

COMBINAÇÕES DE DEFORMAÇÕES PARA CONTROLAR TRAJETÓRIAS DE EQUILÍBRIO EM ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS

Roque L. Pitangueira e Jamile S. Fuina

Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais
Av. do Contorno 842, 2º andar, 30110-060 Belo Horizonte, Brasil. TEL: 55-(031)-32381026
e-mails: roque@dees.ufmg.br , jamile@dees.ufmg.br

Palavras Chave: Método dos Elementos Finitos, Programação Orientada a Objetos, Análise Não-Linear, Controle de Deformações.

Resumo. *Este artigo apresenta o estágio atual do desenvolvimento de um sistema computacional para análise não-linear de estruturas. Trata da parte do núcleo numérico do sistema, responsável pela obtenção de trajetórias de equilíbrio através de métodos incrementais-iterativos. O sistema em desenvolvimento tem como base um programa de elementos finitos que utiliza o paradigma de programação orientada a objetos como técnica de implementação. Discutem-se as limitações dos métodos incrementais-iterativos clássicos na solução de problemas fisicamente não-lineares e propõe-se um método que contempla a mecânica do processo de deterioração do material utilizando uma combinação das deformações em sub-domínios do problema. Apresenta-se a formulação deste método utilizando deslocamentos incrementais e matriz de rigidez tangente. Os sub-domínios de controle são caracterizados como agrupamentos de pontos de Gauss, uma vez que no Método dos Elementos Finitos as deformações são obtidas nestes pontos. Assim, algumas combinações de deformações são implementadas e é realizado um estudo da adequação das mesmas à solução de diferentes problemas não-lineares.*

1 INTRODUÇÃO

A representação do comportamento não-linear de estruturas, no espaço parâmetro de carga-deslocamentos, envolve fenômenos de aumento de deslocamentos com decréscimo de cargas ou mesmo decréscimo de deslocamentos com decréscimo de cargas.

Na análise não-linear de uma estrutura, deseja-se obter trajetórias de equilíbrio para determinados graus de liberdade da discretização, executando-se um processo incremental-iterativo nas variáveis do problema.

Assim, dado um campo de deslocamentos e um fator de carga proporcional, equivalentes a um ponto da trajetória de equilíbrio, deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental seja controlada.

Diferentes métodos incrementais-iterativos têm sido empregados para análise não-linear de estruturas, destacando-se os métodos de controle de carga, de controle direto de deslocamentos, de controle de comprimento de arco e de controle de deslocamento generalizado.

Todos esses métodos e vários outros, concebidos a partir da mesma idéia, são dependentes de parâmetros iniciais externos e falham em problemas fisicamente não-lineares quando ocorrem efeitos de localização^{1,2,3}.

Numa análise geometricamente não-linear, o problema de solução das equações incrementais de equilíbrio acontece no nível estrutural e, portanto, os deslocamentos nodais são variáveis representativas dos fenômenos. Nestes casos, os métodos que utilizam combinações dos deslocamentos nodais apresentam bons resultados. Em tais métodos, as trajetórias de equilíbrio são obtidas através de restrições geométricas às formas das mesmas, sem nenhum argumento relacionado à mecânica do processo de carregamento ou descarregamento da estrutura.

Em problemas fisicamente não-lineares, entretanto, os fenômenos acontecem no nível local, nos pontos onde as variáveis da relação constitutiva são calculadas, os pontos de integração. Portanto, somente restrições feitas às combinações dos deslocamentos nodais não oferecem tratamento adequado à obtenção das trajetórias de equilíbrio.

Na tentativa de superar essas limitações, propõe-se o método de controle de deformações baseado nos trabalhos de Chen e Schreyer⁴ e Pitangueira⁵. Este método possui um embasamento físico que contempla a mecânica do processo de deterioração do material, utilizando uma combinação das deformações em um ou mais pontos do domínio do problema como parâmetro de controle.

2 MÉTODOS CLÁSSICOS

Numa análise não-linear, confronta-se com o problema de resolver o sistema de $N+1$ incógnitas (N deslocamentos incrementais e um incremento no fator de carga) e $N+1$ equações (N equações de equilíbrio e uma equação de restrição).

Um processo incremental-iterativo torna-se necessário para solucionar o problema. Para este fim, a equação de equilíbrio incremental correspondente a iteração j do passo i pode ser escrita na forma abaixo:

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (1)$$

onde,

$[K]_{j-1}^i$ é a matriz de rigidez tangente na iteração j-1 do passo i, função do campo de deslocamentos $\{U\}_{j-1}^i$;

$\{\delta U\}_j^i$ é o vetor deslocamentos incrementais da iteração j do passo i;

$\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i;

$\{P\}$ é o vetor de cargas de referência;

$\{Q\}_{j-1}^i$ é o vetor de forças residuais da iteração j-1 do passo i.

Inicialmente, estabelece-se, em função do parâmetro de controle, um valor para o incremento do fator de carga $\delta \lambda_j$, podendo-se então obter $\{\delta U\}_j$, o qual pode ser decomposto nas parcelas associadas à carga de referência, $\{\delta U\}_j^P$, e à carga residual $\{\delta U\}_j^Q$, na forma:

$$\{\delta U\}_j = \delta \lambda_j \cdot \{\delta U\}_j^P + \{\delta U\}_j^Q \quad (2)$$

com
$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^P = \{P\} \quad (3)$$

e
$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^Q = \{Q\}_{j-1} \quad (4)$$

Ao final de cada iteração, a convergência é verificada através da magnitude do vetor de forças residuais $\{Q\}$ e o processo iterativo continua até que determinado critério de convergência seja atendido. Se uma nova iteração for necessária, após calculados $\{\delta U\}_j^P$ e $\{\delta U\}_j^Q$ utilizando-se (3) e (4), o valor de $\delta \lambda_j$ deve ser obtido com uma equação de restrição que envolve combinações das grandezas do problema.

O método de controle de cargas possui a carga externa incrementada de um valor constante somente na 1ª iteração (j=1) de cada passo. Para as demais iterações (j>1), o incremento de carga é feito igual a zero, implicando num carregamento externo sempre constante. Assim, a utilização deste método falha na passagem por pontos limites.

Mesmo utilizando o método de controle direto de deslocamentos não é possível a descrição de trajetórias de equilíbrio pós-crítico, onde ocorre redução de carga acompanhada de redução de deslocamentos, uma vez que este método^{6,7,8} supõe que as iterações são processadas a um deslocamento constante, cujo parâmetro de controle é uma componente de deslocamento previamente escolhida.

Para solucionar as dificuldades destes métodos, o uso de combinações de deslocamentos e fator de carga, para controlar a trajetória de iteração, tem sido adotado nos métodos de controle de comprimento de arco.

Nos métodos de comprimento de arco, o processo iterativo é controlado através de uma

combinação geométrica entre as variáveis deslocamentos e fator de carga proporcional. Dentre as combinações mais utilizadas destacam-se aquelas nas quais: (1) a trajetória de iteração é ortogonal à tangente inicial^{9,10}, (2) a trajetória de iteração é ortogonal à tangente da iteração anterior¹¹ e (3) a trajetória de iteração é um arco de circunferência^{12,13}.

Além dos métodos de comprimento de arco, outros métodos, que também utilizam combinações de deslocamentos e fator de carga, têm sido adotados com êxito na solução de problemas geometricamente não-lineares. Dentre estes métodos pode-se citar o de controle de deslocamento generalizado⁶, o de controle de trabalho¹⁴ e o de controle de resíduo ortogonal¹⁵.

3 MÉTODO DE CONTROLE DE DEFORMAÇÕES

Como já discutido, os métodos clássicos de controle, em virtude de serem baseados nos valores dos deslocamentos nodais, são ineficientes para descrever trajetórias de equilíbrio de problemas fisicamente não-lineares, particularmente quando da ocorrência de localização de deformações.

Visando superar estas limitações, propõe-se um método baseado nos trabalhos de Chen e Schreyer⁴ e Pitangueira⁵, que contempla a mecânica do processo de deterioração do material utilizando uma combinação das deformações em um ou mais pontos do domínio do problema.

A seguir, apresenta-se a formulação deste método, utilizando-se deslocamentos incrementais e matriz de rigidez tangente, segundo a formulação genérica apresentada, anteriormente, para os métodos clássicos.

O vetor incremento de deformações em determinada porção do domínio do problema (um ponto de Gauss, alguns elementos finitos ou toda a discretização), genericamente denominada Ω , pode ser obtido utilizando-se a partição dos deslocamentos incrementais dada na equação (2) e a relação incremental deformação-deslocamento nodal dada por

$$\{\delta\varepsilon\}^{\Omega} = [B]^{\Omega} \{\delta U\}^{\Omega} \quad (5)$$

onde $[B]^{\Omega}$ é a matriz de transformação dos deslocamentos nodais em deformações.

Logo, o vetor incremento de deformações é dado por

$$\{\delta\varepsilon\}_j^{\Omega} = \delta\lambda_j \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^P + \{\delta\varepsilon\}_j^Q \quad (6)$$

com
$$\{\delta\varepsilon\}_j^P = [B]^{\Omega} \{\delta U\}_j^P \quad (7)$$

e
$$\{\delta\varepsilon\}_j^Q = [B]^{\Omega} \{\delta U\}_j^Q \quad (8)$$

Deseja-se controlar uma combinação linear das deformações dada pelo produto escalar

$$\{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}^{\Omega} = \Delta e \quad (9)$$

onde $\{C\}^\Omega$ é um vetor de restrição dimensionado para o sub-domínio Ω , onde se deseja combinar as deformações $\{\delta\varepsilon\}^\Omega$, e definido a partir da combinação linear das deformações que controla o processo. $\{C\}^\Omega$ pode ser um dado externo da análise ou pode ser obtido para cada passo incremental com base no campo de deformações do final do último passo.

O produto interno do vetor $\{C\}^\Omega$ pelos termos da equação (6) resulta em

$$\{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^\Omega = \delta\lambda_j \{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^p + \{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^q \quad (10)$$

Como, no final do último passo, $\{\delta U\}_j^q$ é nulo, da equação (8) tem-se que o incremento de deformações associado às cargas residuais, $\{\delta\varepsilon\}_j^q$, também é nulo. Assim, para a primeira iteração do novo passo, a equação (10) fica

$$\{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^\Omega = \delta\lambda_j \{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^p, \quad \text{para } j=1 \quad (11)$$

A substituição de (9) em (11) permite obter o incremento no fator de cargas proporcionais para a primeira iteração dado por

$$\delta\lambda_j = \frac{\Delta e}{\{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^p}, \quad \text{para } j=1 \quad (12)$$

Para as demais iterações ($j>1$), como não se deve alterar a combinação de controle assegurada por (12), o incremento no fator de cargas pode ser obtido pela substituição de

$$\{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^\Omega = 0, \quad \text{para } j>1 \quad (13)$$

na equação (10), resultando em

$$\delta\lambda_j = -\frac{\{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^q}{\{C\}^{\Omega T} \cdot \{\delta\varepsilon\}_j^p}, \quad \text{para } j>1 \quad (14)$$

As equações (12) e (14) permitem solucionar as equações incrementais de equilíbrio utilizando o método de controle de deformações, bastando que se defina o sub-domínio e a combinação de deformações desejada para o vetor $\{C\}^\Omega$.

Os diversos sub-domínios Ω são definidos como agrupamentos de pontos de Gauss, uma vez que, no Método dos Elementos Finitos, normalmente, as deformações são obtidas nestes pontos. Tais agrupamentos podem representar toda a malha, um ou mais elementos ou apenas um ponto de Gauss de determinado elemento.

No estágio atual, as combinações disponibilizadas para controlar as deformações nestes sub-domínios são:

- i. Controle da média de todas as componentes de deformação em toda a malha;

- ii. Controle da média de todas as componentes de deformação em alguns elementos;
- iii. Controle da média de todas as componentes de deformação em um ponto de Gauss;
- iv. Controle da média dos valores de uma componente de deformação em toda a malha;
- v. Controle da média dos valores de uma componente de deformação em alguns elementos;
- vi. Controle do valor de uma componente de deformação em um ponto de Gauss.

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Apesar do grande desenvolvimento observado na área de métodos incrementais-iterativos, pouca importância foi dada aos aspectos relativos à implementação computacional. Em 1990, Yang e Shieh⁶ propuseram um algoritmo que generaliza os diversos métodos de controle em um único procedimento numérico. Esta generalização é bastante conveniente, quando implementada segundo o paradigma de programação orientada a objetos.

A implementação dos modelos discutidos neste artigo segue esta proposta e foi feita no FEMOOP – “Finite Element Method Object Oriented Program”. Na versão atual do FEMOOP⁵, o algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh⁶, com alguns métodos de controle, já está implementado. Como o programa é baseado na metodologia de programação orientada a objetos, a referida implementação pode ser expandida para contemplar outros métodos de controle discutidos aqui.

A Figura 1 mostra, simplificada, a organização das superclasses do FEMOOP⁵.

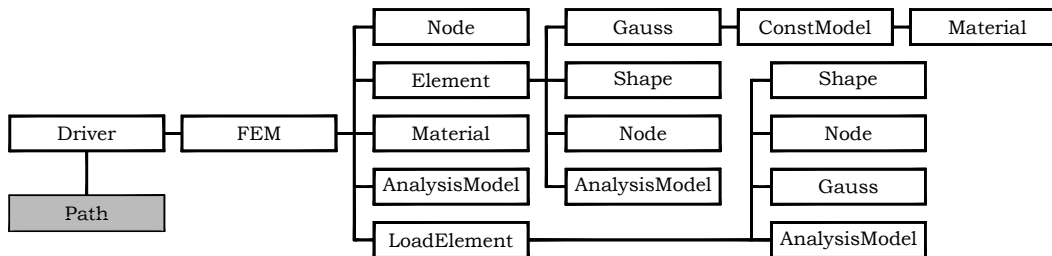


Figura 1: Instâncias de classes do FEMOOP.

A classe *Driver* é responsável pela definição do tipo de problema a ser solucionado (mecânico, temperatura, etc.), inicializa os objetos da classe *FEM* (“Finite Element Method”) e da classe *Path* e imprime os dados de entrada. A discretização espacial do domínio em elementos finitos é realizada pela classe *FEM*. Esta contém métodos para montagem de matrizes e vetores globais bem como para impressão de resultados. A classe *AnalysisModel* é a responsável pelos dados e métodos que dependem unicamente do tipo de análise escolhido (estado plano de tensões e de deformações, sólido, axissimétrico, etc.). A classe *Material* descreve os materiais que compõem a discretização através de métodos para a leitura dos dados e para consulta de todos os parâmetros. As informações relativas aos nós (coordenadas,

condições de suporte, carregamento, etc.) são de responsabilidade da classe *Node*, a qual possui métodos para numeração dos graus de liberdade do modelo bem como para consulta e atribuição de valores nodais. A classe *Shape* responde pelas funções de mapeamento e pela conectividade dos elementos. A classe *Gauss* responde por coordenadas e pesos dos pontos de integração numérica como também pelo estado constitutivo do material naquele ponto. A classe *Element* possui um objeto do tipo *Shape*, uma referência à classe *AnalysisModel*, outra à classe *Node* e vários objetos do tipo *Gauss*, de modo a obter as grandezas relativas a determinado elemento finito da malha. A classe *LoadElement* utiliza os métodos da classe *Shape* e da classe *Gauss* para efeito de cálculo de forças nodais equivalentes. A classe *ConstModel* é responsável pelo cálculo de tensões e modificação das relações constitutivas dos materiais.

A implementação dos métodos de controle para obtenção das trajetórias de equilíbrio é suportada, no *FEMOOP*, pela classe *Path*, cuja hierarquia está mostrada na Figura 2. As subclasses da classe *Path* são responsáveis pela solução de problemas não-lineares através de um dos métodos de controle anteriormente citados.

Entre os métodos desta classe, as funções *Solver()* e *LoadFactor()* são as mais importantes. A função *Solver()* implementa o algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh⁶. Os métodos de controle de carga (subclasse *PathLCM*), de controle direto de deslocamentos (subclasse *PathDCM*), de controle de deslocamento generalizado (subclasse *PathGDCM*) e de controle de comprimento de arco (subclasses *PathCLALC*, *PathIOALC* e *PathUOALC*) utilizam uma única forma de *Solver()*, ficando por conta da função virtual *LoadFactor()* a caracterização dos diferentes processos.

Como pode ser visto na Figura 2, a classe *Path* foi expandida para disponibilizar o método de controle por trabalho (subclasse *PathWCM*) e o método de resíduo ortogonal (subclasse *PathORCM*). Estes métodos utilizam a função *Solver()*, já implementada no programa, e redefine a função *LoadFactor()*.

A função *Solver()*, já implementada, também é usada pelo método de controle de deformações. Neste caso, entretanto, a obtenção do fator de carga (equações 12 e 14) depende do cálculo das deformações e da definição dos vetores de combinação. Assim, optou-se por uma hierarquia de classes em três níveis. A subclasse *PathSCM* (Figura 2) redefine o método *LoadFactor()*. Para a caracterização dos diversos sub-domínios de controle, as seguintes subclasses são derivadas de *PathSCM* (ver Figura 2):

PathMSC: realiza combinações de deformações para toda a malha.

PathESC: realiza combinações de deformações para alguns elementos.

PathGSC: realiza combinações de deformações para um ponto de Gauss de determinado elemento.

Cada uma destas subclasses contém os métodos *DomainLenght()*, responsável pela definição do tamanho do sub-domínio Ω , *StrainPVector()* e *StrainQVector()*, responsáveis pelo cálculo dos vetores de deformação devido à carga de referência e à carga residual, respectivamente. Dessas últimas, derivam as seguintes classes que implementam a função *MountSC()*, que é a responsável pela montagem do vetor $\{C\}^{\Omega}$ para cada combinação desejada (ver Figura 2):

- PathMSC1*: controla a média de todas as componentes de deformação em toda a malha.
- PathMSC2*: controla a média de uma componente de deformação em toda a malha.
- PathESC1*: controla a média de todas as componentes de deformação em alguns elementos.
- PathESC2*: controla a média de uma componente de deformação em alguns elementos.
- PathGSC1*: controla a média de todas as componentes de deformação em um ponto de Gauss.
- PathGSC2*: controla o valor de uma componente de deformação em um ponto de Gauss.

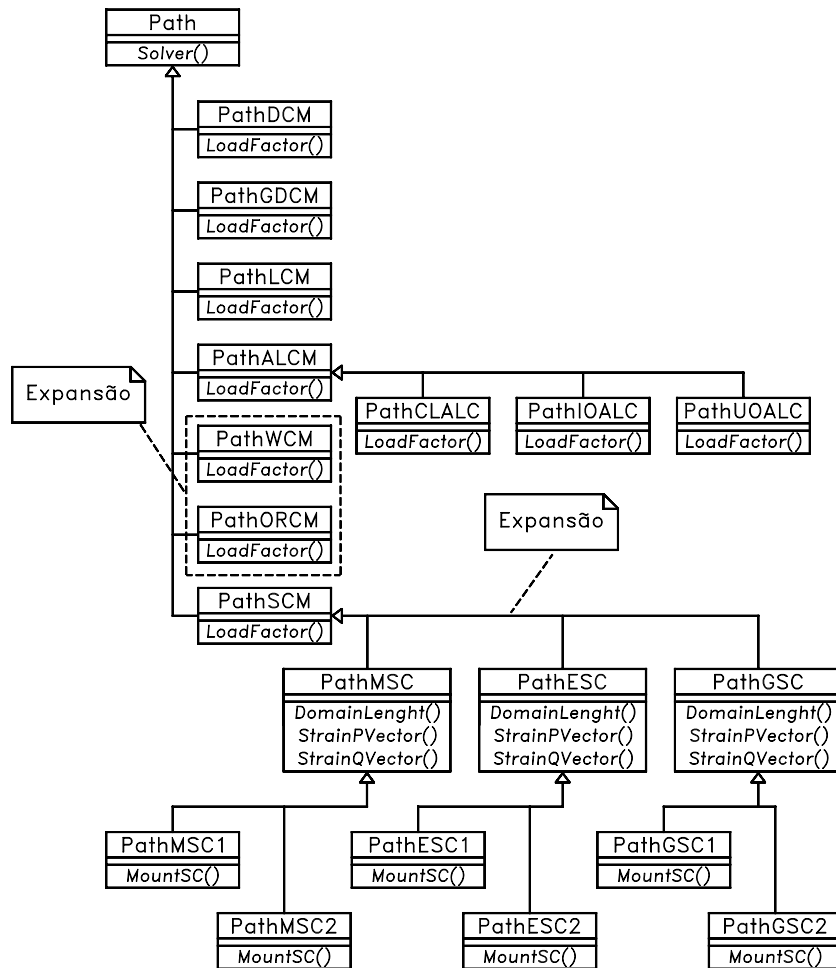


Figura 2: Hierarquia da classe *Path*.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 Viga com entalhe

Uma viga de concreto de dimensões 2.5 x 1 x 1 m, com um entalhe de 0.1 m de abertura e 0.2 m de extensão, é tomada como referência para estudo da adequação dos métodos de controle, anteriormente citados, na obtenção de trajetórias de equilíbrio.

A discretização em elementos finitos de quatro nós, em estado plano de tensões, com 4 pontos de integração é mostrada na Figura 3.

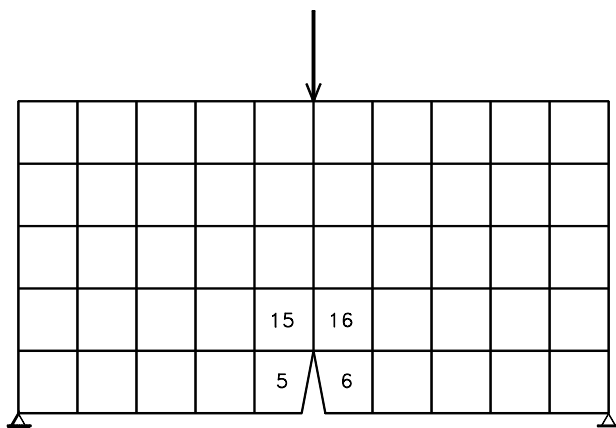


Figura 3: Malha de elementos finitos utilizada para a viga com alguns elementos em destaque.

O comportamento não-linear do material é representado com o modelo constitutivo de dano escalar. Neste modelo, a variação da rigidez é monitorada através de relações tensão x deformação escalares descritas em função das seguintes propriedades do material:

E_0 = módulo de elasticidade tangente inicial;

ν = coeficiente de Poisson;

f_t = limite de resistência à tração axial;

f_c = limite de resistência à compressão axial;

ϵ_c = deformação correspondente ao limite f_c ;

g_t = energia de fratura por unidade de volume.

A Tabela 1 mostra os valores adotados.

Tabela 1: Propriedades do material.

E_0 (MPa)	ν	f_t (MPa)	f_c (MPa)	ϵ_c	g_t (MPa)
2.0e4	0.2	2.0	20.0	2.0e-3	2.0e-5

Considerando a carga de referência $P_0 = -1.0$ kN e admitindo-se uma tolerância para a convergência de 10^{-4} , foram obtidas trajetórias de equilíbrio para os diferentes métodos de

controle. A Figura 4 mostra os gráficos fator de carga x deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga obtidos utilizando os métodos de comprimento de arco cilíndrico (CLAL), deslocamento direto (DCM), deslocamento generalizado (GDCM), resíduo ortogonal (ORCM) e de controle por trabalho (WORK).

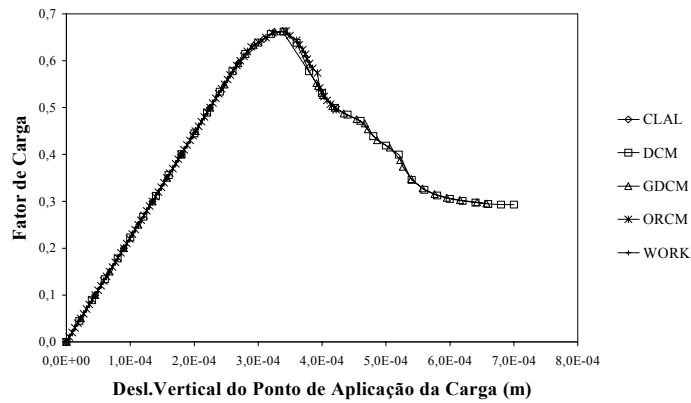


Figura 4: Trajetórias de equilíbrio utilizando alguns métodos clássicos.

Também foram realizados estudos sobre a obtenção das trajetórias de equilíbrio utilizando o método de controle de deformações, nos quais adotou-se todas as combinações e sub-domínios anteriormente citados, entretanto, os melhores resultados foram obtidos através do controle da média de todas as componentes de deformação dos elementos 5, 6, 15 e 16 (caso 1) e também do elemento 16 (caso 2), bem como através do controle da média dos valores da componente ϵ_x do elemento 5 (caso 3) e também do elemento 16 (caso 4). A Figura 5 mostra os gráficos obtidos para tais combinações e sub-domínios.

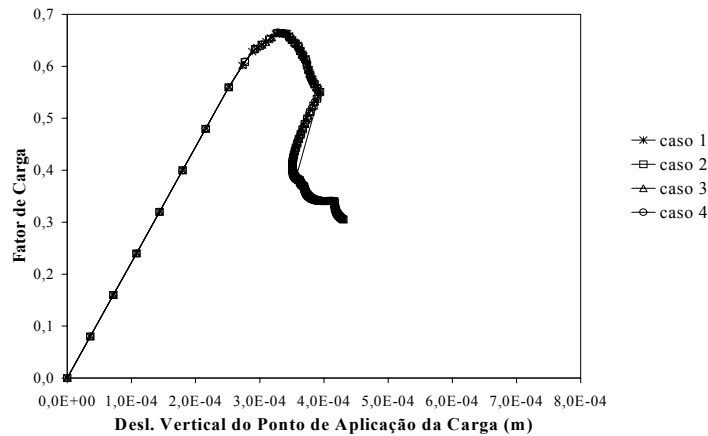


Figura 5: Trajetórias de equilíbrio utilizando o método de controle de deformações.

5.2 Arco abatido

O problema geometricamente não-linear de um arco abatido de espessura 0.753 in, é agora tomado como referência para estudo da adequação dos métodos de controle na obtenção de trajetórias de equilíbrio. O arco é composto por material isotrópico e seu módulo de elasticidade é $E = 10.3 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$.

A discretização em elementos finitos de oito nós, em estado plano de tensões, com 9 pontos de integração é mostrada na Figura 6.

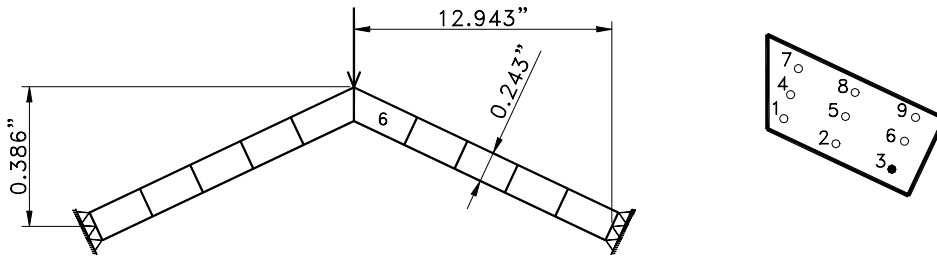


Figura 6: Malha de elementos finitos utilizada para o arco destacando o ponto de Gauss 3 do elemento 6.

Considerando a carga de referência $P_0 = -20.0 \text{ lb}$ e admitindo-se uma tolerância para a convergência de 10^{-4} , foram obtidas as trajetórias de equilíbrio para os diferentes métodos de controle. A Figura 7 mostra os gráficos fator de carga x deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga obtidos utilizando alguns métodos clássicos.

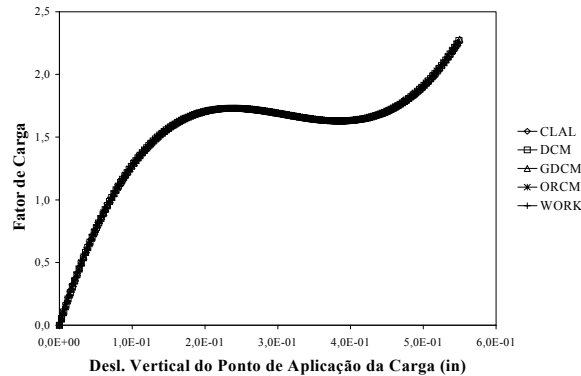


Figura 7: Trajetórias de equilíbrio utilizando alguns métodos clássicos.

Também foram realizados estudos sobre a obtenção das trajetórias de equilíbrio utilizando o método de controle de deformações, nos quais adotou-se todas as combinações e subdomínios anteriormente citados, entretanto, o melhor resultado foi obtido através do controle da média do valor da componente ϵ_x do ponto de Gauss 3 do elemento 6. A Figura 8 mostra o

gráfico obtido para tal combinação e sub-domínio.

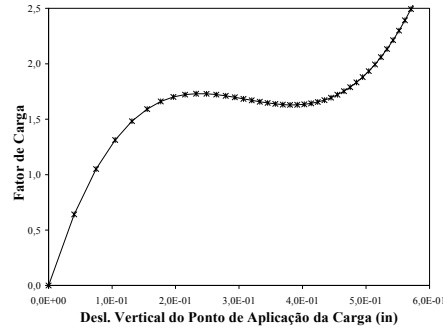


Figura 8: Trajetórias de equilíbrio utilizando o método de controle de deformações.

5.3 Barra Comprimida

Uma barra comprimida, é tomada como referência para estudo da ocorrência de localização de deformações em problemas fisicamente não-lineares. A discretização em elementos finitos de quatro nós, em estado plano de tensões, com 4 pontos de integração é mostrada na Figura 9. Tomar-se-á o elemento central como zona de localização.

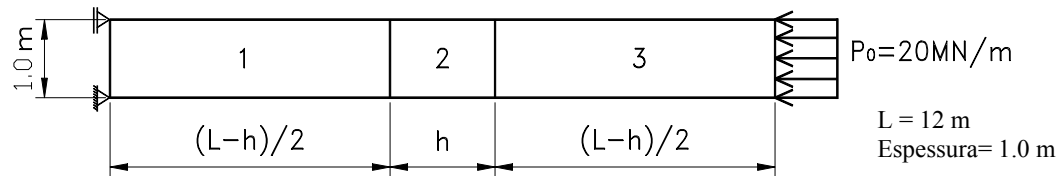


Figura 9: Discretização em elementos finitos para um problema de localização de deformações.

Considerando-se relações tensão x deformação bi-lineares (Figura 10), de modo que o elemento central seja menos resistente que os demais, os parâmetros mostrados na Tabela 2 foram adotados.

Tabela 2: Parâmetros do material usados no problema de localização.

Elemento	E_0 (MPa)	ν	f_c (MPa)	E_2 (MPa)
1 e 3	2.0e4	0.2	25.0	-5.0e3
2	2.0e4	0.2	20.0	-5.0e3

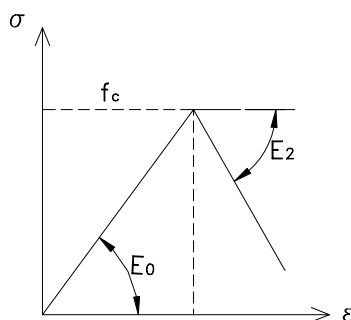


Figura 10: Relações tensão x deformação bi-lineares.

Depois que a tensão axial no elemento 2 atinge o limite $f_c = 20$ MPa, qualquer acréscimo de deformação faz o mesmo percorrer o ramo descendente de sua resposta constitutiva, com inclinação E_2 , forçando um decremento no valor da tensão axial e, conseqüentemente, no valor da carga externa. Como os demais elementos (elementos 1 e 3) têm um limite de resistência ligeiramente superior, os mesmos sofrerão descarregamento segundo uma inclinação E_0 . Desta maneira, a solução para o incremento do deslocamento da face de aplicação do carregamento é função da extensão da região de localização (h), dos módulos de elasticidade E_0 e E_2 e da extensão da região em descarregamento ($L - h$).

Utilizando o modelo constitutivo de dano escalar e admitindo-se uma tolerância de 10^{-4} , foram obtidas as trajetórias de equilíbrio para vários valores de h/L , mostradas na Figura 11, onde foi adotado o método de controle de deslocamento generalizado para representar os métodos clássicos.

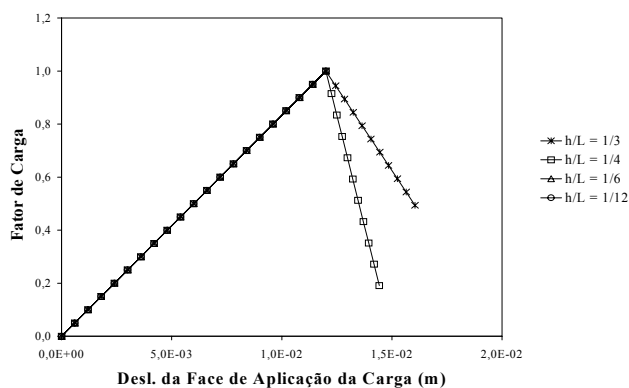


Figura 11: Solução do problema de localização com o método de controle de deslocamento generalizado.

Para obter as trajetórias de equilíbrio, utilizando o método de controle de deformações, adotou-se o controle da média das componentes ϵ_x do elemento central (2). A Figura 12 mostra o gráfico obtido para tal combinação e sub-domínio.

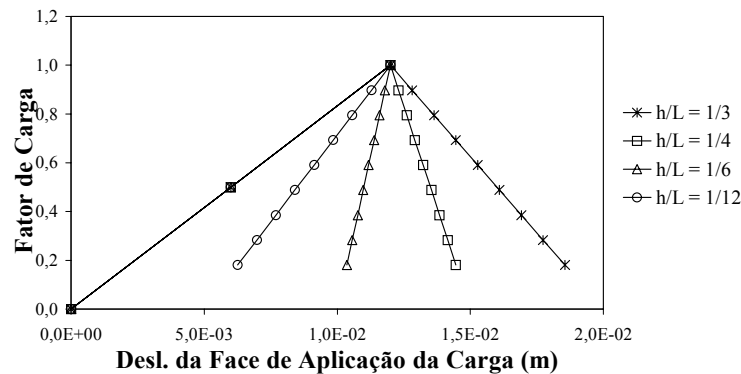


Figura 12: Solução do problema de localização com o método de controle de deformações.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As simulações apresentadas permitem dizer que tanto os métodos clássicos quanto o método de controle de deformações proposto são adequados para descrever trajetórias de equilíbrio de problemas geometricamente não-lineares. Em problemas fisicamente não-lineares, entretanto, os métodos clássicos apresentam-se numericamente instáveis, principalmente quando ocorrem efeitos de localização de deformações.

A simulação da barra comprimida mostra que o método de deslocamento generalizado não foi capaz de representar situações de acentuados “snap-backs” causadas pela localização de deformações do elemento 2. Entretanto, tais situações foram satisfatoriamente obtidas com o uso do método de controle de deformações, revelando a importância do controle de grandezas representativas de fenômenos fisicamente não-lineares localizados.

As trajetórias de equilíbrio obtidas para a viga com entalhe, utilizando controle de deformações, apresentam bifurcações no ramo descendente que não foram representadas pelos métodos clássicos. Tais bifurcações podem ser representativas do comportamento da viga, uma vez que foram controladas grandezas em torno da trinca. Dessa forma, pode-se dizer que o método proposto permite descrever trajetórias mais realistas.

O desempenho dos métodos no ajuste automático do tamanho do passo incremental em função da variação da rigidez é outro aspecto relevante. Também neste caso, o método proposto se mostrou mais eficiente, como pode ser observado nas diversas simulações apresentadas.

No estágio atual da implementação dos métodos de controle de deformações, outras combinações envolvendo valores principais e normas estão sendo disponibilizadas.

7 REFERÊNCIAS

- [1] R. de Borst, *Computational Aspects of Smmeared Crack Analysis*, In Constitutive Modelling of Concrete Structures, Pineridge Press, Swansea , (1986a).
- [2] R de Borst,, *Nonlinear Analysis of Frictional Materials*, Dissertation, Delft University of Technology, Delft, (1986b).
- [3] M. A. Crisfield, *Difficulties of Current Numerical Models for Reinforced Concrete and Some Tentative Solutions*, in Proc. International Conference Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Part 1 (Edited by F. Damjanic, e Hinton, D. R. J. Owen, N. Bicanic and V. Simonic), Pineridge Press, Swansea, pp. 331-358, (1984).
- [4] Z. Chen e H. L. Schreyer, *A Numerical Solution Scheme for Softening Problems Involving Total Strain Control*, Computers & Structures, vol. 37, pp. 1043-1050, (1990).
- [5] R. L. S. Pitangueira, *Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade ”*, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, (1998).
- [6] Y. B. Yang e M. S. Shieh, *Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points*, AIAA Journal, vol. 28, pp. 2110-2116, (1990).
- [7] J. L. Batoz e G. Dhat, *Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 14, pp. 1262-1267, (1979).
- [8] Y. B. Yang e S. R. Kuo, *Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures*, Prentice Hall, (1994).
- [9] E. Ricks, *The Application of Newton Method to the Problem of Elastic Stability*, Journal of Applied Mechanics , pp. 1060-1065, (1972).
- [10] E. Ricks, *An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems*, International Journal of Solids and Structures , vol. 15, pp. 529-551, (1979).
- [11] E. Ramm, *Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points*, In Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (edited by W. Wunderlich, E. Stein and K. J. Bathe), pp. 63-83, Springer, Berlin, (1981).
- [12] M. A. Crisfield, *A Fast Incremental-interactive Solution Procedure that Handles Snap-through*, Computers & Structures, vol. 13, pp. 55-62, (1981).
- [13] M. A. Crisfield, *An Arc Length Method Including Line Searches and Acelerations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering , vol. 19, pp. 1269-1289, (1983).
- [14] Y. B. Yang e W. McGuire, *A Work Control Method for Geometrically Nonlinear Analysis*, in Proc. International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Application, Middleton, J., and Pande, G. N. (eds.), University College Swansea, Wales, U. K., pp. 913-921, (1985).
- [15] S. Krenk, *An Orthogonal Residual Procedure for Non-linear Finite Element Equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 38, pp. 823-839, (1995).