

TRANSFORMADA DISCRETA DE WAVELET Y LA COMPRESIÓN DE MATRICES EN EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE BORDE

Jorge D'Elía* y Mario Storti*

*Centro Internacional de Métodos Computacionales
en Ingeniería (CIMEC), CONICET / INTEC – UNL
Parque Tecnológico del Litoral Centro (PTLC), 3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: cimec@ceride.gov.ar, web page: <http://www.cimec.org.ar/>

Palabras clave: transformada discreta de wavelet, elementos de borde, compresión de matrices, flujo potencial externo, cómputo paralelo, mecánica de fluidos

Resumen. *En una resolución numérica por elementos de borde (o paneles) [por Boundary Element Method (BEM)] de las ecuaciones integrales de Fredholm correspondientes a problemas de valores de borde elípticos bajo condiciones de borde de tipo Dirichlet o Neumann, a veces se tiene que la matriz del sistema de ecuaciones lineales asociado con la discretización es densa y no simétrica (e.g. cuando se usa una técnica de colocación), lo que conduce a mayores requerimientos tanto de tiempo de CPU como de memoria RAM, comparado con otras formulaciones tales como diferencias o elementos finitos. Con el fin de reducirlos en la bibliografía del tema se ha propuesto adaptar la transformada rápida de wavelet para comprimir la matriz del sistema aunque, a veces, su aplicación directa no siempre conduce a una buena tasa de compresión, al menos, cuando se usan las transformadas de wavelet más clásicas. Por ejemplo, problemas con condiciones de borde mixtas, mallas BEM con bordes no suaves o con esquinas cerradas. En este trabajo repasamos algunas técnicas de truncación ε global y zonal parecidas a las empleadas en compresión digital de imágenes. La compresión zonal se restringe a las zonas más suaves de la matriz, las cuales suelen ocupar su mayor parte y, muchas veces, conocidas aproximadamente su localización por el mallado.*

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo nos interesamos en el uso de la Transformada Rápida de Wavelet [por Fast Wavelet Transform (FWT)], como una ayuda en la resolución numérica del Sistema de Ecuaciones Algebraicas Lineales (SEAL) que obtenemos cuando optamos por un método de paneles o de elementos de borde [por Boundary Element Method (BEM)], e.g. ver Kim/Karrila¹, de utilidad especialmente cuando el número de incógnitas n del sistema es relativamente grande.

Para fijar ideas, consideremos un SEAL de la forma $\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{b}$ obtenido por una discretización clásica por BEM de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie correspondiente a problemas de valores de borde elípticos bajo condiciones de borde de tipo Dirichlet o Neumann (e.g. flujo invíscido o reptante exterior a un cuerpo en una corriente uniforme corriente arriba), en donde $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ es la matriz del sistema obtenida después de haber discretizado por BEM, incorporar las condiciones de borde y re-ordenar las ecuaciones, la cual, en general, resulta densa, no simétrica y regular (i.e. no singular), $\mathbf{s} \in R^{n \times 1}$ es el vector solución y $\mathbf{b} \in R^{n \times 1}$ es el vector fuente (o de los términos independientes), mientras que n es el número de incógnitas. Frecuentemente la matriz del sistema \mathbf{A} es dominante en su diagonal principal mientras que el resto de sus coeficientes A_{ij} , con $i, j = 1, \dots, n$ e $i \neq j$, correspondan a una “imagen digital” bastante suave.

En el caso de optar por una resolución iterativa del SEAL, la tasa de convergencia es una función decreciente del número de condición κ de la matriz del sistema \mathbf{A} , depende notablemente de la geometría de la malla BEM y casi nada del grado de refinamiento de la misma. Por ejemplo, un par de mallas BEM semejantes sobre una esfera, con 100 y 100,000 paneles cada una conducen, prácticamente, a un mismo (y relativamente bajo) número de condición. Esto contrasta con las correspondientes propiedades de las matrices obtenidas por diferencias finitas [Finite Difference Method (FDM)], elementos finitos [Finite Element Method (FEM)] o volúmenes finitos [Finite Volume Method (FVM)].

Por otra parte, el hecho de tener que lidiar con una matriz densa y no simétrica implica, relativamente, mayores recursos computacionales, tanto en memoria RAM como tiempo de CPU, con respecto a la situación que se tiene en FDM, FEM o FVM.

En la literatura de BEM pueden distinguirse al menos dos líneas de trabajo para obtener matrices del sistema aproximadas: (i) *agrupamiento (cúmulos)* de paneles (panel clustering) y expansiones por *multipolos* (multipoles), en donde el fin perseguido es calcular el producto matriz-vector en menos de $O(n^3)$ operaciones; y (ii) uso de la transformada rápida de wavelet, donde se pasa a otra base quizás más conveniente para luego construir una matriz rala aproximada.

Así, una estrategia básica en una resolución iterativa del SEAL obtenido por BEM es reducir el costo computacional C_c de evaluar el producto matriz-vector $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, donde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^{n \times 1}$ son vectores columna genéricos que representan las diversas etapas intermedias de los métodos numéricos de resolución iterativa del SEAL, e.g. con técnicas tipo gradientes conjugados [Conjugate Gradient (CG)]. Para tal fin, intentamos aproximar

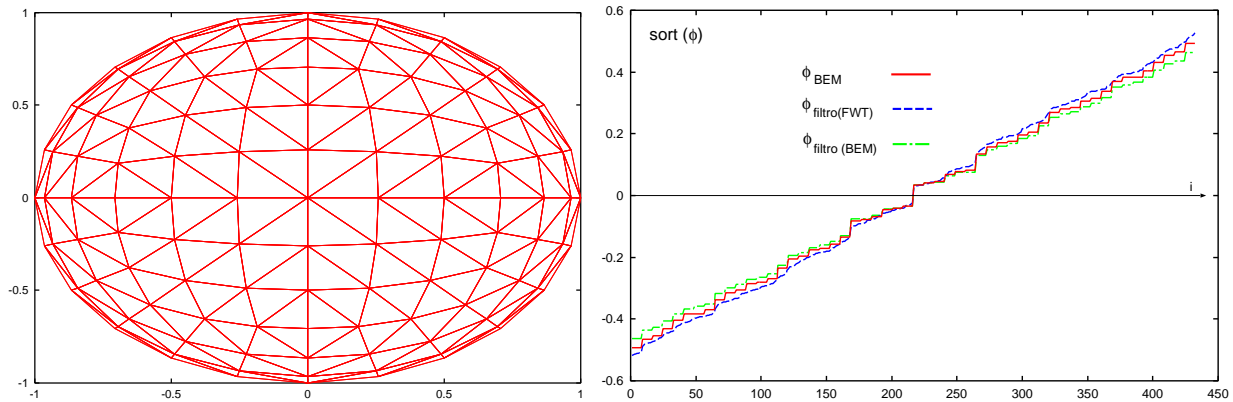


Figura 1: Izq.: vista según plano xy de una malla BEM sobre la esfera unitaria con $n = 432$ paneles. Der.: potenciales $\text{sort}(\phi)$ obtenidos con las matrices: original \mathbf{A} , original filtrada $T_\varepsilon(\mathbf{A})$ y permutada, transformada y filtrada $\tilde{\mathbf{D}} = T_\varepsilon(\tilde{\mathbf{A}})$.

la matriz del sistema \mathbf{A} mediante una matriz rala $\mathbf{D} \approx \tilde{\mathbf{A}}$ (y si fuera banda mejor). Una posibilidad para construirla es usar la transformada de wavelet. Según los valores de los ángulos de vista entre los paneles, lo cual depende de la disposición relativa entre ellos y, por consiguiente, de la geometría de la malla, la matriz transformada $\tilde{\mathbf{A}}$ puede exhibir (o no) un cierto patrón de ralitud, según el umbral ε elegido al retener o descartar los coeficientes matriciales transformados.

En una técnica de truncación ε estándar, e.g. ver Petersdorff² *et al.*, (i) calculamos la matriz densa del sistema \mathbf{A} la cual es la análoga a una imagen digitalizada; (ii) luego la representamos en una base de wavelet mediante una transformada rápida obteniendo $\tilde{\mathbf{A}}$; y (iii) construimos una matriz rala del sistema aproximada $\tilde{\mathbf{D}} \approx \tilde{\mathbf{A}}$ en la base wavelet, en donde retenemos sólo aquellos coeficientes que sean mayores a un cierto umbral ε . Esta última matriz es la que luego empleamos en la resolución numérica del SEAL, ya sea por métodos directos o iterativos. Claramente este proceso es de complejidad $O(n^2)$ por lo que algunas mejoras pueden o deben ser exploradas.

Por otra parte, se ha propuesto el uso de la transformada de wavelet en BEM, e.g. ver Belkyn³ *et al.*. Empero su aplicación inmediata a veces no conduce a una buena tasa de compresión τ_c . Por ejemplo, problemas con condiciones de borde mixtas, mallas con bordes no suaves o muy próximos entre si, conducen a matrices densas \mathbf{A} con zonas no-suaves las cuales pueden dar lugar a una baja tasa de compresión, según el grado del “ruido” presente, al menos, cuando se usan las transformadas de wavelet más clásicas.

Así, en la literatura se proponen diversas estrategias para mitigarlo. Por ejemplo González⁴ *et al.* proponen usar, por una parte, la transformada de wavelet unidimensional (FWT-1D) en la zona suave y, por otra parte, evitar la transformada de wavelet bidimensional (FWT-2D) en la zona no-suave.

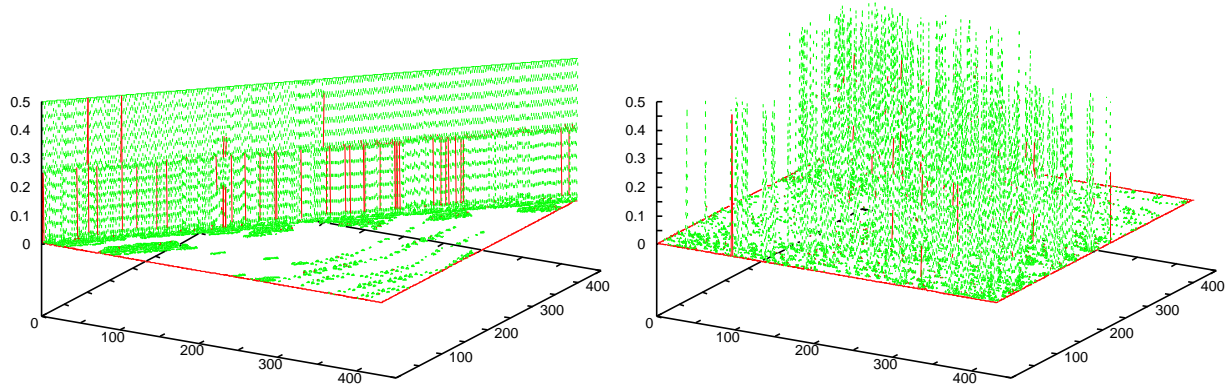


Figura 2: Estrategia global sobre la matriz del sistema \mathbf{A} obtenida por BEM en el caso de flujo potencial invíscido exterior a una esfera con $n = 432$ paneles. Izq.: matriz original \mathbf{A} . Der.: matriz permutada $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}$.

2 TRANSFORMADA RÁPIDA DE WAVELET

Muchas veces, grandes conjuntos de datos exhiben correlaciones en el tiempo y/o en el espacio, lo cual es explotado por la FWT con la intención de representarlos con un relativamente pequeño número de coeficientes. Frecuentemente, las “onditas” [por wavelets siguiendo la nomenclatura de Aimar⁵ *et al.*] $\psi_{j,m} = \psi_{j,m}(x)$ en la recta real x , son definidas como diádicas que trasladan m -veces y dilatan 2^j veces la “ondita” madre (mother-wavelet) ψ , esto es, $\psi_{j,m}(x) = \psi(2^j x - m)$, e.g. ver Stollnitz⁶ *et al.*. Desde el punto de vista práctico, la FWT-1D suele implementarse mediante filtros de respuesta de impulso finito [Finite Impulse Response (FIR)], también llamados filtros en cuadratura espejados [Quadrature mirror Filters (QMF)]. Otras veces, la FWT-2D se calcula mediante dos transformadas 1D separadas en donde, en cada descomposición, resultan una imagen de baja resolución y tres imágenes detalladas, e.g. ver Mallat⁷.

3 LA FWT Y LA COMPRESIÓN DE MATRICES EN BEM

3.1 Matrices BEM densas no suaves

Una idea básica para tratar las matrices \mathbf{A} densas y que presentan zonas no-suaves, es tratar de dividirla en dos zonas, una suave y, por tanto, más fácilmente comprimible, mientras que la restante no se la comprime. Tal idea, en realidad, ya ha sido usada en compresión de imágenes pero un problema que surge es que las discontinuidades de una imagen, e.g. los bordes de un objeto, son impredecibles a priori y, por eso, hay que usar algoritmos de “segmentación” en donde primero se explora toda la imagen para decidir dónde introducir los cortes que faciliten la compresión y, luego, recalcular, e.g. ver González⁴ *et al.*.

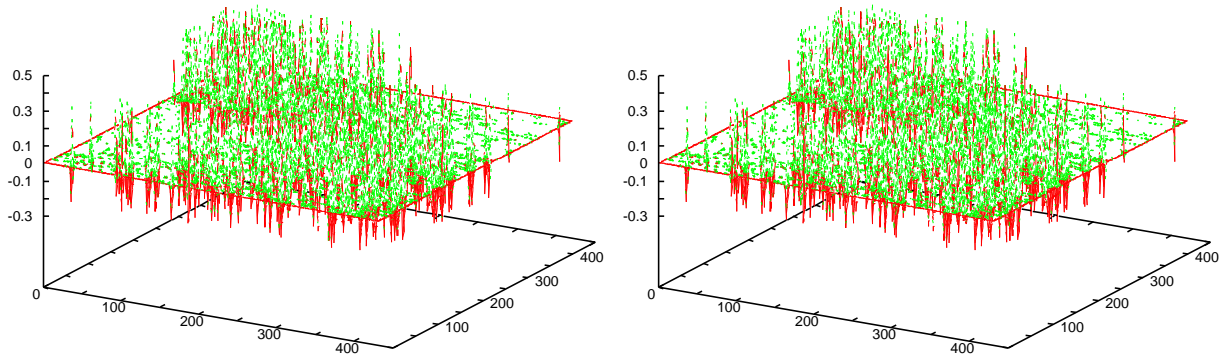


Figura 3: Estrategia global sobre la matriz del sistema \mathbf{A} obtenida por BEM en el caso de flujo potencial inviscido exterior a una esfera con $n = 432$ paneles. Izq.: matriz permutada y transformada $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{H}'$. Der.: matriz permutada, transformada y filtrada $\tilde{\mathbf{D}}T_\epsilon(\tilde{\mathbf{A}})$.

3.2 La estrategia de separación y fusión

González *et al.* hacen notar que en BEM las zonas no-suaves suelen ser bastante predecibles, dado que la posición de los paneles más “problemáticos” es conocida a priori, por ejemplo, en las esquinas o superficies muy próximas entre si. Entonces estos autores proponen que, en caso de bajas tasa de compresión con toda la matriz BEM dada, es pasar a la estrategia de dividir la matriz del sistema \mathbf{A} en dos zonas y comprimir solamente la zona de los coeficientes suaves, la cual es, por lejos y muchas veces, la mayor de las dos. A continuación, ambas zonas son de nuevo reunidas y el SEAL parcialmente transformado es resuelto a continuación (es decir, una estrategia tipo *splitting/merging* zonal).

3.3 Umbral de selección

Los coeficientes que resultan de una transformada de wavelet responden a los detalles de la imagen. Así, cuando tratamos con una bastante suave, en donde el nivel de los detalles es relativamente bajo, una buena parte de esos coeficientes pueden ser omitidos sin degradar substancialmente el “cuadro general”. Entonces, la estrategia del umbral de selección, al retener aquellos coeficientes que son mayores a un cierto umbral, sería como hacer una “limpieza” de la imagen en donde omitimos los detalles no tan relevantes. Si los datos a transformar son *suaves*, entonces podremos reconstruirlos a partir de los datos transformados aún después de retener aquellos pocos que superen un cierto umbral. El problema que surge es una determinación más o menos confiable en una selección automática del umbral, el cual cambiará en general de problema en problema. Al respecto, en el área de compresión de imágenes se han propuesto diversas estrategias más o menos empíricas pero muy pocas en el área del análisis numérico. Una técnica usada en compresión de imágenes es el “algoritmo triangular” basada en una cierta construcción geométrica simple en el plano del histograma de los coeficientes transformados, de $O(n^2)$, e.g. ver Sec. 4.4 y Fig. 4.

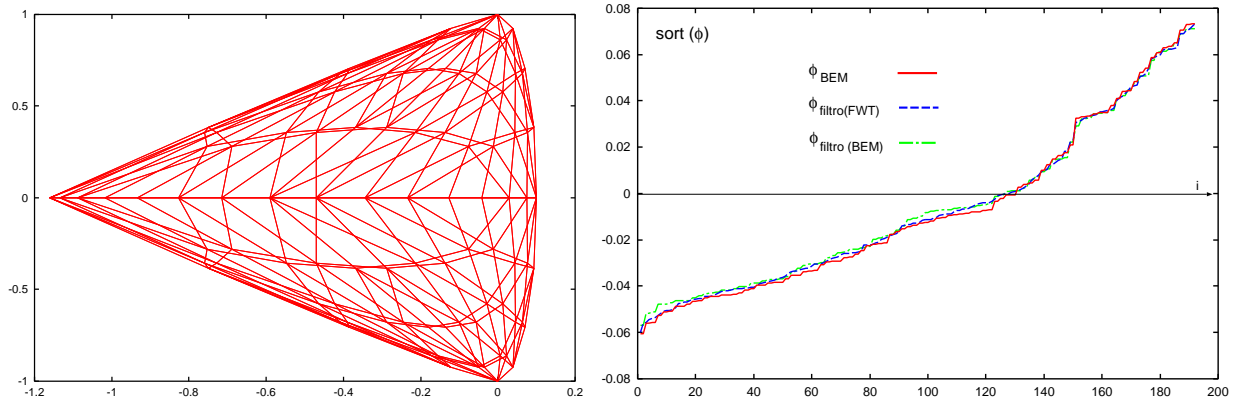


Figura 4: Izq.: vista según plano xy de una malla BEM sobre un ala delta con $n = 192$ paneles. Der.: potenciales $\text{sort}\{\phi\}$ obtenidos con las matrices: original \mathbf{A} , original filtrada $T_\varepsilon(\mathbf{A})$ y permutada, transformada y filtrada $\tilde{\mathbf{D}} = T_\varepsilon(\tilde{\mathbf{A}})$.

4 FORMULACIÓN FWT/BEM GLOBAL

4.1 Matriz de wavelet

Para concretar elegimos usar las onditas de Daubechies de orden $p = 4$ con $p/2 = 2$ momentos nulos, cuyos coeficientes de filtrado son $\{h_i, g_i\}$, donde

$$\begin{aligned} h_0 &= (1 + \sqrt{3})/(4\sqrt{2}) ; \\ h_1 &= (3 + \sqrt{3})/(4\sqrt{2}) ; \\ h_2 &= (3 - \sqrt{3})/(4\sqrt{2}) ; \\ h_3 &= (1 - \sqrt{3})/(4\sqrt{2}) ; \end{aligned} \tag{1}$$

con $g_i = (-1)^i h_{p-1-i}$, para $i = 0, \dots, (p-1)$, es decir,

$$\begin{aligned} g_0 &= h_3 ; \\ g_1 &= -h_2 ; \\ g_2 &= h_1 ; \\ g_3 &= -h_0 . \end{aligned} \tag{2}$$

Como no haremos aquí un análisis tipo multiresolución, la única restricción sobre el número de incógnitas n del SEAL es que sea un número par (y no 2^m). Como es usual en las transformadas rápidas unidimensionales, usamos condiciones de borde periódicas, lo que implica introducir desplazamientos circulares en la construcción de la matriz de

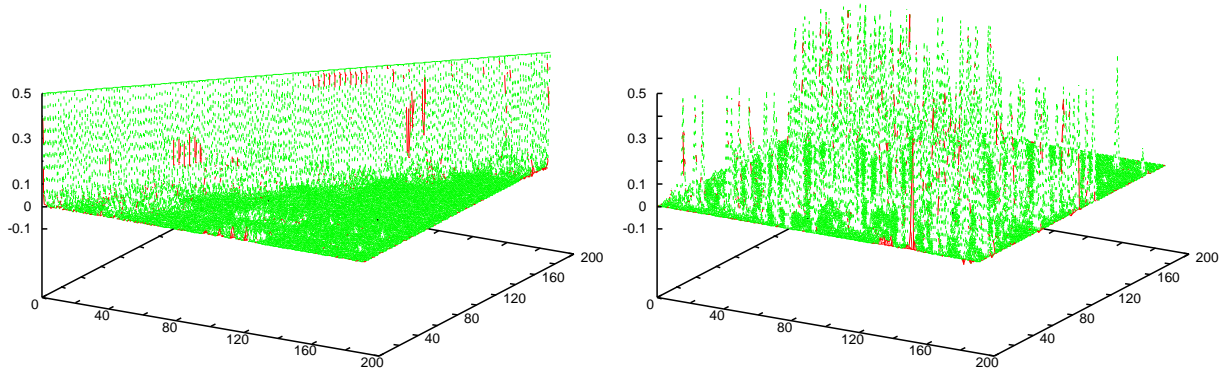


Figura 5: Estrategia global sobre la matriz del sistema \mathbf{A} obtenida por BEM en el caso de flujo potencial invíscido exterior a un ala delta con $n = 192$ paneles. Izq.: matriz original \mathbf{A} . Der.: matriz permutada $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}$.

wavelet \mathbf{H} . Por ejemplo, para $n = 6$ tendremos

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ g_2 & g_3 & 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix}; \quad (3)$$

como es conocido esta base de Daubechies es ortonormal, es decir, se cumple (como puede verificarse en el ejemplo) que $\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H} = \mathbf{I}$, con $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}'$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad y $(...)'$ denota la matriz traspuesta.

4.2 La FWT en el sistema lineal original

Efectuando un cambio de base en todo el SEAL $\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{b}$ obtenido por BEM tendremos $(\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H}')(\mathbf{H}\mathbf{s}) = (\mathbf{H}\mathbf{b})$. Introduciendo

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H}' \quad ; \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{H}\mathbf{s} \quad ; \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{H}\mathbf{b} \quad ; \quad (6)$$

nos queda el SEAL transformado $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{b}}$, cuya solución $\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$ (en la práctica no usaremos la matriz inversa sino una resolución, por ejemplo, por Gauss), luego, la solución en la base original la obtenemos mediante $\mathbf{s} = \mathbf{H}'\tilde{\mathbf{s}}$.

4.3 La FWT en el sistema lineal bajo permutación de filas

En experimentos numéricos orientados a simular la presencia de “ruidos” (o “manchas”) en las matrices BEM para formulaciones integrales de Fredholm de segunda especie, in-

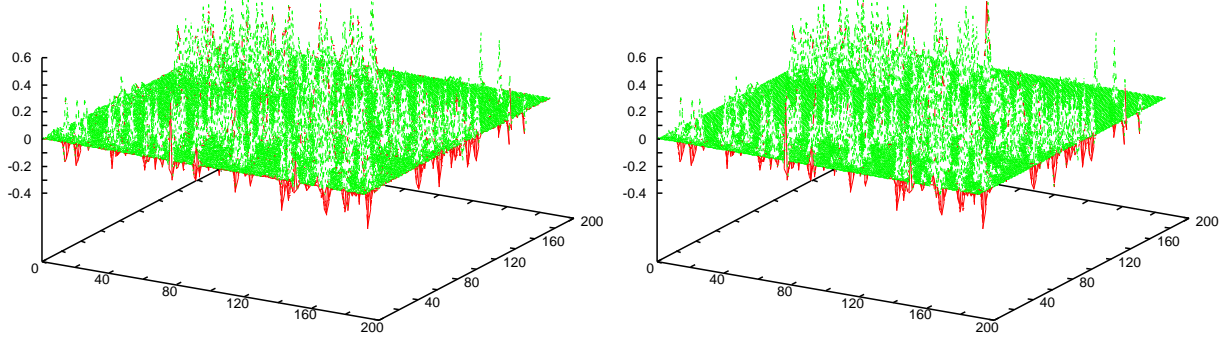


Figura 6: Estrategia global sobre la matriz del sistema \mathbf{A} obtenida por BEM en el caso de flujo potencial inviscido exterior a un ala delta con $n = 192$ paneles. Izq.: matriz permutada y transformada $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{H}'$. Der.: matriz permutada, transformada y filtrada $\tilde{\mathbf{D}}T_\varepsilon(\tilde{\mathbf{A}})$.

Introducimos la matriz de permutación de filas, diagonal por bloques,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}; \quad (7)$$

donde $\mathbf{I}_{11} \in R^{r \times r}$ es la submatriz identidad correspondiente al sector 1 no permutado (con r paneles y $0 \leq r \leq n$), mientras que $\mathbf{P}_{22} \in R^{t \times t}$ es la submatriz de permutación para el sector 2 permutado (con t paneles y $0 \leq t \leq n$), tal que se verifique $r + t = n$. Así, en el sector 2 los coeficientes dominantes son alejados en forma pseudo-aleatoria de la diagonal principal. Tal matriz de permutación exhibe, como es sabido, las conocidas propiedades $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'$. Entonces, efectuando una permutación de filas en el SEAL se tiene $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{s} = \bar{\mathbf{b}}$, donde $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{P}\mathbf{b}$ [Nota: nos restringiremos a una permutación de filas a los efectos de dar más énfasis en las vistas de las matrices permutadas que se incluyen en los ejemplos numéricos, pero los resultados se mantienen prácticamente sin cambios bajo permutaciones de filas y de columnas]. A continuación, efectuamos el cambio de base como antes, i.e., $(\mathbf{H}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{H}')(\mathbf{H}\mathbf{s}) = (\mathbf{H}\bar{\mathbf{b}})$. Introduciendo ahora

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{H}' \quad ; \quad \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{s}} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{b}} \quad ; \quad (8)$$

nos queda el SEAL permutado por filas y transformado $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{b}}$, cuya solución $\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$. Luego, la solución en la base original la obtenemos mediante $\mathbf{s} = \mathbf{H}'\tilde{\mathbf{s}}$.

4.4 Matriz rala en la base de wavelet mediante truncación

Luego de obtener la matriz transformada por wavelet $\tilde{\mathbf{A}}$, se intenta aproximarla mediante una matriz rala aproximada

$$\tilde{D}_{ij} = \begin{cases} \tilde{A}_{ij} & \text{si } |\tilde{A}_{ij}| > \varepsilon; \\ 0 & \text{en caso contrario;} \end{cases} \quad (9)$$

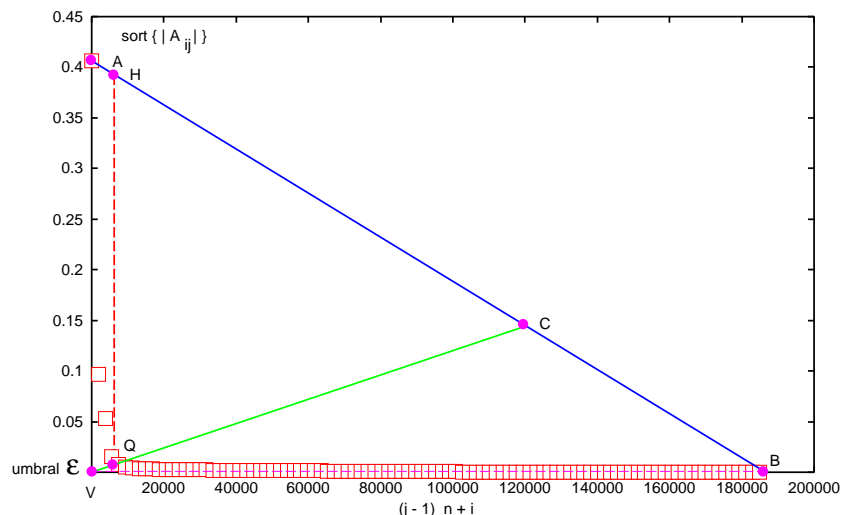


Figura 7: Histograma ordenado de la matriz promediada y transformada $-\text{sort}\{-|A_{ij}|\} = f[(j-1)n+i]$, con $i, j = 1, \dots, n$: esfera con $n = 432$ paneles.

para $i, j = 1, \dots, n$, que resulta de introducir un procedimiento de truncación ε , donde ε es el parámetro de corte para retener o descartar los coeficientes matriciales. Tal parámetro de corte se lo puede obtener mediante un diagrama triangular que se construye sobre el histograma ordenado de la matriz promediada y transformada $-\text{sort}\{-|A_{ij}|\} = f[(j-1)n+i]$, con $i, j = 1, \dots, n$, e.g. ver Fig. 4, en donde se busca la máxima diferencia entre el histograma y el segmento secante AB (para mayores detalles ver González⁴ *et al.*). Luego de haber efectuado la truncación, el grado de ralidad se lo podrá cuantificar mediante la tasa de compresión $\tau_c = N(\mathbf{A})/N(\mathbf{D})$, donde $N(\mathbf{X})$ es el número de coeficientes no nulos en la matriz \mathbf{X} . Es claro que para la matriz densa \mathbf{A} tendremos que $N(\mathbf{A}) = n^2$. Así, cuando la matriz del sistema (o “matriz imagen”) \mathbf{A} sea lo suficientemente suave, entonces mayor es τ_c , es decir, mayor es el grado de ralidad de la matriz rala aproximada \mathbf{D} y, por ende, mayor será la tasa de compresión alcanzada.

5 FORMULACIÓN FWT/BEM ZONAL

Otras veces, en BEM se pueden predecir las zonas en donde la matriz del sistema no será tan dominante en la diagonal principal, lo cual nos permite distinguir, al menos, una cierta zona suave, usualmente muy extensa, y otra más ruidosa pero mucho más localizada. Este hecho sugiere introducir el particionamiento matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}; \quad (10)$$

para el SEAL original y

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix}; \quad (11)$$

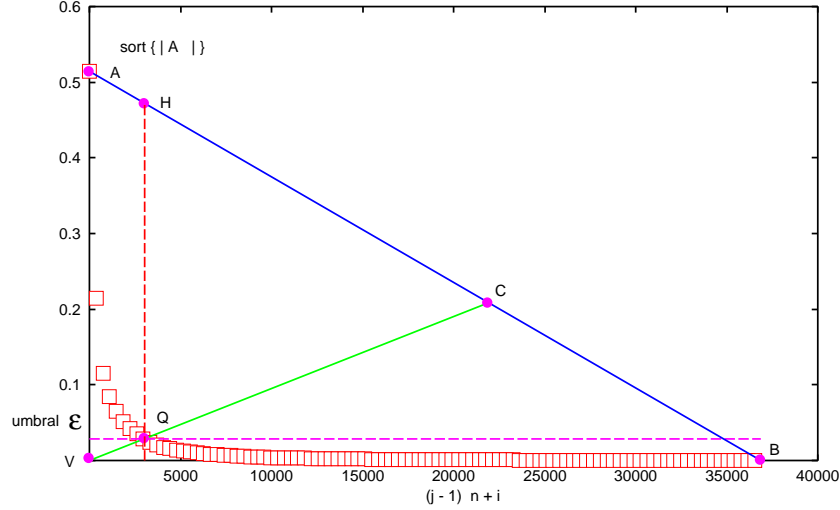


Figura 8: Histograma ordenado de la matriz promediada y transformada $-\text{sort}\{-|A_{ij}|\} = f[(j-1)n+i]$, con $i, j = 1, \dots, n$: ala delta con $n = 192$ paneles.

para la matriz de transformación \mathbf{H} , donde el primer bloque corresponderá a la zona suave (o sea, \mathbf{H}_1 es una matriz de wavelet propiamente dicha), mientras que el restante representará la zona “ruidosa” (por eso no haremos FWT ahí y, por tanto, \mathbf{H}_{22} se reducirá a la matriz identidad \mathbf{I}_{22}). Luego repetimos el análisis de la Sec. 4.2, esto es,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}'_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}; \quad (12)$$

y efectuando los productos matriciales,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_{11} \mathbf{H}'_1 & \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_{12} \mathbf{H}'_2 \\ \mathbf{H}_2 \mathbf{A}_{21} \mathbf{H}'_1 & \mathbf{H}_2 \mathbf{A}_{22} \mathbf{H}'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{H}_2 \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{H}_2 \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Introduciendo las matrices

$$\tilde{\mathbf{A}}_{11} = \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_{11} \mathbf{H}'_1 \quad ; \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{12} = \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_{12} \mathbf{H}'_2 \quad ; \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{21} = \mathbf{H}_2 \mathbf{A}_{21} \mathbf{H}'_1 \quad ; \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{22} = \mathbf{H}_2 \mathbf{A}_{22} \mathbf{H}'_2 \quad ; \quad (17)$$

y los vectores

$$\tilde{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{s}_1 \quad ; \quad \tilde{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{b}_1 \quad ; \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{H}_2 \mathbf{s}_2 \quad ; \quad \tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{H}_2 \mathbf{b}_2 \quad ; \quad (19)$$

nos queda el SEAL transformado por zonas

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{s}}_1 \\ \tilde{\mathbf{s}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

6 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Consideremos el flujo exterior invíscido alrededor de cuerpos en una corriente uniforme aguas arriba bajo dos geometrías: la esfera unitaria y un ala delta con perfil de Joukowski (obtenido por transformación conforme). La esfera es discretizada con 192 y 432 paneles, ver Fig. 1 (Izq.), mientras que en el ala delta usamos 192 paneles, ver Fig. 4 (Izq.). Los potenciales $\text{sort}\{\phi\}$ obtenidos con las matrices: original \mathbf{A} , original filtrada $T_\varepsilon(\mathbf{A})$ y permutada, transformada y filtrada $\tilde{\mathbf{D}} = T_\varepsilon(\tilde{\mathbf{A}})$, se muestran en la Fig. 1 (Der.). En el caso de la esfera, en la Fig. 2 se muestran vistas de la matriz del sistema original \mathbf{A} (Izq.) y de la matriz permutada $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}$ (Der.), mientras que en la Fig. 3 se muestran vistas de la matriz permutada y transformada $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{H}'$ (Izq.), y de la matriz permutada, transformada y filtrada $\tilde{\mathbf{D}} = T_\varepsilon(\tilde{\mathbf{A}})$ (Der.). Las correspondientes al caso del ala delta se muestran en las Figs. 5 y 6. Las tasas de compresión de las matrices aproximadas del sistema \mathbf{D} que se obtienen con las truncaciones $T_\varepsilon(\mathbf{A})$ (sobre la matriz original), $T_\varepsilon(\tilde{\mathbf{A}})$ (sobre la matriz transformada) se resumen en la Tabla adjunta. El umbral ε utilizado para retener o descartar los coeficientes matriciales, según Ec. 9, fue obtenido mediante el diagrama triangular que se construye sobre el histograma ordenado de la matriz promediada y transformada $-\text{sort}\{-|A_{ij}|\} = f[(j-1)n+i]$, con $i, j = 1, \dots, n$, buscando la máxima diferencia entre el histograma y el segmento secante AB , e.g. ver Figs. 7 y 8. En estos casos, las relativas altas tasas de compresión se debe a la suavidad de las geometrías consideradas.

	esfera	esfera	ala delta
número de paneles n	192	432	192
% permutación aleatoria	100 %	100 %	100 %
% coefic. excluidos en $T_\varepsilon(\tilde{\mathbf{A}})$	54 %	55 %	92 %
% coefic. excluidos en $T_\varepsilon(\mathbf{A})$	35 %	23 %	98 %
número de condición $\kappa_{\mathbf{A}}$	2	2	17
$\max A_{ij} $	0.5	0.5	0.5
$\min A_{ij} $	0.001152	0.004951	$7.6744 \cdot 10^{-8}$
umbral ε	0.001659	0.000495	0.028040

7 CONCLUSIONES

Cuando la matriz del sistema \mathbf{A} obtenida por BEM se corresponda a una imagen digital suficientemente suave, se puede intentar la construcción de una matriz aproximada $\mathbf{D} \approx \mathbf{A}$, de naturaleza rala, mediante el uso directo de las transformadas de wavelet. Empero, cuando este no sea el caso, la tasa de compresión no resulta muy buena (ya que se deben retener más coeficientes), por lo que se debe pasar a otras estrategias, por ejemplo, transformadas de wavelet acopladas con algoritmos de segmentación (primero explorar toda la matriz para decidir dónde introducir los cortes que faciliten la compresión y luego recalcular), o bien pasar a una formulación FWT/BEM tipo zonal. Otro próximo paso a seguir sería una paralelización de esta transformada, e.g. adaptando la propuesta de Holmström⁸

para un *cluster Beowulf*, esto es, una máquina paralela construída, por ejemplo, con computadoras personales bajo Linux, el cual puede reconocerse como un procesador en paralelo de pequeña escala [Small-Scale Parallel machine (SSP)] siguiendo la nomenclatura de Press⁹ *et al.*, esto es, donde el número de procesadores p disponibles es mucho menor que el tamaño del problema (el número de incógnitas n). En el CIMEC, desde hace ya algunos años, disponemos del cluster *Gerónimo*, para mayores detalles visitar la página de internet <http://venus.ceride.gov.ar/twiki/bin/view/Cimec/GeronimoCluster>.

Agradecimientos Este trabajo fue desarrollado con subsidios de CONICET, ANPCyT y UNL, a través de los proyectos CONICET-PIP-198/98 *Germen-CFD*, SECyT-FONCyT-PICT-6973 *PROA*, SECyT-PID-99/74 *FLAGS* y CAI+D-UNL-PIP-02552-2000. Se ha hecho uso de *Software Libre* como las librerías MPI, *SO GNU/Linux*, *Octave*, *Xfig*, *Tgif*, *OpenDx*, *GMV* y otros.

REFERENCIAS

- [1] S. Kim and S.J. Karrila. *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*. Butterwoth - Heinemann, (1991).
- [2] T. von Petersdorff and C. Schwab. *Multiscale wavelet methods for Partial Differential Equations*, volume 1, chapter Fully discrete multiscale Galerkin BEM, pages 287–346. Academic Press, (1997).
- [3] B.R. Belkyn, R. Coifman, and V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms i. *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**, 141–183 (1991).
- [4] P. González, J.C. Cabaleiro, and T.F. Pena. Parallel iterative solvers involving fast wavelet transforms for the solution of BEM systems. *Adv. in Engng. Software*, **33**, 417–426 (2002).
- [5] H.A. Aimar, A.L. Bernardis, and I.C. Hernández. Reconstrucción estable: bases o pseudobases ? In *Mecánica Computacional, X Congress on Numerical Methods and their Application*, pages 461–470, (November 10-14 1997).
- [6] E.J. Stollnitz, T.D. De Rose, and D.H. Salesin. Wavelets for computer graphics: a primer. part i. *IEEE Computer Graphics and Applications*, **15**(3), 76–84 (1995).
- [7] S. Mallat. *A wavelet tour for signal processing*. Academic Press, (1999).
- [8] M. Holmström. Parallelizing the fast wavelet transform. *Parallel Computing*, **21**, 1837–1848 (1995).
- [9] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2nd edition, (1992).