

## ESTABILIZACIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE ADVECCIÓN DOMINANTE A TRAVÉS DEL DESPLAZAMIENTO DE DOMINIOS

**Santiago A. Urquiza\*, Pablo J. Blanco\* y Sebastián Chevalier\***

\*Laboratorio de Bioingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata.  
Av. Juan B. Justo 4302, (7600) Mar del Plata, Argentina. TE: 54-(0223)-4816600-Interno 252  
e-mail: [santiagourquiza@fi.mdp.edu.ar](mailto:santiagourquiza@fi.mdp.edu.ar)

**Palabras clave:** Estabilización, Dominios Desplazados, Inestabilidades Numéricas, FEM.

**Resumen.** *En el presente trabajo se desarrolla una técnica de “Dominios Desplazados” como una alternativa variacional para la estabilización de las ecuaciones de transporte y, en general, para tratar las inestabilidades numéricas presentes en problemas con fuertes gradientes o capas límites. Este método conduce bajo ciertas circunstancias a las formulaciones clásicas de estabilización, tales como SUPG y FIC. Conjuntamente, se propone un método para la determinación de los desplazamientos. Se aplica la técnica aquí desarrollada a problemas de advección-difusión-reacción unidimensionales comparándose los resultados con las soluciones exactas y las obtenidas con el esquema de Galerkin puro.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que lograr un esquema numérico adecuado para la resolución de las ecuaciones de transporte bajo regímenes de advección dominante representa, actualmente, uno de los principales objetivos en el campo del modelado computacional. En el contexto de métodos numéricos tales como Diferencia Finitas (DF), Volúmenes Finitos (VF) y Elementos Finitos (EF) una solución inmediata ha sido encontrada al introducir alguna clase de difusión artificial que realice un balance adecuado de las ecuaciones y que evite la aparición de oscilaciones en la vecindad de elevados gradientes.

En los últimos años, un gran número de trabajos se han dedicado al desarrollo y la investigación en este campo con el fin de establecer las raíces de los problemas de las inestabilidades numéricas ocurridas bajo las circunstancias expresadas<sup>3,14</sup>. Recientemente, Oñate y colaboradores han propuesto una vía alternativa con el propósito de establecer técnicas de estabilización en donde los términos que tienen el cometido de lograr el correcto balance de las ecuaciones diferenciales sean incorporados en forma natural en la formulación del problema a través de realizar adecuadas modificaciones en la derivación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno<sup>5-10</sup>. Esta metodología es denominada Método de Cálculo Finitesimal (MCF o FIC de su traducción al inglés), que además plantea una ventaja, y que es la posibilidad de determinar los parámetros de estabilización de manera numérica conjuntamente con la solución, prescindiendo así de las estimaciones a priori de dichos coeficientes.

El propósito de este trabajo es presentar una técnica en donde los términos que procuran la eliminación de las inestabilidades aparezcan naturalmente en la formulación variacional del problema. Esta técnica puede interpretarse como una metodología de “Dominios Desplazados” debido a que se parte de una formulación variacional que introduce un corrimiento del dominio original cuya magnitud es regulada en orden a obtener soluciones estables.

Adicionalmente, para establecer un planteo completo del problema, se implementa una técnica alternativa para obtener los parámetros de desplazamiento de los dominios que en esta formulación cumplen el rol de parámetros de estabilización. La misma tiene origen en la minimización de los cuadrados de los residuos desplazados. De esta manera la estabilización se logra en base a las propias características del problema al igual que en el MCF. Se destaca el hecho que las soluciones mejoradas a partir de la recuperación de gradientes no son suficientes en presencia de fuertes capas límites, para lo cual se propone una modificación en la recuperación de los gradientes a través de interpolaciones exponenciales en dichas zonas.

## 2. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ADVECCIÓN-DIFUSIÓN

Varios problemas de la física se encuentran gobernados por ecuaciones diferenciales donde el balance de los mecanismos de advección-difusión se hace presente, tales como el de transferencia de calor estacionaria. A los efectos de la presentación del método particularizamos a dominios bidimensionales, sin que esto implique una pérdida de generalidad.

De esta manera la ecuación diferencial que gobierna estos fenómenos resulta en la siguiente forma:

$$r(x,y) = -\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{N}} T + \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{N}} T + Q \quad \text{con} \quad r(x,y) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $T$  es un campo escalar que representa la variable transportada,  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes de la velocidad en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente,  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$  son las difusividades en las direcciones respectivas y  $Q$  es un término fuente por unidad de volumen.

Las condiciones de contorno sobre el dominio  $\Omega$  completan la descripción del problema y se especifican, en general, de la siguiente forma:

$$T = \bar{T} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D$$

$$\bar{q}_n = -\mathbf{n}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{N}} T \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N \quad (2)$$

siendo  $\Gamma_D$  la frontera de Dirichlet, y  $\Gamma_N$  la frontera de Neumann. Además debe cumplirse que  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$  y que  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ .

### 3. EL MÉTODO DE LOS DOMINIOS DESPLAZADOS (MDD)

Las técnicas de tipo SUPG y GLS<sup>1,2</sup>, se basan en el adición de términos de estabilización en la formulación variacional del problema con el objetivo de ponerle cota a las derivadas de menor orden, obteniendo los parámetros de estabilización con estimaciones a priori de los errores de aproximación. En contraste, el MCF modifica las ecuaciones diferenciales del problema partiendo de balances en dominios de tamaño finito de los cuales se derivan naturalmente los términos de estabilización, quedando ciertos parámetros libres que se ajustan conjuntamente con la solución.

En este trabajo, se propone una alternativa a la derivación de las ecuaciones estabilizadas reformulando las ideas generales subyacentes en el MCF devolviendo el punto de partida al contexto variacional, a partir del concepto de residuos ponderados en dominios desplazados.

#### 3.1 El concepto básico. La formulación general

Sea un problema cualquiera como puede ser el descrito por el residuo "r" de la (1), una formulación clásica de residuos ponderados establece lo siguiente:

$$\int_{\Omega'} r(\mathbf{x}') w(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 0 \quad (3)$$

donde "w" es la función de peso y  $\mathbf{x}'$  es el vector posición respecto del cuál está planteada la resolución del problema. La esencia del MDD se observa en la figura 1, e implica realizar un desplazamiento del dominio en donde es formulado el problema variacional, es decir pasar de las coordenadas  $\mathbf{x}'$  a  $\mathbf{x}$ , lo que significa un cambio en el dominio de integración con la

consiguiente transformación de coordenadas. De esta manera la expresión (3) puede reformularse en el dominio desplazado  $\Omega$  y tiene su equivalencia en la expresión que sigue:

$$\int_{\Omega'} r(\mathbf{x}') w(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_{\Omega} r(\mathbf{x} - \mathbf{h}) w(\mathbf{x} - \mathbf{h}) |\mathbf{J}| d\mathbf{x} = 0 \quad (4)$$

siendo  $|\mathbf{J}|$  el determinante de la matriz Jacobiana necesario para realizar la transformación de coordenadas,  $\Omega'$  es el dominio original en donde se plantea el problema y  $\mathbf{h}$  es un campo de desplazamientos respecto del dominio  $\Omega$ .

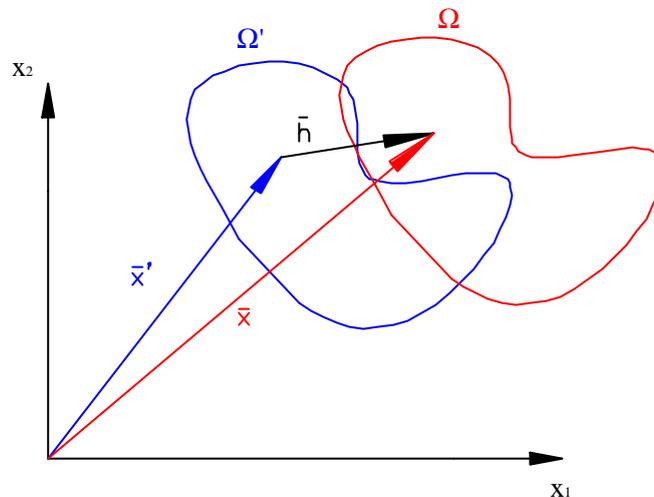


Fig. 1 Desplazamiento del dominio.

Si se considera  $\mathbf{h}$  como un campo de pequeños desplazamientos, es posible escribir los términos desplazados desarrollados en serie de Taylor de primer orden de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x} - \mathbf{h}) &= r(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}} r \\ w(\mathbf{x} - \mathbf{h}) &= w(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}} w \end{aligned} \quad (5)$$

Desde ya que un mayor orden de aproximación en los desarrollos de Taylor es posible, sin embargo, por simplicidad, nos acotamos al caso de primer orden. Por otro lado, la expresión dada para el determinante del Jacobiano de la transformación, considerando pequeños desplazamientos, es la siguiente<sup>2</sup>:

$$|\mathbf{J}| = 1 - \text{div } \mathbf{h} \quad (6)$$

Luego de reemplazar la (5) y la (6) en la (4) se obtiene lo siguiente:

$$\int_{\Omega} (r - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}} r) (w - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}} w) (1 - \text{div } \mathbf{h}) d\Omega = 0 \quad (7)$$

distribuyendo el producto de los dos primeros paréntesis de la integral resulta:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r}\mathbf{w} - \mathbf{r}\mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{r})(1 - \text{div } \mathbf{h}) d\Omega = 0 \quad (8)$$

donde se han eliminado los términos de orden  $\|\mathbf{h}\|^2$ . Finalmente, luego de un poco de trabajo algebraico se llega a la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r}\mathbf{w} - \text{div}(\mathbf{h}\mathbf{r}\mathbf{w}) + \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{w}\mathbf{r}) \text{div } \mathbf{h}) d\Omega = 0 \quad (9)$$

que constituye la formulación de Dominios Desplazados con desarrollos de primer orden y pequeños desplazamientos.

### 3.2 Formulación simplificada

Partiendo de la expresión (9) vista en el apartado anterior, diversas simplificaciones pueden realizarse con el objetivo de mostrar las coincidencias con otros métodos. De esta manera, se podrá obviar el término que va con  $\text{div}(\mathbf{h})$  de acuerdo a alguna de las siguientes consideraciones:

- Restringir al campo de desplazamientos a movimientos isocóricos, es decir,  $\text{div}(\mathbf{h})$  nulo.
- Considerar  $\text{div}(\mathbf{h})$  también pequeña, es decir, pequeñas deformaciones volumétricas además de pequeños desplazamientos, lo que transforma al término que acompaña a  $\text{div}(\mathbf{h})$  en (9) en un infinitésimo de orden superior y, por lo tanto, puede ser despreciado.
- Por último y a la manera de adelanto, en el caso discreto, podrá considerarse un campo  $\mathbf{h}$  constante por trozos, es más,  $\mathbf{h}$  constante dentro de cada elemento asumiendo que la integral planteada en  $\Omega$  puede describirse como una sumatoria de integrales dentro de cada elemento, como lo plantea el SUPG, obviando los saltos en la frontera entre los mismos. Es posible así deshacernos del término antes referido que acompaña a la divergencia del campo  $\mathbf{h}$  en (9).

Con las consideraciones mencionadas, la expresión (9) resulta:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r}\mathbf{w} - \text{div}(\mathbf{h}\mathbf{r}\mathbf{w})) d\Omega = 0 \quad (10)$$

permitiendo obtener una expresión como la siguiente:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r}\mathbf{w} - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{r}\mathbf{w})) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{r}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{w})) d\Omega = 0 \quad (11)$$

que es una expresión bastante general, de la cual pueden derivarse las expresiones del MCF y del SUPG, entre otras, como así también para el caso transitorio las expresiones de los métodos de tipo Characteristic-Galerkin, todo esto de acuerdo a una elección adecuada de los campos  $\mathbf{h}$ . Es importante observar aquí, que  $\mathbf{h}$  es todavía un campo libre, y que puede ser

elegido a priori, como en el SUPG u obtenido conjuntamente con la solución como en el MCF. Además, el signo menos de la expresión (10) depende de la posible elección de los desplazamientos relativos entre  $\Omega$  y  $\Omega'$  de acuerdo al esquema de la figura 1, y que naturalmente puede ser invertido.

Es así que si se eliminan los términos que van con el gradiente de las funciones de peso, o equivalentemente, en la formulación original (4), las funciones de peso se consideran evaluadas en  $\Omega$ , resulta:

$$\int_{\Omega} (r - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}} r) w \, d\Omega = 0 \quad (12)$$

que es una expresión análoga a la del MCF<sup>5</sup>. De la misma manera, cuando se hace lo propio con el gradiente del residuo se arriba a la siguiente fórmula, que es la expresión típica de SUPG:

$$\int_{\Omega} r (w - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}} w) \, d\Omega = 0 \quad (13)$$

Las afirmaciones anteriores son válidas bajo una adecuada elección de los campos  $\mathbf{h}$  con las expresiones típicas para ambos métodos.

### 3.3 El MDD en su forma discreta para el problema de advección-difusión

Para introducir el problema discreto considérese que una interpolación de elementos finitos de una variable T puede ser escrita como:

$$T \approx \bar{T} = \sum_j \phi_j \bar{T}_j \quad (14)$$

donde  $\phi_j$  son las funciones de forma, lineales en este caso, y  $\bar{T}_j$  son los valores nodales de la función aproximada  $\bar{T}$ . La aplicación del método de elementos finitos tipo Galerkin puro a la expresión (13) resulta, luego de integrar por partes convenientemente, en lo siguiente:

$$\int_{\Omega} \left[ \mathbf{u}^T \phi_i \tilde{\mathbf{N}} (\phi_j \bar{T}_j) + (\tilde{\mathbf{N}} \phi_i)^T \mathbf{D}^{\oplus} \tilde{\mathbf{N}} (\phi_j \bar{T}_j) \right] d\Omega = \int_{\Omega} Q (\phi_i - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}} \phi_i) d\Omega - \int_{\Gamma} \phi_i q_n d\Gamma \quad (15)$$

donde, para el caso bidimensional, se tiene que

$$\mathbf{D}^{\oplus} = \mathbf{D} - \mathbf{h} \mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_x u_x & h_x u_y \\ h_y u_x & h_y u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x - h_x u_x & -h_x u_y \\ -h_y u_x & \alpha_y - h_y u_y \end{bmatrix} \quad (16)$$

Como quedó evidenciado, para desarrollar el problema de advección-difusión unidimensional se optó por una formulación del tipo de la (13), que deriva en la expresión (15) cuya equivalencia con el SUPG fue tratada anteriormente. Por esta razón, se optó por trabajar realizando la siguiente consideración  $\mathbf{h} \longrightarrow -\frac{\mathbf{h}}{2}$  lo que no le quita generalidad al

método, y se efectúa con el objeto de poder tener marcada referencia en cuanto a los valores de los desplazamientos que serán computados respecto de los conocidos parámetros de upwinding utilizados en el SUPG<sup>1</sup>. En resumen, la expresión utilizada es la siguiente:

$$\left[ \int_{\Omega} \left[ u\phi_i \frac{d\phi_j}{dx} + \left( k + \frac{uh}{2} \right) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} \right] d\Omega \right] \bar{T}_j = \int_{\Omega} Q \left( \phi_i + \frac{h}{2} \frac{d\phi_i}{dx} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \phi_i q_n d\Gamma \quad (17)$$

#### 4. CÁLCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

##### 4.1 Estimación de los desplazamientos en problemas unidimensionales de advección-difusión

Con el fin de estimar el campo de desplazamientos “h” se hace necesaria una ecuación que lo determine con un criterio establecido. Para cumplir con esta premisa se propone el siguiente funcional a minimizar:

$$\min_h \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ r_M \left( x - \frac{h}{2} \right) \right]^2 d\Omega \quad (18)$$

donde  $r_M$  es el residuo en la ecuación diferencial que se obtiene a partir de un campo de gradientes recuperado, como se discutirá más adelante. Lo anterior implica la minimización de dicho residuo desplazado en una cantidad igual a la utilizada en la formulación variacional, en este caso tomamos  $h/2$ . Si se restringe la pertenencia del campo  $h$  al espacio de las funciones constantes por trozos, como es usual,  $h$  resulta constante elemento a elemento, y la minimización de la (18) con respecto al parámetro elemental  $h^e$  (desplazamiento en el elemento  $e$ ) arroja lo siguiente:

$$\int_{\Omega_e} r_M^d \frac{\partial r_M^d}{\partial h^e} d\Omega = 0 \quad \text{con} \quad r_M^d = r_M - \frac{h^e}{2} \frac{dr_M}{dx} \quad (19)$$

Si no se considera la dependencia funcional del residuo  $r_M$  con el parámetro  $h^e$  es fácil ver que las ecuaciones se desacoplan generando una ecuación por elemento dada por:

$$\int_{\Omega_e} \left( r_M - \frac{h^e}{2} \frac{dr_M}{dx} \right) d\Omega = 0 \quad (20)$$

luego de tener en cuenta que  $\frac{dr_M}{dx} = \text{cte}$  en cada elemento.

Finalmente se arriba a la siguiente expresión, que resulta muy similar a la propuesta en trabajos anteriores<sup>5-7,11,12</sup> y equivalente a la arribada en los últimos desarrollos presentados<sup>8-10</sup>:

$$h^e = 2 \frac{r_M^{(e)}}{\left( \frac{dr_M}{dx} \right)^{(e)}} \quad (21)$$

Es así que, de esta manera, se evidencia que la elección de esta expresión corresponde a un criterio de optimalidad pero explicitándose las hipótesis que están en juego.

En caso de que el cálculo de los desplazamientos arroje valores por encima de aquél establecido como límite, que es el tamaño de elemento, se impone ese valor como desplazamiento dentro de la formulación. Por otro lado, si el denominador de la (21) resulta menor que un  $\epsilon$  establecido para cada problema se elimina el cálculo, colocando un valor nulo de desplazamiento, de esta manera se evita que la ecuación antedicha quede mal condicionada frente a soluciones con gradientes nulos o extremadamente pequeños y donde los errores numéricos pueden degradar la estimación, dejando de tener sentido la misma. Es de destacar que frente a la misma situación, en otras técnicas de estimación<sup>5</sup>, se propone el uso de  $h$  correspondiente al valor crítico del parámetro de estabilización del SUPG. De esta manera, esta consideración permite que el método agregue upwinding solamente en aquellos lugares donde es necesario estabilizar.

#### 4.2 Proyección de los gradientes

Cuando la expresión (21) es utilizada en el problema de advección-difusión se debe plantear la necesidad de evaluar las derivadas involucradas en el residuo original de manera de prestar la expresión (21) para una adecuada estimación. En consecuencia, y para evaluar correctamente el residuo en la ecuación diferencial, así como su gradiente, se debe proyectar el campo de derivadas hacia los nodos reobteniendo valores de derivadas segundas constantes dentro de cada elemento. De esta manera se podría escribir lo siguiente:

$$r_M = -u\bar{D} + k \frac{d\bar{D}}{dx} + Q \quad (22)$$

siendo  $\bar{D}$  el campo de gradientes recuperado (en el caso 1D) por medio de una proyección tipo  $L^2$  del campo de las derivadas sobre el espacio de las interpolantes lineales con que originalmente se aproximó la incógnita del problema.

#### 4.3 El problema de la capa límite

Sin embargo el método de proyección explicado anteriormente colapsa cuando se hacen presentes variaciones abruptas de la solución, como es el caso de una capa límite de espesor menor que el tamaño de los elementos. En estas circunstancias, la proyección así planteada arroja valores de gradientes de orden  $\Delta x^{-1}$  mientras que los valores reales son de orden  $\delta^{-1}$ , donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite. Por esto es que se realiza una modificación en la proyección de gradientes en aquellos elementos donde se manifiesta la presencia de fuertes capas límites de forma de reobtener valores que capturen más fielmente las variaciones

abruptas de la solución exacta. Esta necesidad surge del buen condicionamiento tanto del residuo como de su gradiente para que, de esta manera, la expresión (21) tenga sentido.

Es así que en los casos de fuertes capas límites y sólo a los efectos de la recuperación de los gradientes, se propone la siguiente interpolación exponencial:

$$\bar{T}(\xi) = \bar{T}_i + (\bar{T}_{i+1} - \bar{T}_i) e^{\frac{\text{sgn}(u)\lambda \xi}{\Delta x} - 1} \quad 0 \leq \xi \leq \Delta x \quad (23)$$

donde  $\xi$  es la coordenada local,  $\text{sgn}(u)$  introduce el sentido del campo de velocidades,  $\bar{T}$  representa la solución nodal y  $\lambda$  es el coeficiente que modifica el comportamiento de la exponencial. La ecuación para calcular  $\lambda$  se obtiene de igualar la derivada segunda en el punto medio del intervalo -aproximada por diferencias finitas con los valores nodales de las derivadas recuperadas correspondientes-, con el valor medio de la misma dada por la interpolación exponencial:

$$\lambda = \Delta x \left[ \frac{\bar{D}_{i+1}^* - \bar{D}_i}{\bar{T}_{i+1} - \bar{T}_i} \right] \quad (24)$$

donde  $\bar{D}_{i+1}^*$  se obtiene de derivar la expresión (23) y evaluarla en  $\Delta x$ .

### 5. PROBLEMAS DE ADVECCIÓN-DIFUSIÓN UNIDIMENSIONALES

Se propone resolver la ecuación de advección-difusión del campo de temperaturas en un dominio unidimensional de longitud  $L$  con condiciones de Dirichlet en ambos extremos, como indica la figura 2, y con términos de generación de calor por unidad de volumen determinados en cada caso. La discretización se realiza con  $N_{el}$  elementos lineales de longitud  $\Delta x$ , con lo que se establecen de inmediato los valores del número de Pe local ( $Pe^L$ ) y global ( $Pe^G$ ). La cantidad de iteraciones realizadas se simboliza con  $N^{it}$ .

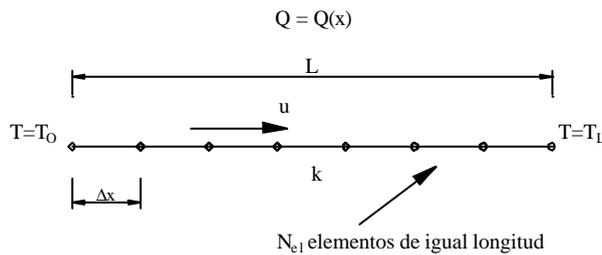


Fig. 2 Modelo genérico del problema a resolver.

La formulación utilizada es la (17). Además se incluye el valor del parámetro en caso de que se utilizara un esquema SUPG, al que se denomina  $h_{br}$ , y se define en base a la conocida expresión<sup>1</sup>  $h_{cr} \geq (1 - 1/Pe)\Delta x$ .

### 5.1 Ejemplo 1: término fuente nulo y $Pe^L=2$

A continuación se dan los datos que definen el problema y los resultados obtenidos:

$T_O$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$\Delta x$	$N_{el}$	$\varepsilon$	$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	1	4	1	20	1	20	$1.10^{-8}$	80	2	0	0.5	28

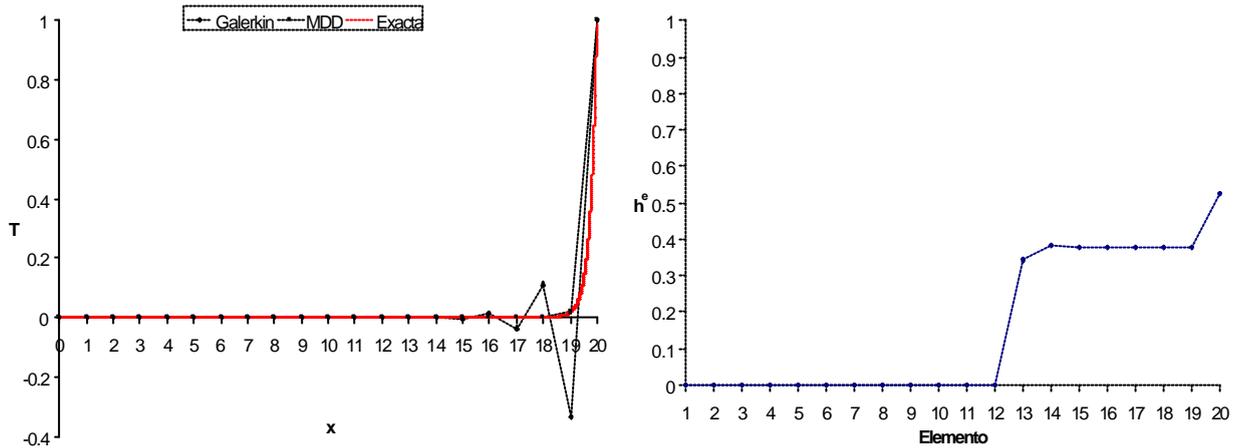


Fig. 3 Comparación del campo solución y campo de desplazamientos correspondientes al ejemplo 1.

### 5.2 Ejemplo 2: término fuente constante y $Pe^L=12.5$

A continuación se dan los datos que definen el problema y los resultados obtenidos:

$T_O$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$\Delta x$	$N_{el}$	$\varepsilon$	$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	0	500	1	1	0.05	20	$6.10^{-2}$	500	12.5	100	0.046	7

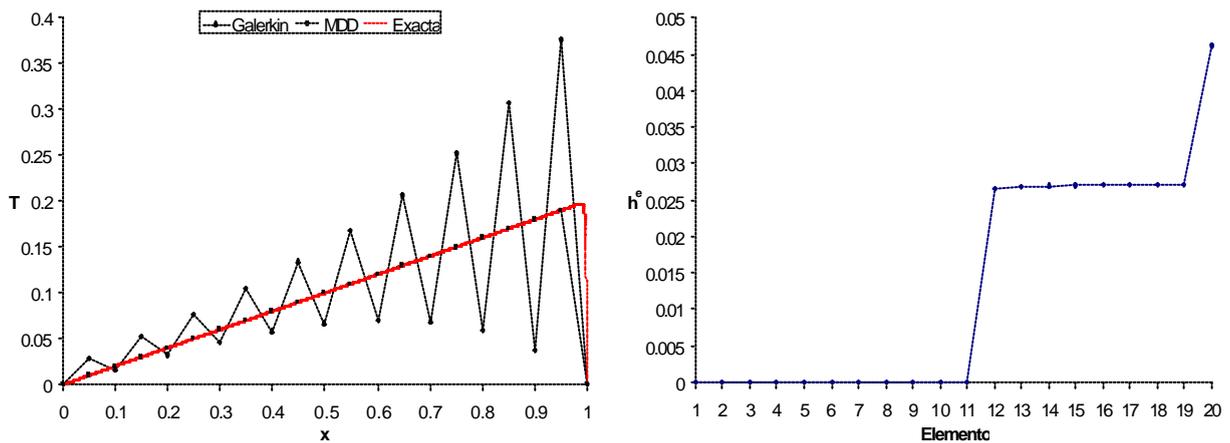


Fig. 4 Comparación del campo solución y campo de desplazamientos correspondientes al ejemplo 2.

### 5.3 Ejemplo 3: término fuente senoidal y $Pe^L=2.5$

A continuación se dan los datos que definen el problema y los resultados obtenidos:

$T_O$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$\Delta x$	$N_{el}$	$\epsilon$	$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	0	1	0.01	1	0.05	20	$3 \cdot 10^{-1}$	100	2.5	$100\text{sen}(\pi x)$	0.03	6

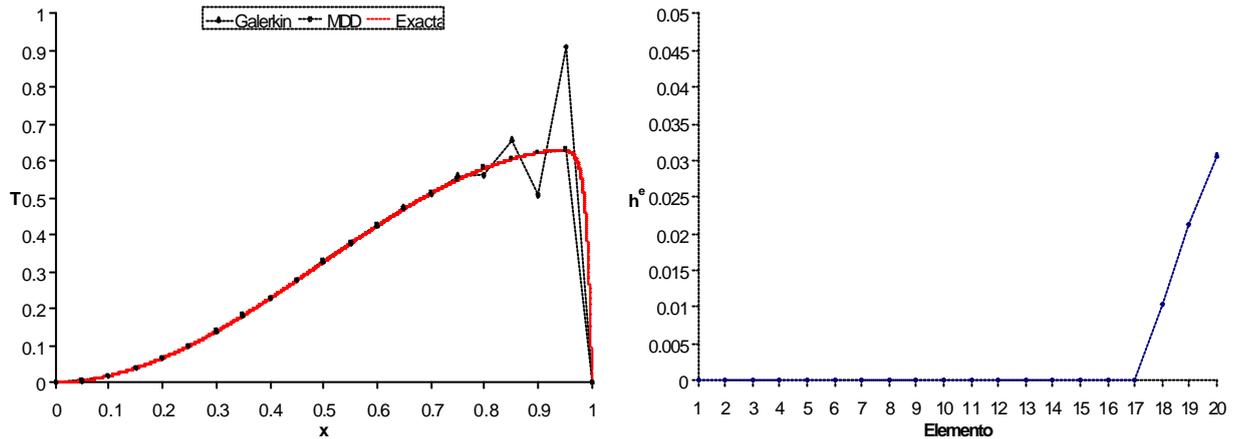


Fig. 5 Comparación del campo solución y campo de desplazamientos correspondientes al ejemplo 3.

## 6. PROBLEMAS DE ADVECCIÓN-DIFUSIÓN-REACCIÓN UNIDIMENSIONALES

Trataremos el problema del transporte de concentraciones como otra posible aplicación del MDD. El fenómeno físico está regido, para el caso 1D, por la siguiente ecuación diferencial:

$$-u \frac{dC}{dx} + \alpha \frac{d^2C}{dx^2} - sC + Q = 0 \quad (25)$$

donde  $C$  es la concentración y  $s$  es el coeficiente que pondera el fenómeno de reacción.

La aparición de capas límites puede darse debido a un régimen de advección dominante como a uno de reacción dominante. El problema se caracteriza por los siguientes números adimensionales:

$$Pe = \frac{u \Delta x}{\alpha} \quad Rn = \frac{s \Delta x^2}{\alpha} \quad (26)$$

Para desarrollar este problema se optó nuevamente por una formulación del tipo de la (13), realizándose también la siguiente consideración  $h \rightarrow \frac{h}{2}$  de acuerdo a lo explicado anteriormente. Luego de introducir una discretización de elementos finitos a la formulación variacional resulta:

$$\left[ \int_{\Omega} \left[ u \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} + \left( k + \frac{uh}{2} \right) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} + s \left( \phi_i + \frac{h}{2} \frac{d\phi_i}{dx} \right) \phi_j \right] d\Omega \right] \bar{C}_j = \int_{\Omega} Q \left( \phi_i + \frac{h}{2} \frac{d\phi_i}{dx} \right) d\Omega + t \quad (27)$$

mientras que para la estimación de los desplazamientos se recurre a la expresión (21) obteniendo lo siguiente:

$$h^e = 2 \left[ \int_{\Delta x} \left( -u \bar{D} + k \frac{d\bar{D}}{dx} - s \bar{C} + Q \right) dx \right] / \left[ \int_{\Delta x} \left( -u \frac{d\bar{D}}{dx} - s \bar{D} + \frac{dQ}{dx} \right) dx \right] \quad (28)$$

donde  $\bar{D}$  es el campo de derivadas recuperado de la manera propuesta en el apartado 4.2 y 4.3.

### 6.1 Ejemplo 4: reacción pura, $Rn^L=12.5$

A continuación se dan los datos que definen el problema y los resultados obtenidos:

$q_0$	$C_L$	$u$	$K$	$S$	$L$	$\Delta x$	$N_{el}$	$\epsilon$	$Pe^G$	$Pe^L$	$Rn^G$	$Rn^L$	$Q(x)$	$N^{it}$
0	0	0	1	10000	1	0.05	20	$1.10^1$	0	0	5000	12.5	1000	11

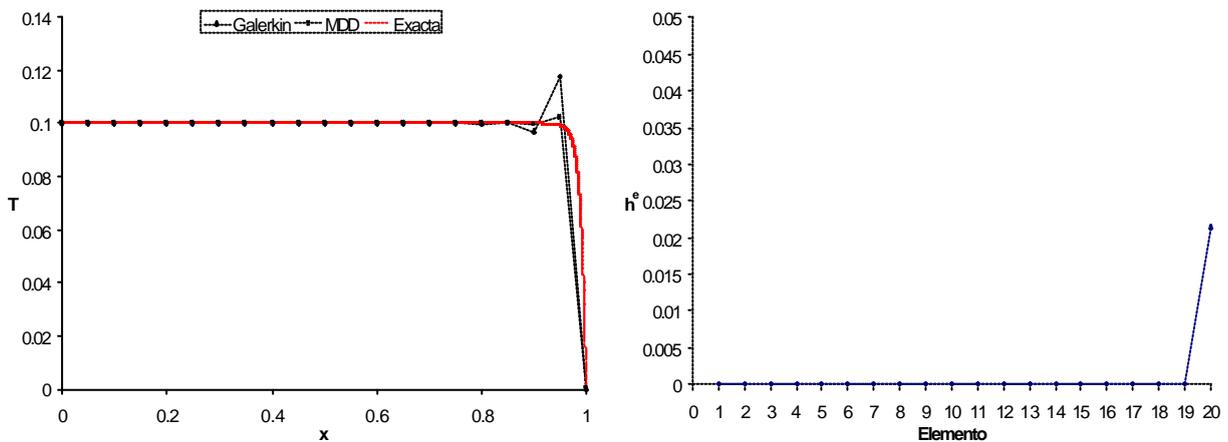


Fig. 6 Comparación del campo solución y campo de desplazamientos correspondientes al ejemplo 4.

### 6.2 Ejemplo 5: reacción dominante, $Rn^L=12.5$ y $Pe^L=1$

A continuación se dan los datos que definen el problema y los resultados obtenidos:

$q_0$	$C_L$	$u$	$k$	$s$	$L$	$\Delta x$	$N_{el}$	$\epsilon$	$Pe^G$	$Pe^L$	$Rn^G$	$Rn^L$	$Q(x)$	$N^{it}$
0	0	40	1	10000	1	0.05	20	$1.10^1$	20	1	5000	12.5	1000	55

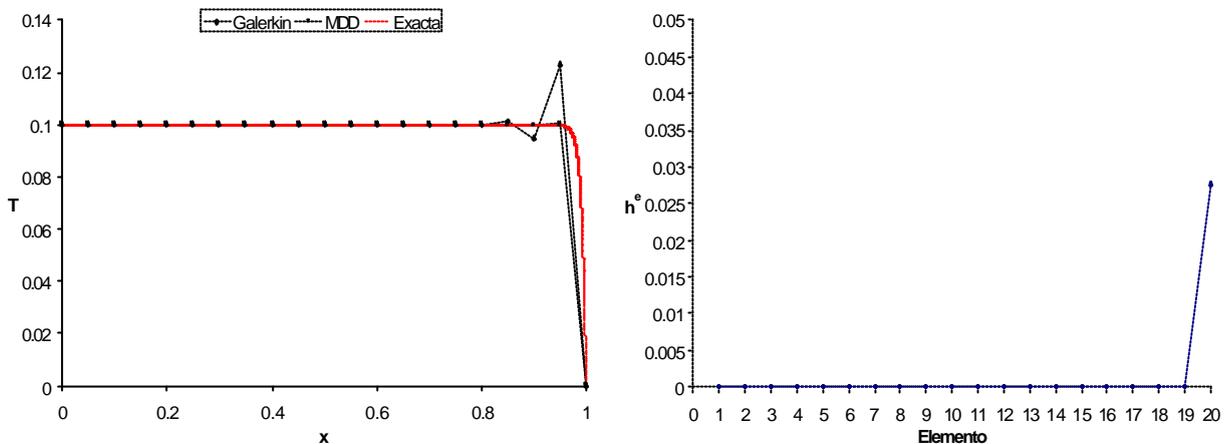


Fig. 7 Comparación del campo solución y campo de desplazamientos correspondientes al ejemplo 5.

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una alternativa de estabilización numérica denominada Método de los Dominios Desplazados para la resolución de problemas por medio del método de elementos finitos. Se destacan los puntos de contacto con el SUPG y con el MCF especialmente, ya que la alternativa aquí propuesta ha sido inspirada en este último.

En cuanto a la estimación de los desplazamientos necesarios para estabilizar las soluciones, se derivaron expresiones que resultan similares a las propuestas en trabajos anteriores<sup>5-12</sup>, pero reformulándoselas en un contexto de optimización de residuos.

Del análisis del MCF y del MDD, y con el fin de lograr una correcta evaluación del residuo y su gradiente, se desprende una significativa dependencia de los desplazamientos respecto del campo de derivadas proyectado. Esto llevó a la implementación de formas especiales para la recuperación de los gradientes en los casos de fuertes capas límites, haciendo posible así la estimación de los desplazamientos en dichas zonas. La interpolación exponencial propuesta mostró buen comportamiento, ajustándose a las necesidades de cada caso.

Para validar la técnica se analizaron diversos problemas donde los mecanismos de advección-difusión-reacción se hacían presentes, obteniendo buenos resultados en todos los casos analizados.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- [1]. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, McGraw Hill, Vol. I-III (1989-1991).
- [2]. K. W. Morton, *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*, Applied Mathematics and Mathematical Computation 12, Chapman and Hall (1996).
- [3]. L.P. Franca, S.L. Frey and T.J.R. Hughes, "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **95**, 253-276 (1992).

- [4]. E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, "A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **39**, 3839-3866 (1996).
- [5]. E. Oñate, "Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **151**, 233-265 (1998).
- [6]. E. Oñate and M. Manzan, *Stabilization Techniques for Finite Element Analysis of Convection-Diffusion Problems*, Publication CIMNE N° 183, Barcelona, February 2000.
- [7]. E. Oñate, *On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems*, Publication CIMNE N°81, Barcelona, October 1996.
- [8]. E. Oñate, "Possibilities of Finite Increment Calculus in Computational Mechanics", to be published in *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- [9]. E. Oñate and J. García, "A finite Element Method for Fluid-Structure Interaction with Surface Waves Using Finite Increment Calculus Formulation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **191**, 635-660 (2001).
- [10]. E. Oñate, "A Stabilized Finite Element Method for Incompressible Viscous Flows using a Finite Increment Calculus Formulation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **182**, 355-370 (2000).
- [11]. E. Oñate, J. García and S. Idelsohn, "An Alpha-Adaptive Approach for Stabilized Finite Element Solution of Advective-Diffusive Problems with Sharp Gradients", *New Advances in Adaptive Comput. Methods in Mech.*, Elsevier, P. Ladeveze, J. T. Oden (Eds.) (1998).
- [12]. E. Oñate, J. García and S. Idelsohn, "Computation of the Stabilization Parameter for the Finite Element Solution of Advective-Diffusive Problems", *Int. J. Num. Methods Fluids*, **25**, 1385-1407 (1997).
- [13]. R. Codina, E. Oñate and M. Cervera, "The intrinsic time for the streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation using quadratic elements", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **94**, 239-262 (1992).
- [14]. R. Codina, "On Stabilized Finite Element Methods for Linear Systems of Convection-Diffusion-Reaction Equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **188**, 61-82 (2000).
- [15]. O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **101**, 207-224 (1992).