

DINÁMICA DE UNA ESTRUCTURA FLOTANTE AMARRADA: MODELADO DE LA NO LINEALIDAD MEDIANTE RECURRENCIAS ALGEBRAICAS

Marta B. Rosales^{1,2,3}, Carlos P. Filipich^{1,4} y Mario R. Escalante^{1,5}

¹ Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200
e-mail: mrosales@criba.edu.ar

² IMA, Universidad Nacional del Sur. –

³ CONICET

⁴ Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-0291-4555220 FAX: 0291 4555311

⁵ Facultad Regional Concepción del Uruguay, Universidad Tecnológica Nacional
Ing. Carlos Pereyra 676, E3264BTD Concepción del Uruguay, Argentina. Tel: 54-(03442)-425541
e-mail: escalam@frcu.utn.edu.ar

Palabras clave: estructuras flotantes amarradas, no linealidad, algoritmo recursivo

Resumen. *La dinámica de las estructuras flotantes amarradas está fuertemente influenciada por la no linealidad proveniente de los amarres. Éstos son cables o cadenas poco tensos que mantienen a la plataforma flotante en su posición. Ante una perturbación de la posición de equilibrio el cambio de geometría de dichos cables induce una elasticidad fuertemente no lineal. Usualmente se proponen modelos de forma tal de obtener una ecuación diferencial gobernante que surge de sucesivos truncados con lo que se llega a una ecuación del tipo Duffing. En este trabajo se analiza un modelo de plataforma en 2D con dos amarres. La plataforma tiene 2 grados de libertad h (vertical) y q (horizontal) de los cuales se prescribe el movimiento vertical como armónico. Se obtiene así un sistema de un grado de libertad (masa, resorte no lineal y amortiguador). Se utiliza el ampliamente conocido método de series de potencias para abordar la ecuación diferencial no lineal. A través de desarrollos algebraicos que involucran la inversión de series, se obtiene una expresión para el término no lineal sin truncado, mediante algoritmos de recurrencias. Se incluyen ejemplos numéricos y los resultados se muestran como trayectorias, diagramas de fase, mapas de Poincaré y espectro de potencia.*

1 INTRODUCCIÓN

Las Series de Potencias son ampliamente conocidas para abordar una gran variedad de problemas. En este trabajo son utilizadas tanto para el planteo de las ecuaciones gobernantes de una plataforma flotante amarrada mediante cadenas poco tensas, como para resolver la ecuación resultante.

La dinámica de estructuras flotantes del tipo estudiado en este trabajo ha sido estudiada por varios autores, por ejemplo, Esmailzadeh y Goodarzi¹, Sannasiraj *et al.*² Sarkar and Eatock Taylor³, Smith and MacFarlane⁴. En particular, los autores del primer trabajo mediante sucesivos truncados en las expansiones de Taylor obtuvieron una ecuación del tipo Duffing. En el presente trabajo, en cambio, la no linealidad es considerada a través de una expresión sin truncados.

Es un modelo simple de un oscilador no lineal con amortiguamiento. La no linealidad que proviene del cambio de geometría de los cables (catenarias) es planteada con la técnica de las Series de Potencias.

Usualmente la solución de este tipo de sistemas diferenciales se obtiene por medio de herramientas numéricas (esquemas de integración temporal, e.g. Runge-Kutta, Método de Newmark, diferencia central, ver por ejemplo Bathe⁵).

En este trabajo se utiliza el método de series de potencia en forma sistematizada. Anteriormente los autores resolvieron ecuaciones diferenciales fuertemente no lineales con esta metodología (Filipich and Rosales⁶, Filipich *et al.*⁷).

2 PLATAFORMA FLOTANTE AMARRADA: DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Es conocido que las estructuras flotantes amarradas, son importantes tanto en la industria petrolera y gasífera como guías para la navegación. Estas estructuras son conocidas generalmente como CALM (Catenary Anchor Leg Mooring). Los cables son estructuras que se adaptan a las cargas dado que, dentro de ciertos rangos, sufren un cambio en su geometría más que un cambio en su estado tensional. Esta característica introduce fuertes no linealidades en el sistema, sin considerar las propiedades elásticas y lineales del material y la linealidad de las cargas. El análisis tiene que ser capaz de manejar esta complejidad. Cuando el sistema es perturbado por acciones del mar, la respuesta del mismo puede sufrir cambios cualitativos en su comportamiento (bifurcaciones) bajo cambios en los parámetros involucrados.

En este trabajo se estudia un modelo de CALM constituido por un un oscilador masa-resorte no lineal-amortiguador con dos grados de libertad: (h) (heave, en inglés) y (q) (surge, en inglés). La acción horizontal de las olas del mar es simulada con una fuerza armónica. Se prescribe además, el movimiento vertical, por lo que se analiza un sistema de un grado de libertad. Aunque este es un modelo simplificado, se hace especial atención en la no linealidad que surge del cambio de la geometría de los cables. El método de las series de potencias permite modelar completamente tal no linealidad sin truncados. La ecuación diferencial no lineal, es entonces resuelta con también con la aplicación de series de potencia.

El algoritmo resultante se muestra con un ejemplo numérico en el que se varía la frecuencia de la fuerza perturbadora encontrándose cambios cualitativos en la respuesta dinámica.

Estudios futuros deberían incluir otros elementos del modelo físico con el objeto de lograr una mejor representación de la estructura, tal como las acciones hidrodinámicas sobre los cables. No obstante, la metodología propuesta aquí puede ser útil para determinar completamente la no linealidad proveniente de los amarres.

2.1. Planteo de la Ecuación diferencial gobernante

En la Figura 1, se describe el modelo de dos dimensiones, referido a un sistema de coordenadas fijo X - Y . Sus principales componentes son la plataforma y los amarres (cadenas, cables)

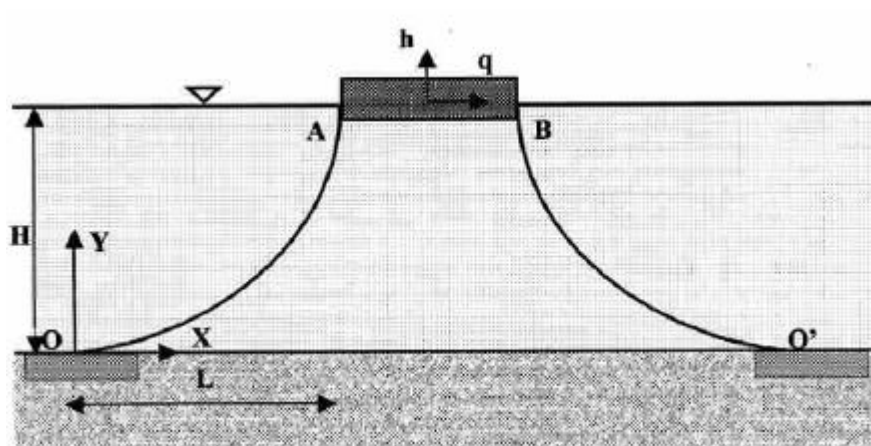


Figura 1: Configuración geométrica del modelo del sistema CALM de dos dimensiones

Los dos grados de libertad elegidos son los desplazamientos horizontal (surge, en inglés) y vertical (heave, en inglés) del centro de masa de la plataforma rígida, $q = q(t)$ y $h = h(t)$ respectivamente. Suponemos que la fluctuación del nivel del agua del mar h es gobernada por una función armónica, esto es, $h = h_0 \cos \omega t$. De este modo, la ecuación que gobierna el desplazamiento horizontal del sistema de un grado de libertad es:

$$m\ddot{q} + C_d \dot{q} + (T_{Ax}^l - T_{Bx}^r) = F(t) \quad (1)$$

donde m es la masa de la plataforma, C_d es el coeficiente de amortiguamiento, T_{Ax}^l y T_{Bx}^r son las componentes horizontal de la tensión en las cadenas en los puntos A (l : izquierdo) y B (r : derecho) respectivamente y $F(t)$ es una fuerza dinámica (por ejemplo, la perturbación horizontal debido a las olas). El punto denota derivadas con respecto al tiempo. Aunque la ecuación (1) parece a primera vista una ecuación diferencial simple, los términos entre paréntesis en el miembro izquierdo son fuertemente no lineales. Más aún, sus expresiones explícitas en términos de la variable h y q no son inmediatas. Por ejemplo, Esmailzadeh y Goodarzi¹ proponen varios truncados de las expansiones de

Taylor para llegar a una ecuación aproximada del tipo Duffing. En cambio, en este trabajo se propone un procedimiento para obtener una ecuación sin truncados.

Seguidamente se plantea el álgebra correspondiente al tratamiento del cambio de la geometría de los cables.

2.2. Catenarias de amarre

Inicialmente la geometría de las cadenas está gobernada por la siguiente relación no lineal:

$$Y = \mathbf{b}_0 \left[\cosh \left(\frac{X}{\mathbf{b}_0} \right) - 1 \right] \quad (2)$$

donde $\mathbf{b}_0 = T_0 / \mathbf{r}$, T_0 es la tensión en el punto de pendiente nula (O u O') del cable, y \mathbf{r} es su peso específico. Por simplicidad, suponemos que el cable se mantiene con la tangente horizontal en el punto de amarre. En particular, en el punto A,

$$H = \mathbf{b}_0 \left[\cosh \left(\frac{L}{\mathbf{b}_0} \right) - 1 \right] \quad (3)$$

en el tiempo inicial $t = t_0$. Después de algún tiempo t , el punto $A|_{t_0}$ (respectivamente. $B|_{t_0}$) se moverá a una nueva posición dada por:

$$H + h(t) = \mathbf{b}^{l,r} [\cosh \mathbf{q} - 1] \quad (4)$$

donde $\mathbf{b} = T_t / \mathbf{r}$ y T_t es la componente horizontal de la tensión en el cable de amarre en el instante t y $\mathbf{q}^{l,r} = [L \pm q(t)] / \mathbf{b}^{l,r}$ donde el signo más corresponde a la cadena izquierda y el signo menos a la derecha.

Puede demostrarse que las aceleraciones de las masas localizadas en el centro de gravedad de cada cable están dadas por:

$$\ddot{x}_c^{l,r} = \ddot{q} \mp \mathbf{b}^{l,r} \left(\frac{H+h}{l^*} \right) \mp 2\mathbf{b}^{l,r} \frac{\dot{h}}{l^*} \mp \mathbf{b}^{l,r} \left(\frac{\ddot{h}}{l^*} \right) \quad (5)$$

donde l^* es la longitud del cable. Introducimos ahora la variable temporal adimensionalizada $\mathbf{t} = t/T$ con T un intervalo de interés (elegido arbitrariamente). Denotemos las derivadas con respecto a \mathbf{t} con barra, o sea, $d(\bullet) / d\mathbf{t} = \overline{(\bullet)}$. Luego, la ecuación diferencial (1) queda:

$$m\overline{\overline{q}} + C_d T \overline{\overline{q}} + T^2 (T_{Ax}^l - T_{Bx}^r) = F(\mathbf{t}T)T \quad (6)$$

El término relativo a la tensión en las cadenas será:

$$(T_{Ax}^l - T_{Bx}^r) = \frac{m_c}{T^2} (\bar{x}_c^l + \bar{x}_c^r) \quad (7)$$

2.3. Expresión no truncada de la tensión en los cables

El objetivo es obtener una expresión completa y explícita del tipo $\mathbf{b} = \mathbf{b}(q, h)$. Aquí se elige una alternativa de modo tal de no tener que truncar las expresiones en la deducción de las ecuaciones gobernantes. Para lograrlo se plantean algunos pasos algebraicos. Como veremos, todas las variables involucradas serán expandidas en series de potencias de q y h . Brevemente, el objetivo se logra a través de la inversión de series dobles. Llamemos

$$\hat{f}(\mathbf{q}) \equiv \frac{H}{L} \left(\frac{1+h/H}{1 \pm q/L} \right) = \frac{H+h}{L \pm q} = \frac{\cosh \mathbf{q} - 1}{\mathbf{q}} \quad (8)$$

En adelante, los superíndices l y r en \mathbf{q} serán suprimidos y solamente se usarán cuando sea necesario. Como se sabe, la expansión en Serie de Taylor del coseno hiperbólico es

$$\hat{f}(\mathbf{q}) = \frac{\cosh \mathbf{q} - 1}{\mathbf{q}} = \sum_k \mathbf{g}_k \mathbf{q}^k \quad \text{with} \quad \mathbf{g}_k = \frac{1}{(k+1)!} \quad (k = 1, 3, 5, \dots) \quad (9)$$

Desarrollamos el término izquierdo de la ecuación (8) de la siguiente manera:

$$\frac{H}{L} \left(\frac{1+h/H}{1 \pm q/L} \right) = \sum_i \sum_j A_{ij}^{l,r} q^i h^j \quad (10)$$

donde los valores de los coeficientes de $A_{ij}^{l,r}$ son conocidos. Como se observa de la ecuación (9) es necesario expandir mediante serie de Taylor a la función \mathbf{q} ,

$$\mathbf{q}^k = \sum_i \sum_j T_{kij} q^i h^j \quad (11)$$

Ahora, si combinamos las ecuaciones (9) y (11) se obtiene

$$f(q, h) = \sum_{i_0} \sum_{j_0} F_{ij} q^i h^j \Rightarrow F_{ij} = \sum_{k=1,3,5,\dots} \mathbf{g}_k T_{kij} \quad (12)$$

donde $(\)_0$ indica que las series comienzan desde $(\) = 0$. De (8) y (10) se infiere que $F_{ij} = A_{ij}$. Evidentemente, $\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k \mathbf{q}$. Esta última ecuación permite encontrar una solución por medio de recurrencias algebraicas. Ahora, de la definición de producto de series

$$T_{(k+1)ij} = \sum_{n_0}^i \sum_{p_0}^j T_{knp} T_{1(i-n)(j-p)} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad ; \quad T_{0ij} = \mathbf{d}_{0i} \mathbf{d}_{0j} \quad (13)$$

donde los \mathbf{d}_{ij} son las delta de Kronecker. Los coeficientes T_{1ij} se pueden obtener como una recu-

rencia

$$T_{1ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=3,5,\dots} \mathbf{g}_k T_{kij}}{\mathbf{g}_1}; \quad \mathbf{g}_1 = \frac{1}{2}; \quad (T_{100} = 0) \quad (14)$$

y de este modo queda perfectamente determinado \mathbf{q} para cada valor de q y h (Ver ecuación (11)). Si además expandimos la función

$$\mathbf{b}^{l,r} = \sum_i \sum_j B_{ij}^{l,r} q^i h^j \quad (15)$$

donde los $B_{ij}^{l,r}$ son los coeficientes buscados y aún desconocidos hasta aquí. Luego, de la notación de la ecuación (4)

$$\mathbf{q}^{l,r} \mathbf{b}^{l,r} = L \pm q \quad (16)$$

la cual en término de las ecuaciones (11) y (15) queda

$$\left(\sum_i \sum_j T_{1ij}^{l,r} q^i h^j \right) \left(\sum_i \sum_j B_{ij}^{l,r} q^i h^j \right) = \sum_i \sum_j C_{ij}^{l,r} q^i h^j \quad (17)$$

con $C_{ij}^{l,r} = \mathbf{d}_{0i} \mathbf{d}_{0j} L \pm \mathbf{d}_{1i} \mathbf{d}_{0j}$. La expansión de la ecuación (17) es la manera de encontrar una relación de recurrencia para los coeficientes $B_{ij}^{l,r}$. El producto de series conduce a

$$C_{ij}^{l,r} = \sum_{k_0} \sum_{n_0} T_{1kn} B_{(i-k)(j-n)} \quad (18)$$

Después de reacomodar términos se obtienen las siguientes ecuaciones de recurrencias

$$\begin{aligned} B_{ij}^{l,r} &= \frac{C_{ij}^{l,r} - (S_{1ij} + S_{2ij} + S_{3ij})}{T_{100}}; & S_{1ij} &= \sum_{k_1}^i T_{1k_0} B_{(i-k)j} \\ S_{2ij} &= \sum_{s_1}^j T_{10s} B_{i(j-s)}; & S_{3ij} &= \sum_{k_1}^i \sum_{n_1}^j T_{1kn} B_{(i-k)(j-n)} \end{aligned} \quad (19)$$

donde k_1 indica $i=1$, etc. Finalmente, por medio de la ecuación (15), la función $\mathbf{b} = \mathbf{b}(q, h)$ (directamente proporcional a la tensión de la cadena) queda completamente definida. Conocidos los datos del problema \mathbf{b} queda completamente determinado para cualquier valor de q y h . Los pasos del algoritmo para encontrar los $B_{ij}^{l,r}$ se pueden resumir de la siguiente manera:

- Paso 1: Los coeficientes $A_{ij}^{l,r}$ son obtenidos de las expresiones (10).
- Paso 2: Las ecuaciones (14) y (13) permiten el cálculo de los T_{kij} .
- Paso 3: Los coeficientes $C_{ij}^{l,r}$ son determinados por medio de la ecuación (18).

El movimiento horizontal $q(t)$ para una frecuencia de la fuerza $\omega_f = 0.2$ rad/s se grafica en las Figuras 2 y 3, con los diagramas de fase y el espectro de potencia S (FFT) respectivamente. Además se muestra la trayectoria $q - h$ en la Figura 4.

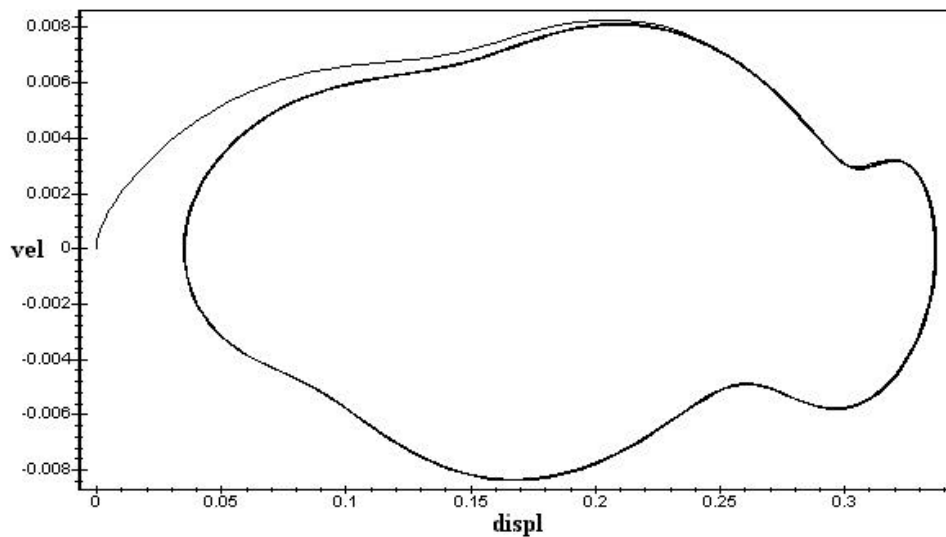


Figura 2. Diagrama de fase de la variable q . Tiempo del experimento: 5000 s. $\omega_f = 0.2$ rad/s.

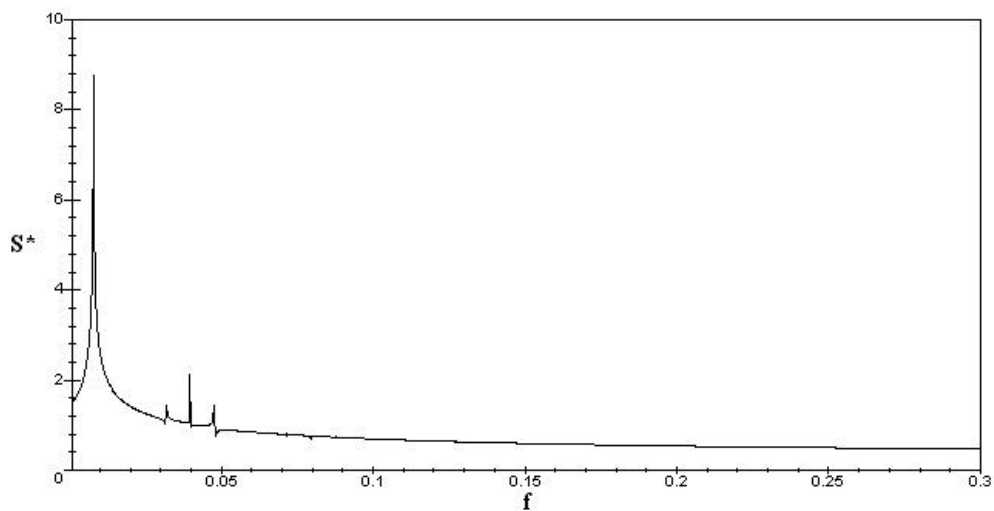


Figura 3. Espectro de potencia (FFT) de q . $S^* \propto \sqrt[5]{S}$. $\omega_f = 0.2$ rad/s.

De los resultados puede observarse que la señal de q se estabiliza, luego del transitorio, en un

movimiento periodo-1. En efecto, la sección de Poincaré (no mostrada aquí) es un único punto estacionario y el espectro de potencia (Figura 3) muestra un pico predominante en $f=0.004$ Hz. Hay también una pequeña cantidad de energía alrededor de $f=0.04$ Hz, que se encontró presente en todo el rango de frecuencias de la carga analizadas. Está relacionado con la frecuencia impuesta al movimiento vertical (i.e. $h(t) = 1.5 \cos 0.25 t$, $w = 0.25$ rad/s $\Rightarrow f \approx 0.04$ Hz).

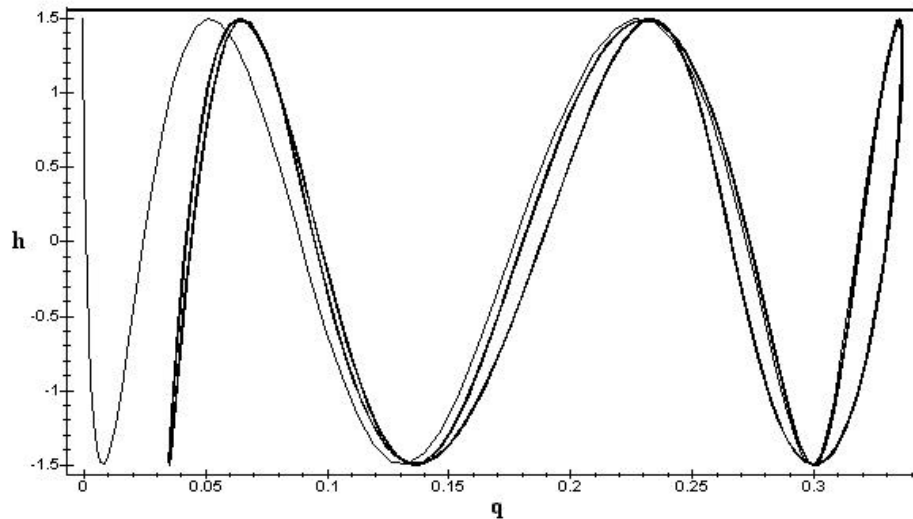


Figura 4. Trayectoria $q - h$ para los primeros 1000 s de movimiento. $w_f = 0.2$ rad/s.

Se puede observar un cambio cualitativo cuando la frecuencia de la fuerza perturbadora es $w_f = 0.3$ rad/s. La Figura 5 muestra el plano fase de q y la sección de Poincaré superpuesta. El último tiene tres puntos estacionarios indicando un movimiento periodico con periodo-3.

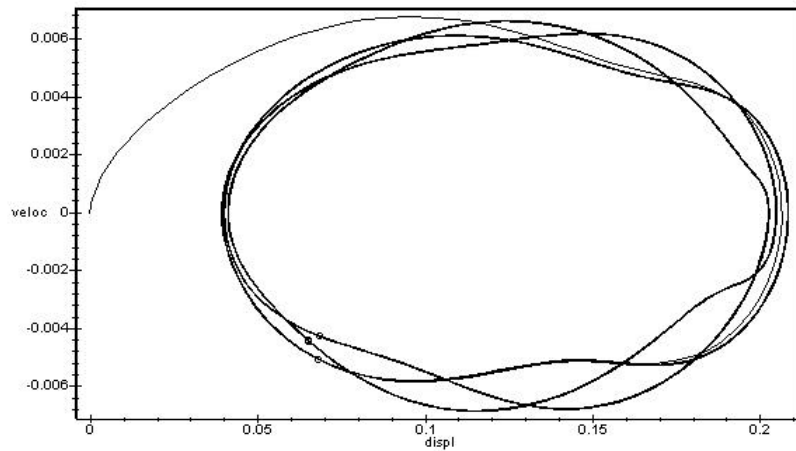


Figura 5: Plano fase y sección de Poincaré del movimiento horizontal q . Tiempo de experimentación: 5000s. $w_f = 0.3$ rad/s. Nota: Los puntos de Poincaré se muestran como pequeños círculos para una mejor observación.

Un comportamiento particular se encontró con $w_f = 1.344$ rad/s. Figuras 6 a 10 muestran la trayectoria, plano fase, sección de Poincaré y el espectro de Fourier del movimiento horizontal q . El experimento numérico fue llevado a cabo durante 5000 segundos aunque la trayectoria se muestra para el primer rango de 1000 s.

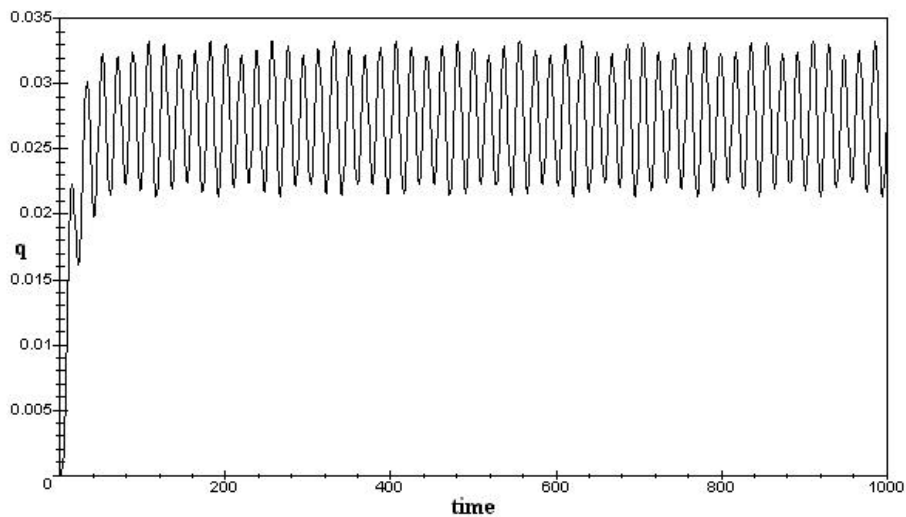


Figura 6: Trayectoria del movimiento horizontal. $w_f = 1.344$ rad/s

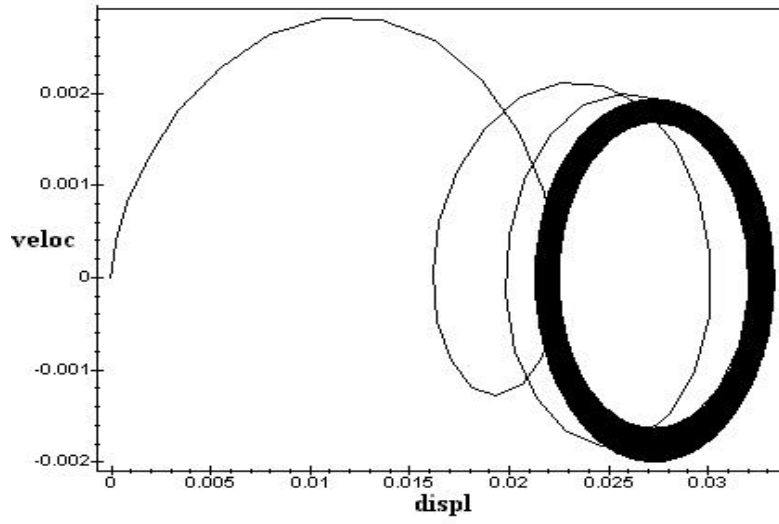


Figura 7: Diagrama de fasePhase. Intervalo de tiempo: 5000 s. $\omega_f = 1.344$ rad/s

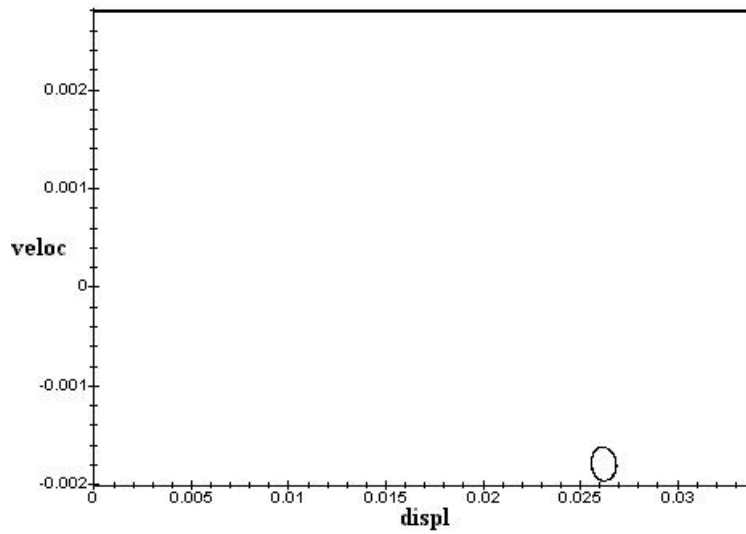


Figura 8. Sección de Poincaré. Tiempo de experimento: 5000 s. $\omega_f = 1.344$ rad/s

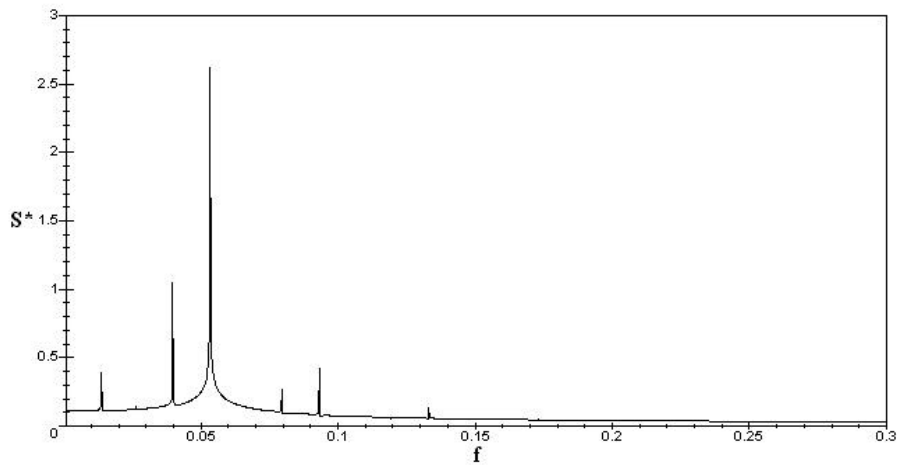


Figura 9: Espectro de Fourier. $S^* \equiv \sqrt[5]{S} \cdot \omega_f = 1.344$ rad/s.

Del análisis de los diagramas se puede concluir que se produce un movimiento cuasi-periódico cuando el parámetro estudiado ω_f es 1.344 rad/s. En efecto, se presenta una modulación en la trayectoria (Fig. 6), La sección de Poincaré resulta en una curva continua cerrada (Fig. 8) y en el espectro de Fourier se distinguen picos (Fig. 9) que no tienen relaciones racionales entre ellos. En la Fig. 10 se muestra la trayectoria $q-h$ en el tiempo t . Como se sabe, una característica de los movimiento cuasi-periódico es que la curva de la trayectoria llena un dominio cerrado, el cual se observa en la Fig. 10.

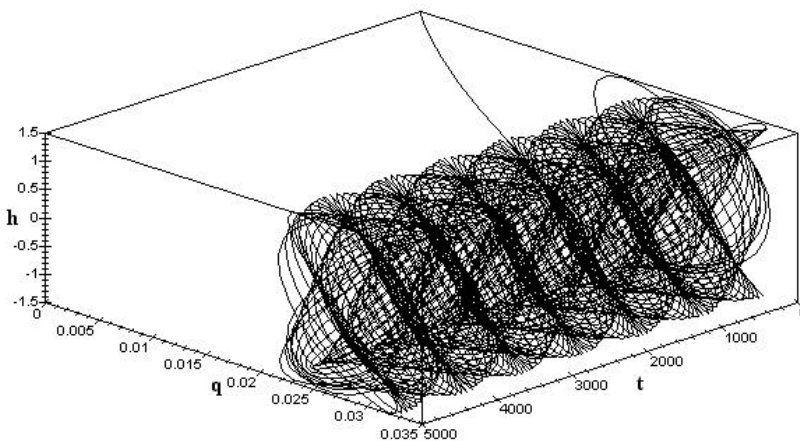


Figura 10: Trayectoria $q-h$. $\omega_f = 1.344$ rad/s

5 CONCLUSIONES

El muy conocido método de las series de potencias fue utilizado aquí con dos propósitos. El primero fue abordar los términos no lineales en un problema dinámico. El uso de las series de potencias en dos variables y su inversión resultó conveniente para obtener una ecuación diferencial sin truncados. El procedimiento fue ilustrado con el planteo de la ecuación diferencial gobernante de un modelo de plataforma flotante amarrada por medio de cables no tensos (CALM). Dicha estructura fue modelada como un modelo masa-resorte fuertemente no lineal-amortiguador. La no linealidad surge del cambio en la curva catenaria de los cables. Se asumió un desplazamiento vertical y una carga horizontal armónicos. Las ilustraciones numéricas fueron también resueltas utilizando series de potencia. Se eligió a w_f como parámetro de estudio. Se encontraron cambios cualitativos en la respuesta dinámica (bifurcaciones) en el rango de frecuencias de 0.2 a 1.5 Hz. Existe una transición de soluciones de periodo-1 a multiperiódicas. Por otro lado no se encontraron ni caos ni amortiguamiento numérico en los ejemplos estudiados.

El tratamiento de la no linealidad con este conocido método está siendo actualmente incluido en el estudio de otros modelos más complejos de este tipo estructural.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado con subsidios CONICET (PID 253/98) y la SGCyT de la Universidad Nacional del Sur, Argentina.

7 REFERENCIAS

- [1] E. Esmailzadeh and A. Goodarzi, A., "Stability analysis of a CALM floating offshore structure," *Int. J. of Non-linear Mech*, **36**, 917-926 (2001).
- [2] S. A. Sannasiraj, V. Sundar and R. Sundaravadivelu. "Mooring forces and motion response of pontoon-type floating breakwaters". *Ocean Engng* **26**, 27-48, (1998).
- [3] A. Sarkar and R. Eatock Taylor. "Effects of mooring line drag damping on response statistics of vessels excited by first- and second-order wave forces". *Ocean Engng* **27**, 667-686, (2000).
- [4] R. J. Smith and C.J. MacFarlane. "Statics of a three component mooring line". *Ocean Engng* **28**, 899-914, (2001).
- [5] K.J. Bathe, 1995, *Finite Element Procedures*, Ed. Prentice-Hall (1995)
- [6] C.P. Filipich and M.B. Rosales, "A recurrence solution of strongly non-linear systems," In *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, XXI, 141-149. Eds. A.J. Kassab, D.W. Nicholson and I. Ionescu. Rivercross Publishing, Inc. Orlando. Proceedings, 21st. Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics (SECTAM XXI), Orlando, U.S.A (2002)
- [7] C.P. Filipich, M.B Rosales and F. Buezas, "Some nonlinear mechanical problems solved with analytical solutions," aceptado para ser publicado en *Latin Am Appl Res.* (en prensa) (2003).