\{\mathbf{U}\} = [\mathbf{F}] \{\mathbf{U}^{(e)}\} \quad (41)$$

siendo

$$\{\mathbf{U}\} = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7\}^T = \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x\}^T \quad (42 a)$$

$$\{\mathbf{U}^{(e)}\} = \{\{\mathbf{U}^{(e)}_{(1)}\}, \{\mathbf{U}^{(e)}_{(2)}\}\} \quad (42 b)$$

y las componentes de $[\mathbf{F}]$ dadas por:

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_1] &= [\mathbf{f}_{11}(\bar{x}) \mathbf{f}_{12}(\bar{x}) \mathbf{f}_{13}(\bar{x}) 0 0 0 0 \mathbf{f}_{14}(\bar{x}) \mathbf{f}_{15}(\bar{x}) \mathbf{f}_{16}(\bar{x}) 0 0 0 0] \\ [\mathbf{F}_2] &= [0 \mathbf{f}_{22}(\bar{x}) \mathbf{f}_{23}(\bar{x}) 0 0 0 0 0 \mathbf{f}_{25}(\bar{x}) \mathbf{f}_{26}(\bar{x}) 0 0 0 0] \\ [\mathbf{F}_3] &= [0 \mathbf{f}_{32}(\bar{x}) \mathbf{f}_{33}(\bar{x}) 0 0 0 0 0 \mathbf{f}_{35}(\bar{x}) \mathbf{f}_{36}(\bar{x}) 0 0 0 0] \\ [\mathbf{F}_4] &= [0 0 0 \mathbf{f}_{41}(\bar{x}) \mathbf{f}_{42}(\bar{x}) \mathbf{f}_{43}(\bar{x}) 0 0 0 0 \mathbf{f}_{45}(\bar{x}) \mathbf{f}_{46}(\bar{x}) \mathbf{f}_{47}(\bar{x}) 0] \\ [\mathbf{F}_5] &= [0 0 0 0 \mathbf{f}_{52}(\bar{x}) \mathbf{f}_{53}(\bar{x}) 0 0 0 0 0 \mathbf{f}_{56}(\bar{x}) \mathbf{f}_{57}(\bar{x}) 0] \\ [\mathbf{F}_6] &= [0 0 0 0 \mathbf{f}_{62}(\bar{x}) \mathbf{f}_{63}(\bar{x}) 0 0 0 0 0 \mathbf{f}_{66}(\bar{x}) \mathbf{f}_{67}(\bar{x}) 0] \\ [\mathbf{F}_7] &= [0 0 0 0 \mathbf{f}_{72}(\bar{x}) \mathbf{f}_{73}(\bar{x}) \mathbf{f}_{74}(\bar{x}) 0 0 0 0 \mathbf{f}_{76}(\bar{x}) \mathbf{f}_{77}(\bar{x}) \mathbf{f}_{78}(\bar{x})] \end{aligned} \quad (43)$$

donde las funciones de forma f_{ij} se muestran a continuación:

$$\mathbf{f}_{11}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{41}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{74}(\bar{x}) = 1 - \bar{x}, \quad \mathbf{f}_{14}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{45}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{78}(\bar{x}) = \bar{x} \quad (44 a)$$

$$\mathbf{f}_{12}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{53}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{66}(\bar{x}) = -\mathbf{f}_{15}(\bar{x}) = -\mathbf{f}_{57}(\bar{x}) = -\mathbf{f}_{62}(\bar{x}) = \frac{\bar{x}(1-\bar{x})\eta}{3} (\bar{x}^2 \eta^2 - \bar{x} \eta^2 - 3) \quad (44 b)$$

$$\mathbf{f}_{26}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{46}(\bar{x}) = -\mathbf{f}_{23}(\bar{x}) = -\mathbf{f}_{42}(\bar{x}) = \frac{R\bar{x}(1-\bar{x})\eta}{3} (\bar{x}^2 \eta^2 - \bar{x} \eta^2 - 3) \quad (44 c)$$

$$\mathbf{f}_{13}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{43}(\bar{x}) = -\mathbf{f}_{16}(\bar{x}) = -\mathbf{f}_{47}(\bar{x}) = \frac{R\eta^2}{3}(-3\bar{x}^2 + \bar{x} + 2\bar{x}^3) \quad (44 \text{ d})$$

$$\mathbf{f}_{22}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{33}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{52}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{63}(\bar{x}) = (1 - \bar{x}) + \frac{\eta^2}{3}(-3\bar{x}^2 + \bar{x} + 2\bar{x}^3) \quad (44 \text{ e})$$

$$\mathbf{f}_{25}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{36}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{56}(\bar{x}) = \mathbf{f}_{67}(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{\eta^2}{3}(-3\bar{x}^2 + \bar{x} + 2\bar{x}^3) \quad (44 \text{ f})$$

$$\mathbf{f}_{72}(\bar{x}) = -\mathbf{f}_{76}(\bar{x}) = \frac{\bar{x}\eta^2}{3R}(1 - 3\bar{x} + 2\bar{x}^2), \quad \mathbf{f}_{73}(\bar{x}) = -\mathbf{f}_{77}(\bar{x}) = \frac{\bar{x}\eta(1 - \bar{x})}{3R}(\bar{x}^2\eta^2 - \bar{x}\eta^2 - 3) \quad (44 \text{ g})$$

donde

$$\bar{x} = \frac{x}{L_e} \quad \text{con } \bar{x} \in [0, 1], \quad \eta = \frac{L_e}{2R} \quad (45)$$

Siendo L_e y R la longitud del elemento y el radio de la viga curva respectivamente.

Ahora bien, introduciendo (43) en (41) y luego en las expresiones (1) a (5), operando en la forma convencional, se obtiene la clásica ecuación general del método de elementos finitos:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{W}\} + [\mathbf{D}]\{\dot{\mathbf{W}}\} + [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{W}}\} = \{\mathbf{P}\} \quad (46)$$

donde $[\mathbf{K}]$, $[\mathbf{K}_G]$, $[\mathbf{D}]$ y $[\mathbf{M}]$ son la matriz de rigidez global, la matriz de rigidez geométrica global, la matriz de amortiguamiento global y la matriz de masa global, respectivamente. En tanto que, $\{\mathbf{W}\}$, $\{\dot{\mathbf{W}}\}$, $\{\ddot{\mathbf{W}}\}$ y $\{\mathbf{P}\}$ son el vector global de desplazamientos nodales, el vector global de velocidades nodales, el vector global de aceleraciones nodales y el vector global de cargas nodales.

Para el cálculo de las matrices de rigidez se ha empleado técnicas de integración reducida selectiva^[8] para evitar problemas de bloqueo por corte.

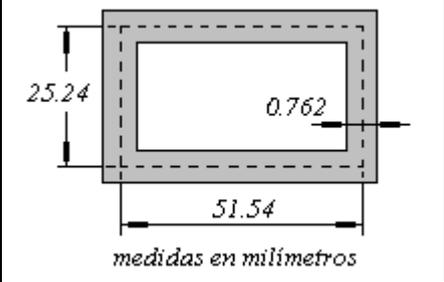
6 ESTUDIOS PARAMETRICOS

En este apartado se efectúan algunas aplicaciones del modelo matemático, con el objetivo de obtener factores de magnificación dinámica para el análisis de las vigas curvas flexibles por corte bajo cargas móviles. Para ello se emplea en el método de elementos finitos, una rutina típica del método de Newmark. El algoritmo es implementado sobre la plataforma de *Mathematica* considerando el elemento del apartado anterior, donde son empleados multiplicadores delta de Kronecker^[9] para obtener el vector de cargas nodales equivalentes durante el período de estudio. Para efectuar los cálculos bajo cargas móviles es necesario efectuar un estudio de vibraciones libres para establecer el período fundamental de la viga, que se representará con $T_T = 1/f_1$, siendo f_1 la frecuencia fundamental. El período fundamental se emplea para obtener la velocidad crítica V_{CR} de la carga, que se supondrá constante a lo largo de la viga curva.

Ahora bien, se analiza el comportamiento de una viga curva de perfil rectangular construida con AS4/3501-6 (ver Tabla 1) de laminación cross-ply $\{0/90\}_6$ en cada segmento. La longitud y el radio de la viga curva son $L=R=762 \text{ mm}$. y sus dimensiones seccionales son

$\{h, b, e\} = \{25.24, 51.54, 0.762\}$ mm.. La carga móvil es $Q_Z = 1000$ N (ver Figura 3) y se la supone en un rango de velocidades entre $1/8$ y 2 veces de la velocidad crítica. Para poder comparar las respuestas se define T_T como el tiempo empleado por una carga moviéndose a un velocidad determinada, en transitar el tramo de la viga.

Tabla 1: Datos geométricos y de laminación.

	<p style="text-align: center;"><u>AS4/3501-6</u></p> <p style="text-align: center;">$E_{11} = 141.96$ Gpa, $E_{22} = E_{33} = 9.79$ Gpa $G_{12} = G_{13} = 6.00$ Gpa, $G_{23} = 4.83$ Gpa $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.24$, $\nu_{23} = 0.5$</p> <p style="text-align: center;"><u>Secuencias de Laminación</u> $[0/90/0/90/0/90]$</p>
---	--

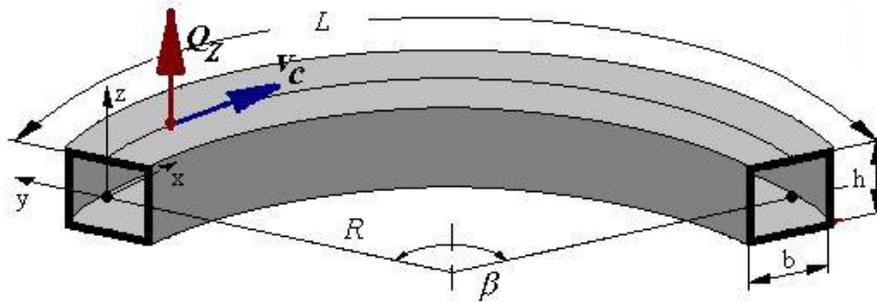


Figura 3. Viga curva simplemente apoyada sometida a carga Q_Z móvil.

Tabla 2: Condiciones de Borde .

<p style="text-align: center;"><u>Para caso simplemente apoyado</u></p> $u_{zc} = u_{yc} = \phi_x = B = M_Z = M_Y = Q_X = 0 \quad \text{en } x = 0, L$ <p style="text-align: center;"><u>Para caso biempotrado</u></p> $u_{zc} = u_{yc} = \phi_x = u_{xc} = \theta_Z = \theta_Y = \theta_X = 0 \quad \text{en } x = 0, L$

En la Figura 4 se muestra la evolución del desplazamiento del centro de la viga, para diferentes velocidades de translación, con una condición de borde *simplemente apoyada en cada extremo*. La definición de las condiciones de borde se puede seguir de la Tabla 2. En la Figura 5 se puede observar la variación con la relación de velocidades de los factores de magnificación dinámicos para un modelo flexible por corte y otro no flexible por corte, los cuales se definen de acuerdo con la expresión (47).

$$A_{DIN} = \frac{u_{zc}(L/2)|_{Dinámico}}{u_{zc}(L/2)|_{Estático}} \quad (47)$$

En la Figura 5, se pueden apreciar dos zonas definidas como subcrítica y postcrítica. En la primera A_{DIN} crece con la relación de velocidades hasta llegar a la velocidad crítica, luego en la zona postcrítica, el factor A_{DIN} comienza a decrecer mas allá de un valor 1.25 en la relación de velocidades. Nótese que A_{DIN} del modelo con corte es ligeramente inferior que el del modelo no flexible por corte.

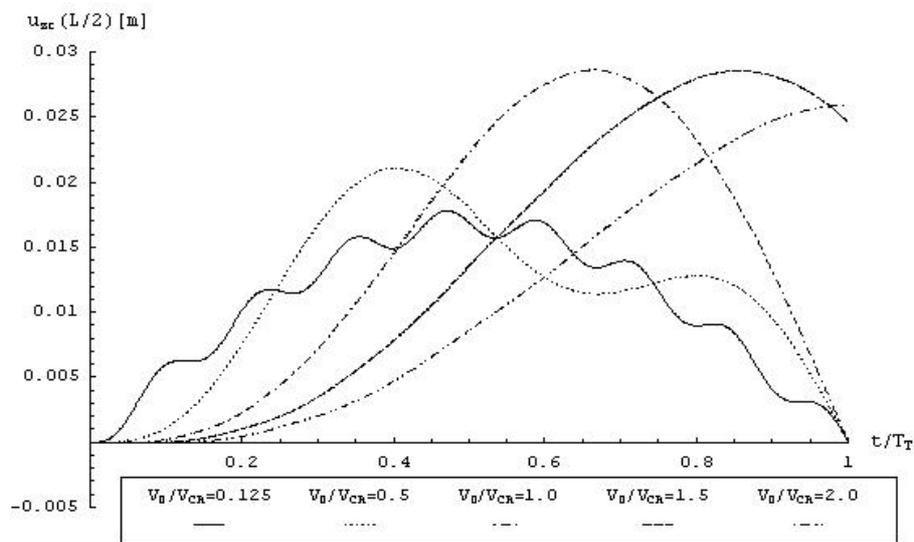


Figura 4. Evolución del desplazamiento en el centro de la viga simplemente apoyada.

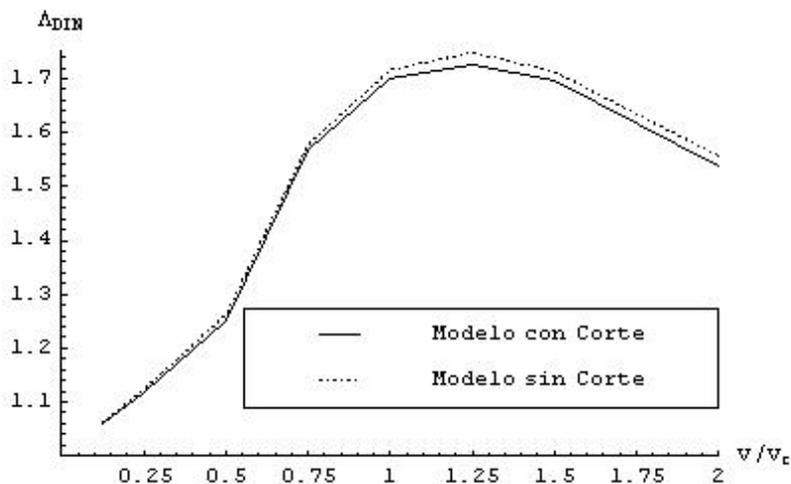


Figura 5. Factores de magnificación dinámicos.

En la Figura 6 se puede apreciar el efecto del amortiguamiento estructural en la variación del desplazamiento del punto central respecto de la variable de tiempo adimensional en un arco flexible por corte como el descrito en Figura 3, pero empotrado en ambos extremos y con laminación CUS de $\{0/45\}_3$.

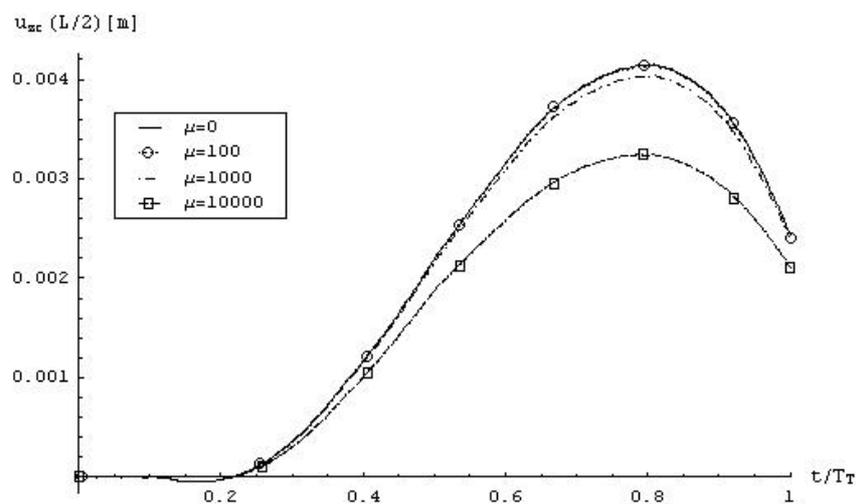


Figura 6. Efecto del amortiguamiento estructural en un arco biempotrado.

Se puede observar que en la medida que aumenta el parámetro de amortiguamiento μ , se reduce la amplitud del desplazamiento absoluto del centro de la viga. Por otro lado, un incremento de 100 veces en el parámetro de amortiguamiento produce una reducción del 25% en el desplazamiento máximo.

7 CONCLUSIONES

En este artículo se ha efectuado un análisis del comportamiento de vigas curvas de materiales compuestos ante cargas móviles. Se ha efectuado una extensión a un modelo previamente desarrollado por los autores, para contemplar adicionalmente el amortiguamiento estructural de tipo Rayleigh. Se han efectuado estudios paramétricos donde se ha podido observar el incremento de los factores de magnificación dinámicos en la medida que aumenta la velocidad de translación de la carga a lo largo de la viga curva en relación con la velocidad crítica de translación de la misma. Se ha observado que los factores de magnificación dinámica son menores en el caso de un modelo flexible por corte en comparación con el homónimo modelo no flexible por corte. Se han efectuado estudios paramétricos para analizar el efecto del amortiguamiento estructural en la dinámica de vigas curvas de materiales compuestos, hallándose que es necesario un incremento muy grande en los parámetros de amortiguamiento para reducir los desplazamientos flexionales. Se ha observado también que los desplazamientos verticales tienen valores máximos cuando la carga móvil se desplaza a

125 % del valor de la velocidad crítica para una configuración geométrica y de laminación.

8 REFERENCIAS

- [1] Y.B. Yang, C.M. Wu and J.M. Yau, "Dynamic Response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads", *Journal of Sound and Vibration* 242(3) 519-537 (2001).
- [2] R.T. Wang and Y.L. Sang, "Out-of Plane vibration of multispan curved beam due to moving loads", *Structural Engineering and Mechanics*, 7(4) 361-375 (1999).
- [3] M.T. Piovan and V.H. Cortínez, "Vibration studies of composite thin-walled curved box-beam using structural tailoring". *Journal of Sound and Vibration* 256(5) 989-995 (2002).
- [4] M.T. Piovan y V.H. Cortínez, "Mecánica de vigas curvas anisótropas de paredes delgadas considerando efectos de corte por flexión y por alabeo". *Mecánica Computacional Vol* 21, 1730-1749 (2002).
- [5] V.H. Cortínez, M. T. Piovan, R.E. Rossi, "Out of plane Vibrations of thin-walled curved beams considering shear flexibility", *Structural Engineering and Mechanics* 8(3), (1999).
- [6] M.T. Piovan, "*Estudio Teórico y computacional sobre la mecánica de vigas curvas de materiales compuestos, con sección de paredes delgadas, considerando efectos no convencionales*". Tesis Doctoral. Universidad Nacional del Sur (2002).
- [7] M.T. Piovan y V.H. Cortínez, "Mecánica de vigas curvas anisótropas con secciones de paredes delgadas". *Revista Internacional de Métodos Numéricos y Cálculo para Ingeniería*. Aceptada para su publicación. (2003).
- [8] E. Oñate. *El Cálculo de estructuras con Elementos Finitos*. Cimne. Barcelona (1992).
- [9] M.H. Kadivar y S.R. Mohebpour "Forced Vibration of unsymmetric Laminated Composite Beams under the action of moving Loads". *Composites Science and Technology* Vol.58(10) 1675-1684 (1998).