

OSCILADORES ELECTRÓNICOS: MÉTODOS DE APROXIMACIÓN FUERA DEL COMPORTAMIENTO SINUSOIDAL

Mirta S. Padín[‡], Federico I. Robbio[†] y Jorge L. Moiola[†]

[‡] Unidad Académica Río Gallegos, Universidad Nacional de la Patagonia Austral
L. de la Torre 1070, Z9400JZV Río Gallegos, Argentina. TE: 54-(02966)-442319–Interno 19
e-mail: mpadin@uarg.unpa.edu.ar, web page: <http://www.unpa.edu.ar/>

[†] CONICET y Departamento de Ing. Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur
Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595101–Interno 3315
e-mail: frobbio@criba.edu.ar, jmoiola@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar/>

Palabras clave Oscilador de van der Pol, distorsión, bifurcación de Hopf, balance armónico.

Resumen. *La predicción de oscilaciones puede realizarse a través de métodos analíticos o numéricos incorporando a la simulación numérica herramientas de tipo analítico. Dentro de esta variedad de métodos, aquellos que usan la respuesta en frecuencia describen la parte lineal del sistema con una función de variable compleja en lugar de una ecuación diferencial. La ventaja principal reside en la posibilidad de contar con una representación gráfica además de la interpretación física que tiene la respuesta en frecuencia, aunque para ser aplicados a sistemas no lineales se requiere la solución de problemas con operadores multilineales. El uso de la periodicidad a través de series de Fourier, que proveen una descomposición de señales periódicas en un conjunto de términos, resulta una forma natural de aproximación por truncación de series. Para el análisis aproximado de fenómenos oscilatorios en una única frecuencia con algún posible corrimiento, resulta adecuado que las variables dinámicas sean aproximadas por una suma de términos periódicos. En este trabajo se aplicará la técnica de balance armónico a dos métodos para la predicción de oscilaciones: el método gráfico de Hopf y el de Buonomo. Se obtiene un conjunto de ecuaciones determinantes para conocer la solución. Éstas son resueltas en forma explícita, de manera que tanto la frecuencia como los coeficientes de Fourier de la oscilación no lineal pueden determinarse con el uso de simples fórmulas de recurrencia, las cuales también incluyen los efectos significativos de contribuciones de armónicos de órdenes superiores, permitiendo evaluar la oscilación no lineal en forma explícita en términos de los parámetros de circuitos. El ejemplo de aplicación empleado será la ecuación de van der Pol.*

1 INTRODUCCIÓN

Las técnicas de balance armónico son ampliamente difundidas para describir oscilaciones sinusoidales y serán aplicadas al conocido oscilador de van der Pol intentando además describir la distorsión que las mismas sufren. Varios autores han aplicado en el pasado diversas metodologías¹⁻⁵ a este problema no sólo con fines de análisis, sino también para ser usadas como herramientas de diseño. Algunos de estos métodos han sido desarrollados en el dominio tiempo y usan teoría de perturbaciones^{1,6}, mientras que otros procedimientos utilizan algunas ventajas que aparecen en el denominado dominio frecuencia^{2,3,7}. De hecho, en la mayoría de las configuraciones de osciladores sinusoidales, las condiciones de oscilación se cumplen cuando un punto de equilibrio pierde su estabilidad mediante la variación continua de un parámetro y aparece un ciclo límite. Este fenómeno ha sido caracterizado matemáticamente y se lo conoce como bifurcación de Hopf⁸.

El problema de calcular la forma de onda de salida de estado estacionario de osciladores no lineales sinusoidales implica conocer su amplitud y su frecuencia. Se deben analizar dos consideraciones muy importantes: cómo establecer las condiciones que debe cumplir el circuito para asegurar la existencia de una oscilación periódica estable y cómo obtener una representación analítica de la oscilación para predecir su amplitud y frecuencia.

Uno de los métodos ingenieriles más conocidos es la versión del teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia^{7,9}, que obtiene ventajas de predicciones locales obtenidas aplicando balances armónicos aproximados de distintos órdenes. Este método es práctico para caracterizar oscilaciones en sistemas realimentados no lineales con no linealidades suaves, cuando se varía un parámetro distintivo en el modelo matemático. Una desventaja de este enfoque es la necesidad de obtener una realización adecuada del sistema tal que los cálculos se vean minimizados, proceso que debe realizarse casi de manera artesanal. Por otra parte, dada la naturaleza local del método, si el sistema es altamente no lineal o el parámetro de bifurcación está lejos del valor crítico, se requieren fórmulas de bifurcación de alto orden para obtener una mejor aproximación o para estudiar fenómenos más complejos como la bifurcación de doble período, bifurcación simétrica, bifurcaciones secundarias, etc^{10,11}.

La aplicación del método de perturbación clásico de Poincaré al balance armónico provee condiciones simples y generales que aseguran la existencia de oscilaciones periódicas estables. Esta propuesta tiene su origen en un trabajo de Buonomo y Di Bello³ que aborda rigurosamente y en términos generales el problema de determinar la forma de onda de salida de un oscilador casi sinusoidal desarrollando un modelo perturbacional de osciladores de lazo simple realimentado. Así se construye un proceso iterativo que provee una solución periódica de la ecuación diferencial no lineal del oscilador a manera de una expansión asintótica en un parámetro de perturbación.

Como en el método anterior, se obtiene un conjunto de ecuaciones determinantes para conocer la solución. Éstas son resueltas en forma explícita, de manera que tanto la frecuencia como los coeficientes de Fourier de la oscilación no lineal, y de esta forma no sólo su primer armónico, pueden determinarse con el uso de simples fórmulas de recurrencia, las cuales también incluyen los efectos significativos de contribuciones de armónicos de órdenes

superiores. Para aproximaciones de órdenes más bajos, estas fórmulas asintóticas resultan extremadamente simples y son fáciles de calcular para aplicaciones prácticas, permitiendo evaluar la oscilación no lineal en forma explícita en términos de parámetros de circuitos lineales y no lineales. Si el sistema es altamente no lineal o el parámetro de bifurcación está lejos del valor crítico, se requieren fórmulas de alto orden, dada la naturaleza local del método.

El trabajo se ha organizado como sigue: En la Sec. 2, se incluye una pequeña reseña del teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia, mientras que en la Sec. 3 se presenta el método de Buonomo. Luego, en la Sec. 4, se muestran aproximaciones cuasi-analíticas de la solución para ambos métodos junto con las distorsiones halladas comparando con las simulaciones numéricas. Finalmente, en la Sec. 5 se presentan algunas conclusiones.

2 TEOREMA DE BIFURCACION DE HOPF EN EL DOMINIO FRECUENCIA

Supóngase que el sistema realimentado no lineal multivariable mostrado en la Fig. 1(a), descrito por

$$x = -Tx$$

donde T es un operador no lineal, puede expresarse como un sistema en cascada de una parte lineal g y otra no lineal sin memoria f , como se muestra en la Fig. 1(b) tal que

$$x = -gf(x, \mu),$$

donde $f: R^r \rightarrow R^m$ es una función no lineal suave C^q , y g es un operador lineal con matriz de transferencia $G(s)$ y μ es el parámetro de bifurcación. Los puntos de equilibrio se hallan resolviendo

$$\hat{x} = -G(0)f(\hat{x}, \mu).$$

La matriz de transferencia del sistema linealizado es GJ , donde $J = \partial f / \partial x|_{\hat{x}}$.

Los cambios en la estabilidad del punto de equilibrio \hat{x} relacionados con perturbaciones en el parámetro μ , se encuentran asociados al lugar característico del sistema linealizado con respecto al punto $(-1+j0)$ donde $j = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria..

El teorema de Hopf en el dominio frecuencia provee condiciones para asociar estos cambios en la estabilidad del punto de equilibrio con la aparición de ciclos límites. Un método para determinar tales condiciones consiste en buscar directamente la respuesta oscilatoria, tratando de ajustar un conjunto solución de la forma

$$x = \hat{x} + \text{Re} \sum_{k=0}^{2q} a_k \exp(jk\omega t),$$

donde ω es la frecuencia de oscilación y los coeficientes a_k son generalmente vectores (o números) complejos dependiendo que el sistema sea monovariable o multivariable.



Figura 1: (a) Sistema no lineal realimentado. (b) Estructura standard.

La solución se obtiene gráficamente en el dominio frecuencia resolviendo la siguiente ecuación escalar

$$\lambda(j\omega) = -1 + \sum_{k=0}^{2q} \xi_k \theta^{2k} \quad (1)$$

donde $\lambda(j\omega)$ es el autovalor de $G(s)J$ cuyo lugar característico pasa por el punto crítico $(-1 + j0)$ en la condición de bifurcación, θ es una medida de la amplitud de la oscilación del primer armónico y ξ_k son algunas funciones de ω que dependen de las derivadas de f calculadas en \hat{x} . Esta ecuación puede resolverse directamente o por aproximaciones sucesivas truncando para un determinado orden k . Para cada k se obtiene una solución (θ, ω) que corresponde a la intersección de la curva descrita por la parte derecha de (1) con el gráfico de $\lambda(j\omega)$. El proceso iterativo se lleva a cabo hasta que la solución resulte satisfactoria.

Si se opta por obtener una aproximación de orden cero, es decir, $\lambda(j\omega) = -1$ existe un único valor de ω que satisface (1) y es el valor en el que ocurre la bifurcación. Esto implica graficar una familia de curvas para distintos valores del parámetro de bifurcación μ . Por ello resulta más razonable buscar una frecuencia ω_R que verifique que $\text{Im}(\lambda(\omega_R)) = 0$ y que $\text{Re}(\lambda(\omega_R))$ sea cercano al punto $(-1 + j0)$.

Considerando una aproximación de primer orden para (1) se tiene

$$\lambda(j\omega) = -1 + \xi_1(\omega_R)\theta^2, \quad (2)$$

de donde se observa que tendrá solución sí la semirrecta con origen en $(-1, 0)$ en la dirección de ξ_1 corta el gráfico de $\lambda(j\omega)$. En la intersección se obtienen ω_1 y θ_1 . Según el teorema gráfico de Hopf, existe un ciclo límite, en un entorno del punto de equilibrio \hat{x} , cercano a $\theta_1 v \cos \omega_1 t$, donde v es el autovector derecho de $G(j\omega_R)J$.

El teorema de Hopf en el dominio frecuencia permite establecer que la solución (ω_1, θ_1) de (2) corresponde a una solución localmente única de balance armónico de segundo orden para un ciclo límite en el sistema, teniendo en cuenta que θ_1 es suficientemente pequeño⁷.

La solución al balance de segundo orden es

$$x = \hat{x} + \text{Re} \sum_{k=0}^2 a_k \exp(jk\omega t)$$

donde los coeficientes a_k son funciones de θ y de ciertas funciones V_{ik} que pueden obtenerse en Mees⁷. Como x tiene frecuencia ω , también la tendrá una función $f(x)$ y pueden calcularse

sus coeficientes de Fourier F^k como funciones de los a_k . Las fórmulas explícitas de los a_k en términos de cuatro⁷ y hasta ocho⁹ armónicos están disponibles en la literatura.

3 MÉTODO DE BUONOMO

Se presenta en esta sección el método de Buonomo para obtener una aproximación a la solución periódica. La Fig. 2 muestra el diagrama de flujo del modelo de corriente alterna de un oscilador electrónico, con lazo de realimentación simple. El operador lineal $T_d(s)$ es la función de transferencia de rama directa y, a diferencia de la propuesta anterior, es la parte lineal del circuito (resistores, fuentes controladas, capacitores, inductores, etc.) pero incluyendo también la parte lineal de la no linealidad. Ésta viene expresada por la relación cociente entre dos polinomios de coeficientes reales,

$$T_d(s) = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} = k \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

Por otro lado, el lazo de realimentación comprende la parte no lineal del oscilador y es descrito por la función no lineal algebraica

$$\begin{aligned} y &= \delta f(x) \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

donde la función $f(x)$ y la constante δ determinan la agudeza y el grado de la no linealidad, respectivamente. Como se ha incluido la parte lineal de la no linealidad en $T_d(s)$, se tiene que la derivada de $f(x)$ es nula en $x=0$.

Si $P(s)$ y $M(s)$ son los polinomios resultantes de la aplicación de la transformada de Laplace sobre el operador diferencial, como $P(s)\hat{X} = kM(s)\hat{Y}$, la ecuación que describe el comportamiento del circuito será

$$P(D)x = kM(D)\delta f(x) \tag{3}$$

donde D indica el operador derivada con respecto al tiempo. Ahora se escribirá esta ecuación involucrando un *parámetro pequeño*. Si el circuito se comporta como un oscilador casi sinusoidal, la salida en estado estacionario x debe ser una función periódica del tiempo, tendiendo a una senoide pura $A_0 \cos(\omega_0 t)$ cuando un parámetro pequeño ε del circuito tiende a cero.

La salida del oscilador casi sinusoidal puede de esta forma ser expresada como

$$x(t, \varepsilon) = A(\varepsilon) \cos[\omega(\varepsilon)t] + \varepsilon h(t, \varepsilon), \tag{4}$$

donde $A(\varepsilon) \cos[\omega(\varepsilon)t]$ indica que la componente armónica fundamental de x , tiende a la senoide límite, y con $\varepsilon h(t, \varepsilon)$ se nota la función periódica resultante de x que tiende a cero con ε . Consecuentemente, la ecuación (3) será lineal para ε igual a cero y tendrá a $A_0 \cos(\omega_0 t)$ como función periódica. Para un oscilador casi sinusoidal la función de transferencia $T_d(s)$ y (3) se expresan en términos del parámetro ε

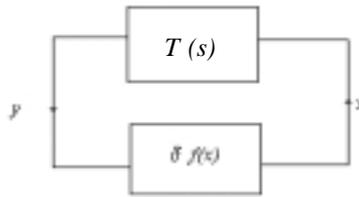


Figura 2: Diagrama en bloque de un circuito oscilador.

$$T_d(s) = k \frac{N(s)}{s^2 - \varepsilon\sigma s + \rho}. \quad (5)$$

$$H(D)(D^2 - \varepsilon\sigma D + \rho)x = \varepsilon M(D)f(x)$$

donde $N(s)$ indica la función racional $M(s)/H(s)$.

Para establecer las condiciones bajo las cuales el circuito tiene una salida de estado estacionario de forma casi sinusoidal, como la propuesta en (4), se considera en lugar de (5), el sistema equivalente de ecuaciones obtenidas tratando de manera separada la fundamental y las armónicas superiores en dicha ecuación para x

$$H(D) \left(\frac{\omega^2 - \rho}{\varepsilon} + \sigma D \right) A \cos(\omega t) + M(D) \wp f[A \cos(\omega t) + \varepsilon h] = 0 \quad (6a)$$

$$H(D) (D^2 - \varepsilon\sigma D + \rho) h - M(D) (\mathfrak{I} - \wp) f[A \cos(\omega t) + \varepsilon h] = 0 \quad (6b)$$

donde \wp es el operador que al ser aplicado a una función periódica da su componente armónica fundamental y $(\mathfrak{I} - \wp)$ es el operador complementario.

Para obtener la condición de oscilación, sea $F(A)$ la función descriptora de la no linealidad $f(x)$ que se asume analítica en x al igual que $\sigma(\varepsilon)$ y $\rho(\varepsilon)$, por lo que entonces (5) tiene una solución periódica casi sinusoidal como la presentada en (4), tendiendo a $A_0 \cos(\omega_0 t)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, sí y sólo sí la ecuación no lineal

$$F(A) = -\frac{\sigma_0 \omega_0}{\text{Im} N_0}, \quad \text{Im} N_0 \neq 0, \quad (7)$$

$\sigma_0 = \sigma(0)$, $N_0 = N(j\omega_0)$, admite al menos una solución simple positiva A_0 , es decir, con derivada no nula $F'(A_0)$.

Se fijan las cantidades positivas A_0 y ω_0 , con el fin de describir un procedimiento iterativo basado en el método de perturbación de Poincaré, para de ese modo calcular la solución como una función analítica de ε . El procedimiento consiste en construir la amplitud y la frecuencia del armónico fundamental y los coeficientes de Fourier $\varepsilon \hat{H}_m$ de $\varepsilon h(t, \varepsilon)$ por medio de sus desarrollos en series de potencia de ε . Así la solución toma la forma $x(t) = x_0 + x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2 + \dots$, con $x_0 = A_0 \cos \vartheta$, $x_k = A_k \cos \vartheta + h_k$, $h_k = \text{Re}(\hat{H}_{2,k} e^{j2\vartheta} + \hat{H}_{3,k} e^{j3\vartheta} + \dots)$

y $\vartheta = \omega t$ donde los coeficientes A_{k-1} , ω_k y $\hat{H}_{m,k}$, $k=2,3,\dots$, se determinan por fórmulas de recurrencia comenzando con los coeficientes ω_0 , A_0 , ω_1 y $\hat{H}_{m,1}$ de la primera aproximación a la solución. Éstos se obtienen resolviendo simples ecuaciones determinantes de primer orden.

El procedimiento presentado permite determinar una representación completa de la solución. De acuerdo al método de *parámetro pequeño* de Poincaré, se obtienen las ecuaciones determinantes para A_{N-1} , ω_N y $\hat{H}_{m,N}$ imponiendo que deben igualarse los coeficientes de términos con potencias iguales en ε y el mismo orden de armónicos.

Se incluyen algunas de las ecuaciones determinantes, particularmente las de primer y segundo orden.

$$\begin{aligned} H_0(i)(\rho_1 - 2\omega_0\omega_1 - i\sigma_0\omega_0)A_0 - M_0(i)F_{1,0} &= 0 \\ H_0(im)\omega_0^2(-m^2 + 1)\hat{H}_{m,1} - M_0(im)F_{m,0} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

De aquí y de (7) resulta

$$A_0 = -\frac{\text{Im } N_0 F_{1,0}}{\omega_0 \sigma_0} \quad \text{y} \quad \omega_1 = \frac{\rho_1}{2\omega_0} - \frac{\text{Re } N_0 F_{1,0}}{2\omega_0 A_0}.$$

De la ecuación (8) la expresión de los coeficientes de Fourier de armónicos superiores de h_1 es,

$$\hat{H}_{m,1} = -\frac{N(im\omega_0)F_{m,0}}{\omega_0^2(m^2 - 1)}.$$

Para un balance de orden 2, se deben considerar los términos en ε^2 . De esta forma resulta³

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-\sigma_1\omega_0 A_0 + \text{Im } Z_2}{\omega_0\sigma_0 + (B_0^{(1)} + B_2^{(1)})\text{Im } N_0} \\ \omega_2 &= \frac{A_1}{A_0} \left(\frac{\rho_1}{2\omega_0} - \omega_1 - \frac{B_0^{(1)} + B_2^{(1)}}{2\omega_0} \text{Re } N_0 \right) + \frac{\rho_2}{2\omega_0} + \frac{\text{Re } Z_2}{2\omega_0 A_0} \nu \end{aligned}$$

donde

$$Z_2 = \frac{H_1(j)Q_1(j)}{H_0(j)} - (\omega_1^2 + j\sigma_0\omega_1)A_0 - \frac{M_1(j)F_{1,0}}{H_0(j)} - W_1$$

y los polinomios correspondientes son

$$\begin{aligned} H_1(jm) &= \omega_1 H^{(1)}(jm\omega_0) \\ M_1(jm) &= \omega_1 M^{(1)}(jm\omega_0) \\ Q_1(j) &= \rho_1 - 2\omega_0\omega_1 - j\sigma_0\omega_0 \end{aligned}$$

y W_1 es el término que tiene en cuenta la influencia de los armónicos superiores sobre Z_2 , obtenido de iteraciones anteriores

$$W_1 = N_0 [B_1^{(1)} H_{0,1} + (B_1^{(1)} + B_3^{(1)}) \operatorname{Re} H_{2,1} + j(B_1^{(1)} - B_3^{(1)}) \operatorname{Im} H_{2,1} + (B_2^{(1)} + B_4^{(1)}) \operatorname{Re} H_{3,1} + \dots]$$

de esta última ecuación, se pueden calcular las expresiones de los coeficientes de Fourier

$$H_{m,2} = -\frac{1}{\omega_0^2(m^2 - 1)H(jm\omega_0)} (M_1(jm)F_{m,0} + M_0(jm)F_{m,1} - H_0(jm)Q_1(jm) + H_1(jm)Q_0(jm)H_{m,1}).$$

4 CIRCUITO DE VAN DER POL

Se presenta en este trabajo la ampliamente estudiada ecuación de van der Pol:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{9}$$

que admite una representación en variables de estado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon(x_1^2 - 1)x_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Estas ecuaciones son las de un oscilador armónico simple con un término de amortiguamiento no lineal $\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x}$. El mismo actúa como un amortiguamiento positivo para $|x| > 1$ pero negativo para $|x| < 1$. Produce un decaimiento en las oscilaciones de grandes amplitudes y, por el contrario, un crecimiento de las mismas para valores pequeños de $|x|$. Esto hace que el sistema se establezca en una oscilación autosostenida donde la energía disipada sobre un ciclo balancea la energía adquirida. La elaboración de esta idea conduce a que la ecuación de van der Pol tiene un único ciclo límite estable para cada valor de $\varepsilon > 0$.

El sistema linealizado tiene autovalores imaginarios puros cuando $\varepsilon = 0$, dando lugar a la condición de bifurcación. Sin embargo, para $0 < \varepsilon \ll 1$, el sistema presenta un ciclo límite estable, mientras que para $\varepsilon < 0$ presenta un ciclo límite inestable. Esta situación está directamente relacionada con que $\varepsilon = 0$ es una bifurcación degenerada ya que para este valor se desvanecen los términos no lineales. En otras palabras, no se puede aplicar el teorema de bifurcación de Hopf⁸.

A fin de resolver el sistema aplicando la metodología propuesta en la Sección 2, se realiza un cambio de variables para remover la degeneración y tener así una realización sencilla¹²

$$u = \varepsilon^{1/2} x \tag{11}$$

y de esta forma

$$\ddot{u} + u + u^2\dot{u} - \varepsilon\dot{u} = 0.$$

La relevancia de este cambio de variables es tal que modifica la naturaleza de las soluciones originales. Analizando el sistema original de van der Pol (9) se observa que aparecen ciclos límites para valores de $\varepsilon < 0$, mientras que al realizar el cambio propuesto en la Ec.(11) la bifurcación de Hopf es la clásica: aparecen sólo ciclos límites estables para valores positivos del parámetro de bifurcación.

Finalmente la ecuación transformada resulta

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^2 x_2 + \varepsilon x_2.\end{aligned}\tag{12}$$

5 RESULTADOS

Considérese para el circuito planteado en las Ecs. (12) la siguiente realización con el fin de aplicar el método descrito en la Sec. 2 (de aquí en más denominado MC por Mees-Chua)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir de estas consideraciones el término no lineal resulta $g(x_1, x_2) = x_2 + x_2(\varepsilon - x_1^2)$, donde la función de transferencia es

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$$

e

$$y = x = -e; \quad G(0)f(e) = -e.$$

El punto de equilibrio es $\hat{e}_1 = \hat{e}_2 = 0$, y el Jacobiano resulta

$$J = \left(2\hat{e}_2\hat{e}_1 \quad -(1+\varepsilon) - \hat{e}_1^2 \right) \Big|_{\hat{e}_1=\hat{e}_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & -(1+\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores en la condición de bifurcación son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-(1+\varepsilon)i\omega}{(1-\omega^2) + i\omega} = -1.\end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones para las partes real e imaginaria, se obtiene que $\omega_{Hopf} = 1$ y para obtener $\lambda(i\omega_R)$, donde ω_R satisface que $\text{Im}\{\lambda_2(i\omega_R)\} = 0$, resulta $\omega_R = 1$.

Los autovectores son

$$u^T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v^T = V_{11}^T = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Siguiendo con el método planteado se tiene que $\xi_1 = -\frac{1}{8}$. Luego $\lambda_2 \approx -\frac{(1+\varepsilon)i\omega}{i\omega} = -1 - \frac{1}{8}\theta^2$, de donde resulta

$$\theta = 2\sqrt{2\varepsilon}.\tag{13}$$

Por último la respuesta será, expresada en diversas formas equivalentes

$$E^1 = v\theta = \begin{pmatrix} -i2\sqrt{\varepsilon} \\ 2\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (14a)$$

$$e(t) = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} -2i\sqrt{\varepsilon} (\cos t + i \sin t) \\ 2\sqrt{\varepsilon} (\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\varepsilon} \sin t \\ 2\sqrt{\varepsilon} \cos t \end{pmatrix} \quad (14b)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\varepsilon} \sin t \\ -2\sqrt{\varepsilon} \cos t \end{pmatrix} \quad (14c)$$

Volviendo a las variables originales (aplicando el escalado de la Ec. (11)), se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ -2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Siguiendo ahora el cálculo para la formulación de alto orden propuesta, se expone el operador proyección y los coeficientes necesarios para construirla:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D_2 = D_4 = D_5 = 0$$

$$V_{22} = V_{02} = V_{13} = V_{04} = V_{24} = V_{44} = 0$$

$$V_{33} = \frac{-1}{8\sqrt{2}} \frac{1}{(8+3\varepsilon i)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución propuesta expresada en las variables originales será ahora

$$e(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2\varepsilon}{\sqrt{64+9\varepsilon^2}} \cos(3t + \Phi) \\ \frac{-6\varepsilon}{\sqrt{64+9\varepsilon^2}} \cos\left(3t + \Phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

donde

$$\Phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{-3\varepsilon}{8} \right).$$

La corrección en frecuencia se obtiene al implementar ξ_2

$$\xi_2 = \frac{1}{64} \frac{(3\varepsilon + 8i)}{(64 + 9\varepsilon^2)}.$$

Para obtener una mayor precisión se realiza una mejora en la aproximación:

$$V_{35} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{(64 - 9\varepsilon^2) - i48\varepsilon}{(64 - 9\varepsilon^2)^2 + 48^2 \varepsilon^2} \begin{pmatrix} -3i \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$V_{06} = V_{26} = 0, \quad V_{15} = V_{17} = 0$$

$$V_{55} = \frac{-1}{8\sqrt{2}} \frac{1}{(64+9\epsilon^2)} \begin{pmatrix} 8-i3\epsilon \\ 9\epsilon+i24 \end{pmatrix},$$

$$\xi_3 = \frac{1}{16(64+9\epsilon^2)^2} \left\{ \left[196 - \frac{9}{2}\epsilon + \left(\frac{63}{16} - 27 \right) \epsilon^2 \right] + i[153\epsilon - 12] \right\}.$$

Es interesante resaltar la validez de esta aproximación. Dado que se trata de una expansión en series en función del parámetro θ , éste debe cumplir $\theta < 1$. Por lo tanto, de acuerdo a la relación establecida en (13), será válida cuando $\epsilon < \frac{1}{8}$. Finalmente y con esta advertencia, la corrección está dada por

$$e(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2\epsilon}{\sqrt{64+9\epsilon^2}} \cos(3t + \Phi) \\ \frac{-6\epsilon}{\sqrt{64+9\epsilon^2}} \cos(3t + \Phi + \pi/2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5376\epsilon^3 \cos 3t + 96\epsilon^2(64-9\epsilon^2) \sin 3t}{(64-9\epsilon^2) + 48\epsilon^2} \\ \frac{288\epsilon^2(64-9\epsilon^2) \cos 3t + 13824\epsilon^3 \sin 3t}{(64-9\epsilon^2) + 48\epsilon^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{128\epsilon^2 \cos 5t + 48\epsilon^3 \sin 5t}{64+9\epsilon^2} \\ \frac{-144\epsilon^3 \cos 5t + 384\epsilon^2 \sin 5t}{64+9\epsilon^2} \end{pmatrix}.$$

En la Fig. 3 se observa la onda de salida obtenida a partir de la simulación del oscilador con las ecuaciones que incluyen la transformación propuesta en (11) y la obtenida aplicando el método MC para un valor de ϵ dado. En la misma figura, puede observarse el alto contenido de armónicos presente en la onda obtenida usando el método MC.

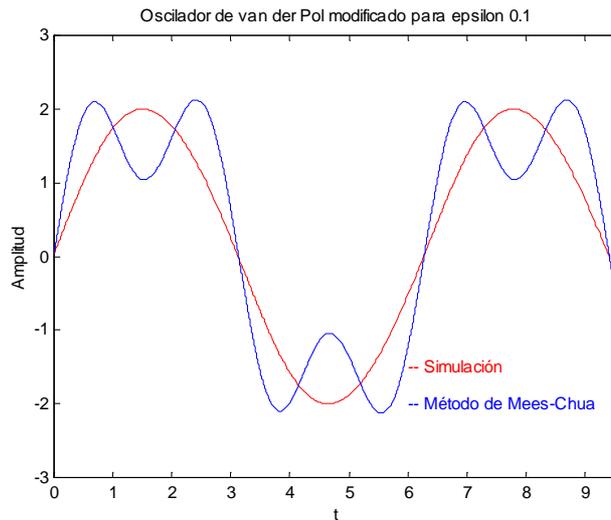


Figura 3: Onda de salida del oscilador de van der Pol modificado

Por último se construye una medida de comparación entre ambas señales a partir de la predicción de la amplitud máxima de la oscilación en función al valor del parámetro ε . En la Fig. 4 se muestran tanto los resultados obtenidos por simulación como por vía analítica, donde se observa que esta variación no es monótonamente creciente como era de esperar.

La aplicación al oscilador de van der Pol del método presentado en la Sección 3 fue ampliamente desarrollada por Buonomo^{13,14}, y es de allí donde se obtiene la siguiente aproximación de cuarto orden

$$x(\vartheta, \varepsilon) = \left(2 + \frac{1}{64} \varepsilon^2 - \frac{23}{49152} \varepsilon^4\right) \cos \vartheta + \left(-\frac{1}{4} \varepsilon - \frac{15}{512} \varepsilon^3\right) \sin(3\vartheta) + \left(-\frac{3}{32} \varepsilon^2 + \frac{101}{12288} \varepsilon^4\right) \cos(3\vartheta) - \frac{85}{2304} \varepsilon^3 \sin(5\vartheta) + \left(-\frac{5}{96} \varepsilon^2 + \frac{1865}{110592} \varepsilon^4\right) \cos(5\vartheta) - \frac{7}{576} \varepsilon^3 \sin(7\vartheta) + \frac{1379}{110592} \varepsilon^4 \cos(7\vartheta) + \frac{61}{20480} \varepsilon^4 \cos(9\vartheta) + \Theta(\varepsilon^5)$$

$$\omega = 1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 + \frac{17}{3072} \varepsilon^4 + \Theta(\varepsilon^6).$$

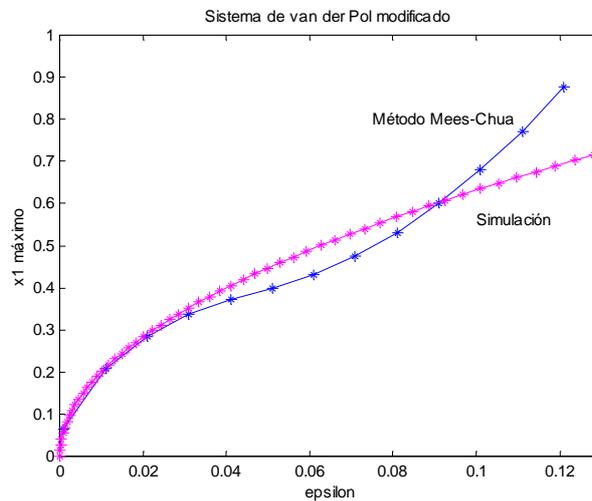


Figura 4: Amplitud máxima de la variable x_1 en función del parámetro ε .

La forma de onda generada por esta aproximación puede observarse en la Fig. 5 como así también la obtenida a través de simulación. Es notoria la mejora obtenida al aplicar este método a la ecuación original de van der Pol con respecto de los resultados obtenidos en la Fig. 3 por el método MC.

En este caso la medida propuesta para establecer la diferencia entre la amplitud máxima y ε , es mostrada en la Fig. 6 y se observa que el comportamiento es monótono creciente, siendo a su vez la cota para ε mucho mayor. Según Buonomo¹³, es válido el desarrollo hasta $\varepsilon < 2.7$.

La distorsión armónica es claramente dependiente del parámetro ε . Una medida de ella se obtiene¹⁵ calculando en forma porcentual el cociente entre el valor medio a lo largo de un período de la fundamental y el correspondiente para las armónicas, si

$$e_T = e_f + \sum_{\text{órdenes de los balances}} e_a$$

donde e_T es el valor medio de la señal a examinar, e_f de la fundamental y e_a de los armónicos, esto es

$$e_f = \frac{1}{T} \int_0^T e_{fundamental}^2 dt, \quad e_{armónico} = \frac{1}{T} \sum \int_0^T [e_2^2 + e_3^2 + \dots] dt.$$

La distorsión armónica total porcentual, será entonces

$$\% THD = \sqrt{\frac{e_a}{e_f}}.$$

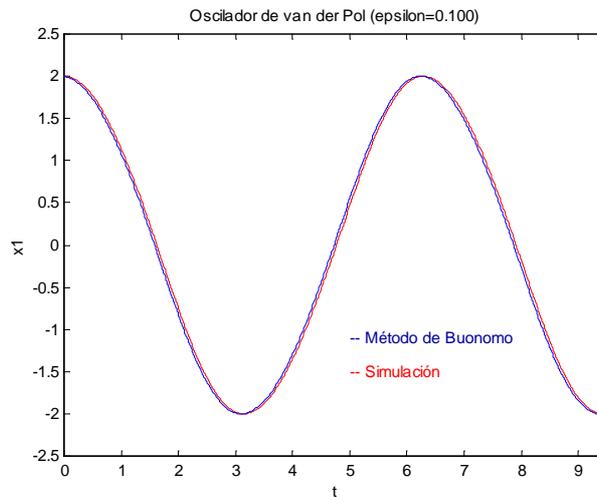


Figura 5: Forma de onda de la salida para $\epsilon = 0.1$.

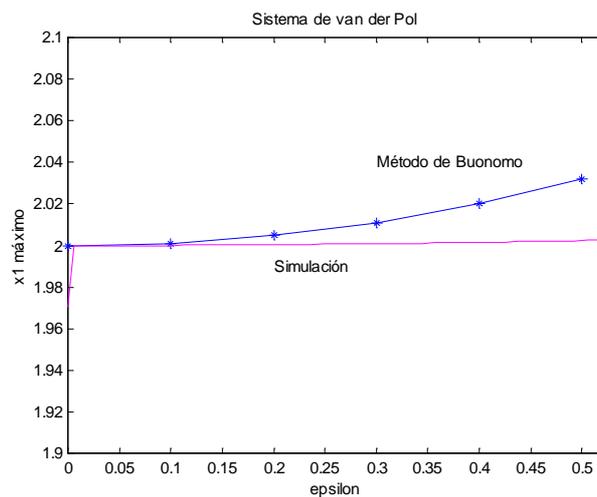


Figura 6: Amplitud máxima de la variable x_1 en función del parámetro ϵ .

Con los métodos implementados y los valores de los parámetros de perturbación propuestos, se obtienen (mediante el cálculo a través de un paquete simbólico) los resultados presentados en la Tabla 1 y graficados en la Fig. 7.

Tabla 1: Distorsión armónica porcentual para distintos valores de ε .

ε	% THD <i>Buonomo</i>	% THD <i>Mees-Chua</i>
0.01	0.125032	0.3994579
0.03	0.375156	4.32173
0.05	0.625461	11.9689
0.10	1.25281	47.6957
0.124	1.55515	73.1851
0.30	3.82791	
0.40	5.1584	
0.50	6.55454	

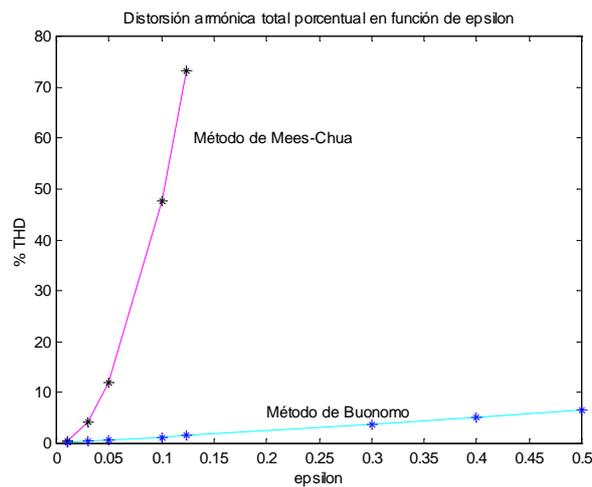


Figura 7: Distorsión armónica total porcentual en función de ε .

6 CONCLUSIONES

Se ha mostrado cómo las aproximaciones de alto orden para la detección de oscilaciones (en cercanías de una bifurcación de Hopf) pueden dar información acerca de los primeros armónicos y por ende estudiar el fenómeno de distorsión de la onda sinusoidal del oscilador.

Se ha tratado un oscilador ampliamente estudiado como el de van der Pol, para el cual se han presentado dos desarrollos *cuasi*-analíticos de la solución oscilatoria, y calculado dichas soluciones para distintos valores del parámetro de perturbación. Se exhiben resultados sobre la distorsión presente y la influencia que la variación de un parámetro ejerce sobre ella. En el caso de la aplicación del método de MC, éste sólo puede hacerse sobre un sistema modificado pues el sistema original no cumple con los postulados del teorema de bifurcación de Hopf. En

cambio, para el método de Buonomo es notoria la extensión de los resultados en términos del parámetro de bifurcación. Ambos métodos presentan la posibilidad del estudio de armónicos de alto orden que tienen importancia en varias aplicaciones de la ingeniería eléctrica para poder cuantificar la distorsión armónica y así contribuir a disminuir pérdidas energéticas, mejorar prestaciones de osciladores puramente sinusoidales, disminuir efectos no lineales, etc.

7 REFERENCIAS

- [1] J. Hale, *Oscillations in Nonlinear Systems*, Dover Pub. Inc., (1963).
- [2] M. Basso, R. Genesio y A. Tesi, “A frequency method for predicting limit cycle bifurcations”, *Nonlinear Dynamics* **13**, 339-360, (1997).
- [3] A. Buonomo y C. di Bello, “Asymptotic formulas in nearly sinusoidal nonlinear oscillators”, *IEEE Trans. on Circ. and Systems-I: Fund. Theory and Applics* **43**, 953-963, (1996).
- [4] G. M. Maggio, O. De Feo y M. P. Kennedy, “Nonlinear analysis of the Colpitts oscillator and applications to design,” *IEEE Trans. on Circ. and Systems-I: Fund. Theory and Applics.* **46**, 1118-1130, (1999).
- [5] G. M. Maggio, M. di Bernardo y M. P. Kennedy, “Nonsmooth bifurcations in a piecewise-linear model of the Colpitts oscillator”, *IEEE Trans. on Circ. and Systems -I: Fund. Theory and Applics.* **47**, 1160-1177, (2000).
- [6] W. Szemplinska-Stupnicka y J. Rudowski, “Bifurcation phenomena in a nonlinear oscillator: approximate analytical studies versus computer simulation results,” *Physica D* **66**, 368-380, (1993).
- [7] A. I. Mees, *Dynamics of Feedback Systems*, John Wiley and Sons, Chichester, (1981).
- [8] A. I. Mees y L. O. Chua, “The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems”, *IEEE Trans. on Circ. and Systems* **26**, 235-254, (1979).
- [9] J. L. Moiola y G. Chen, *Hopf Bifurcation Analysis – A Frequency Domain Approach*, World Sci. Publ. Co., Vol. 21, Singapore, (1996).
- [10] M. Belhaq y M. Houssni, “Symmetry-breaking and first period-doubling following a Hopf bifurcation in a three dimensional system”, *Mechanics Research Communications* **22**, 221-231, (1995).
- [11] M. Belhaq, M. Houssni, E. Freire y A. J. Rodríguez-Luis, “Analytical prediction of the two first period-doublings in a three-dimensional system”, *Intl. J. of Bifurcation and Chaos* **10**, 1497-1508, (2000).
- [12] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos – With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Addison Wesley, (1994).
- [13] A. Buonomo, “On the periodic solution of the van der Pol equation for small values of the damping parameter”, *Intl. J. of Circuit Theory and Applications* **26**, 39-52 (1998).
- [14] A. Buonomo, “The periodic solution of the van der Pol’s equation”, *SIAM Journal Applied Mathematics* **59**, 1356-1371 (1998).
- [15] N. Mohan, T.M. Undeland y W. P. Robbins, *Power Electronics*, Addison Wesley, (1989).