

UNA TÉCNICA DE COMPLEMENTARIDAD NO LINEAL MIXTA PARA RESOLVER LA DINÁMICA DE UN SISTEMA DE MANIPULACIÓN CON DESTREZA

Flavia E. Buffo[§], Ana Friedlander[†] y María C. Maciel[§]

[§]Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156-Interno 3416
e-mail: flabuffo@criba.edu.ar, immaciel@criba.edu.ar.

[†]Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Estadual de Campinas, CP 6065, 13081
Campinas SP, Brazil, friedlan@ime.unicamp.br.

Palabras clave: Problema de Complementaridad no Lineal Mixto, Minimización con Restricciones de Caja.

Resumen. *La versatilidad de un robot para realizar una tarea está limitada principalmente por la flexibilidad de su end-effector. En los últimos años la investigación ha sido enfocada al desarrollo de una mano con varios dedos, ya que tales dispositivos son capaces de manipular y asegurar objetos de diferentes formas.*

Un sistema de manipulación con destreza, compuesto de una mano robot con varios dedos y un objeto que será sujetado o manipulado, puede modelarse como un conjunto de cuerpos rígidos en contacto.

La dinámica de varios cuerpos rígidos en contacto trata de predecir las aceleraciones y fuerzas en los puntos de contacto del conjunto de cuerpos rígidos con fricción de Coulomb. El cálculo de dichas fuerzas permite determinar si el contacto se mantiene o desaparece y planear una determinada acción.

Las ecuaciones que describen el problema forman un sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales. En esta contribución el problema se reformula como un problema de complementaridad no lineal mixto (PCNM). Luego, se plantea un problema de optimización con restricciones de caja, asociado al PCNM, usando una función de mérito adecuada, y se establecen condiciones que permiten asegurar que ambos problemas son equivalentes. Finalmente el problema de optimización se resuelve usando un algoritmo robusto y eficiente desarrollado por Friedlander y Martínez y se presentan resultados numéricos alentadores.

1 INTRODUCCIÓN

Los problemas de complementariedad son de gran importancia en aplicaciones de ingeniería porque están asociados a la noción de sistemas en equilibrio¹. En los últimas décadas se han estudiado diferentes tipos de problemas de complementariedad: lineales, no lineales, mixtos, y se han desarrollado algoritmos eficientes y robustos para resolver cada uno de ellos.

Los problemas de complementariedad surgen en muchas aplicaciones de ingeniería¹, por ejemplo problemas de contacto mecánico, problemas de mecánica estructural, problemas de diseño estructural, problemas no lineales de obstáculo, problemas de lubricación elastohidrodinámicos, problemas de equilibrio de tráfico, y problemas de control óptimo, por mencionar algunos.

Este trabajo está organizado como sigue; en la sección 2 se presentan generalidades del problema de complementariedad no lineal mixto (PCNM), y en la sección 3 el método de resolución del PCNM vía optimización y resultados de existencia y unicidad.

En la sección 4 se considera un modelo dinámico para varios cuerpos rígidos en contacto, las ecuaciones que lo representan^{2,3} y a partir de ellas se formula el problema de complementariedad no lineal mixto.

En la sección 5 se resumen los resultados numéricos obtenidos al resolver el problema de complementariedad para tres dedos robots sujetando un objeto. Finalmente las conclusiones y las posibilidades futuras para continuar con esta línea de investigación.

2 PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDAD NO LINEAL MIXTO

Dada la función vectorial $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y los conjuntos de índices \mathcal{L} y \mathcal{C} que definen una partición de $\{1, 2, \dots, n\}$ el problema de hallar un vector $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(x) = 0, \quad x_{\mathcal{C}} \geq 0, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(x) \geq 0, \quad x_{\mathcal{C}}^t \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(x) = 0, \quad (1)$$

se dice *problema de complementariedad no lineal mixto*. Las variables $x_{\mathcal{C}}$ son las variables complementarias y $x_{\mathcal{L}}$ son las variables libres que no satisfacen las condiciones de complementariedad y no negatividad. El conjunto Ω está definido por

$$\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\},$$

donde a y b son vectores n -dimensionales con $a_i \in [-\infty, \infty)$ y $b_i \in (a_i, \infty]$. Si x_i es tal que $i \in \mathcal{L}$ entonces $a_i = -\infty$ y $b_i = \infty$, mientras que si $i \in \mathcal{C}$ entonces $a_i = 0$ y $b_i = \infty$.

Si el conjunto $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ entonces se tiene un *problema de complementariedad no lineal* (PCN), si además la función $\mathcal{F}(x)$ es afín se trata de un *problema de complementariedad lineal* (PCL). Si el conjunto $\mathcal{C} = \emptyset$ resulta un *sistema de ecuaciones no lineales* (SEN).

Se considera un cambio de notación, introduciendo una partición de x , los vectores $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^m$ y una partición de \mathcal{F} las funciones vectoriales $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, y

$G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se introducen variables de holgura $z \in \mathbb{R}^p$, y el problema de complementariedad mixto se expresa como sigue,

$$u, z \geq 0, \quad z - F(u, v) = 0, \quad u^t z = 0, \quad G(u, v) = 0, \quad (2)$$

donde u es el vector de las variables complementarias y v el de las variables libres, de forma que la dimensión del problema de complementariedad es $m + 2p$.

El problema de complementariedad no lineal mixto puede considerarse como un problema de complementariedad no lineal y un sistema de ecuaciones no lineales simultáneos.

3 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDAD VIA OPTIMIZACIÓN

Para poder reformular el problema de complementariedad mixto como un problema de optimización es necesario introducir una función de mérito $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. El problema de optimización que se resuelve es

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(u, v, z) \\ \text{s.a} & \\ & u \geq 0, z \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

La ventaja de reformular el PCNM usando la estrategia mencionada es la aplicación de técnicas, algoritmos eficientes, y resultados teóricos conocidos para problemas de optimización. En general los algoritmos para resolver problemas de optimización obtienen puntos estacionarios, es decir puntos que sólo satisfacen las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. Se puede garantizar la convergencia a un mínimo global si la función de mérito es convexa. Las funciones de mérito son composición de las funciones que definen el problema P .

Los problemas de optimización han sido estudiados extensamente en los últimos años y existen muchos algoritmos eficientes para encontrar la o las soluciones. Para obtener una solución del problema de complementariedad no lineal mixto se resuelve el problema de optimización (3) con la función objetivo,

$$f(u, v, z) = \| F(u, v) - z \|^2 + \| G(u, v) \|^2 + (u^t z)^2. \quad (4)$$

Andreani, Friedlander, Mello y Santos⁴ establecen las condiciones que permiten asegurar que puntos estacionarios de (3) con la función de mérito (4) son también minimizadores globales y soluciones del PCNM.

4 MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA DE CONTACTO

Para trabajar con problemas de contacto con fricción se considera un modelo de superficies en contacto y cuerpos en movimiento.

El sistema dinámico está formado por, un número determinado de *cuerpos pasivos* llamados *objetos*, que se mueven en respuesta a fuerzas externas y a fuerzas que surgen del contacto, y un número dado de *cuerpos activos* llamados *manipuladores*. Las hipótesis del modelo propuesto^{3,5} son:

1. Los cuerpos son rígidos. No hay restricciones sobre la forma de los cuerpos.
2. La dirección normal en cada punto de contacto está bien definida, esto significa que la superficie del cuerpo pasivo tiene plano tangente en todo punto de contacto.
3. Existe fricción en cada punto de contacto. Se debe seleccionar un modelo de fricción y una ley de fricción.
4. El manipulador está formado por eslabones (*links*) y *juntas*; las juntas del manipulador no forman lazos cerrados. Cada junta tiene un sólo grado de libertad. Los contactos que se permiten son unilaterales.
5. Todos los contactos están sujetos a tierra (coordenada de referencia).

Las ecuaciones y restricciones que gobiernan el modelo son: las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler, para los objetos y los manipuladores, las restricciones cinemáticas unilaterales y bilaterales debidas al contacto, las condiciones dinámicas del contacto (principio de no penetración y fuerzas no extensibles), y la ley de fricción del contacto.

Para desarrollar las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un conjunto de cuerpos rígidos en contacto se considera que en un instante t_0 cierto número de objetos (n_{obj}) están en contacto entre si y con cierto número de manipuladores (n_{man}), siendo n_c el número total de contactos.

Se designa con c_{ij} a la fuerza de contacto sobre el cuerpo i a través del contacto j expresado en la estructura \mathbf{C}_j , con componentes normal, tangencial y ortogonal $(c_{ij})_n$, $(c_{ij})_t$ y $(c_{ij})_o$. La suma de las fuerzas que actúan en el cuerpo i es igual a la masa por la aceleración de su centro de masa y se expresa como

$$\sum_{j \in \mathcal{B}_i} W_{ij} c_{ij} + g_{obj,i} + h_{obj,i} = M_{obj,i} \ddot{q}_{obj,i}, \quad (5)$$

donde \mathcal{B}_i es el conjunto de índices de los puntos de contacto del cuerpo i , $g_{obj,i} \in \mathbb{R}^6$ es la fuerza generalizada externa (expresada en las coordenadas de referencia fija en el cuerpo \mathbf{B}_i) que actúa sobre él, $h_{obj,i} \in \mathbb{R}^6$ es el término de cantidad de movimiento, $\ddot{q}_{obj,i} \in \mathbb{R}^6$ es la aceleración generalizada (lineal y angular) del centro de masa del objeto, $M_{obj,i} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de masa (simétrica y definida positiva) del objeto i particionada como:

$$M_{obj,i} = \begin{bmatrix} M_{1,i} & 0 \\ 0 & M_{2,i} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

con $M_{1,i} = m_{obj,i} I_3$, siendo I_3 la matriz identidad, y $M_{2,i}$ el tensor de inercia del cuerpo i expresado en la base \mathbf{B}_i . La matriz $W_{ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ transforma las fuerzas de contacto c_{ij}

en una fuerza generalizada, F_{ij} . Las matrices de torsión W_{ij} (*wrench matrices*) contienen toda la información geométrica del contacto j .

Las ecuaciones anteriores se extienden a todos los objetos, se expresan las fuerzas de contacto por componentes, y se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$W_n c_n + W_t c_t + W_o c_o + g_{obj} + h_{obj} = M_{obj} \ddot{q}_{obj}, \quad (7)$$

con $c_\alpha \in \mathbb{R}^{n_c}$, $W_\alpha \in \mathbb{R}^{6n_{obj} \times n_c}$, $\alpha \in \{n, t, o\}$, g_{obj} , h_{obj} , $\ddot{q}_{obj} \in \mathbb{R}^{6n_{obj}}$, y $M_{obj} \in \mathbb{R}^{6n_{obj} \times 6n_{obj}}$ es

$$M_{obj} = \text{diag}\{M_{obj,1}, M_{obj,2}, \dots, M_{obj,n_{obj}}\}. \quad (8)$$

Análogamente se obtienen las ecuaciones dinámicas para los manipuladores:

$$\tau - (J_n^t c_n + J_t^t c_t + J_o^t c_o + g_{man} + h_{man}) = M_{man} \ddot{\theta}_{man}, \quad (9)$$

donde, si llamamos n_θ al número de juntas de los manipuladores, $\dot{\theta}_{man} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ es la velocidad de las juntas, $\tau \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ es el vector de esfuerzos, J_n , J_t y $J_o \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_c}$ son las matrices Jacobianas que determinan el efecto de α -ésima componente de la fuerza $(c_{ij})_\alpha$ sobre la componente α del vector de esfuerzo de junta τ , con $\alpha \in \{n, t, o\}$, $M_{man} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ es la matriz de inercia (simétrica y definida positiva), $g_{man}(\theta_{man}) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ es el vector de torques de gravedad, $h_{man}(\theta_{man}, \dot{\theta}_{man}) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ representa al vector de Coriolis y los torques centrípetos, y $\ddot{\theta}_{man} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ es el vector de aceleración de juntas.

El movimiento de cada uno de los cuerpos en contacto está limitado por restricciones cinemáticas:

$$v_\alpha = W_\alpha^t \dot{q}_{obj} - J_\alpha \dot{\theta}_{man}, \quad \alpha \in \{n, t, o\}, \quad (10)$$

$$a_\alpha = W_\alpha^t \ddot{q}_{obj} - J_\alpha \ddot{\theta}_{man} + \dot{W}_\alpha^t \dot{q}_{obj} - \dot{J}_\alpha \dot{\theta}_{man}, \quad \alpha \in \{n, t, o\}. \quad (11)$$

donde $v_\alpha \in \mathbb{R}^{n_c}$ es la velocidad lineal y $a_\alpha \in \mathbb{R}^{n_c}$ es la aceleración lineal en la dirección α , expresadas en la estructura de contacto C_j , \dot{q}_{obj} y $\dot{\theta}_{man}$ son los vectores de velocidades de los cuerpos y de los manipuladores.

En cada punto de contacto j la componente normal de la velocidad es cero,

$$v_{jn} = 0, \quad j = 1, \dots, n_c. \quad (12)$$

De los n_c puntos de contactos, se designan con $n_{\mathcal{R}}$ al número de contactos que pueden rodar y con $n_{\mathcal{S}}$ al número de contactos que pueden deslizarse, de forma tal que $n_c = n_{\mathcal{S}} + n_{\mathcal{R}}$. Se notan con \mathcal{S} y \mathcal{R} a los conjuntos de índices respectivos.

Un punto de contacto de rodamiento se caracteriza porque tanto la componente tangencial como la ortogonal de la velocidad en dicho punto son cero, esto es

$$v_{jt} = v_{jo} = 0, \quad j \in \mathcal{R}. \quad (13)$$

Mientras que un punto de contacto de deslizamiento se caracteriza porque la componente tangencial o la componente ortogonal de la velocidad en dicho punto es distinta de cero,

$$v_{jt} \neq 0 \text{ ó } v_{jo} \neq 0, j \in \mathcal{S}. \quad (14)$$

Para evitar la interpenetración, el movimiento de un objeto está sujeto a otra restricción conocida como *principio de no penetración de Signorini*,

$$a_n \geq 0. \quad (15)$$

Las fuerzas en los puntos de contacto deben tener componentes normales no negativas, esto significa que son no extensibles

$$c_{jn} \geq 0, j = 1, \dots, n_c. \quad (16)$$

Para un punto de contacto cualquiera j , si $(a_n)_j = 0$ el contacto se mantiene y $(c_n)_j \geq 0$, mientras que si $(a_n)_j > 0$ el contacto desaparece (*breaking*) y $(c_n)_j = 0$.

Considerando (15) y (16) entre las aceleraciones y las fuerzas en los puntos de contacto se establece la *restricción de complementaridad*,

$$a_n^t c_n = 0. \quad (17)$$

Para atrapar un objeto se requiere de fuerzas de fricción y por ello se debe establecer un modelo de fricción. La elección del modelo de fricción determina la forma de las matrices W_α que aparecen en la ecuación (7) y las matrices J_α en la ecuación (9) con $\alpha \in \{n, t, o\}$. La ley que se utiliza aquí es la *ley de fricción de Coulomb* que establece que la fuerza de contacto en el punto j cae dentro o sobre la frontera del correspondiente cono de fricción representado como sigue:

$$c_{jt}^2 + c_{jo}^2 \leq \mu_j^2 c_{jn}^2, j = 1, \dots, n_c, \quad (18)$$

donde μ_j es el coeficiente de fricción en el punto de contacto j .

Si un contacto es de deslizamiento, la fuerza de contacto debe pertenecer a la frontera del cono de fricción con su componente de fricción directamente opuesta a la velocidad de deslizamiento y satisfacer

$$\mu_j c_{jn} v_{j\alpha} + c_{j\alpha} \sqrt{v_{jt}^2 + v_{jo}^2} = 0, j \in \mathcal{S}, \alpha \in \{t, o\}. \quad (19)$$

Si un contacto es de rodamiento, la fuerza de contacto puede tener alguna dirección y magnitud, dentro del cono definido por (16) y (18) y satisfacer

$$\mu_j c_{jn} a_{j\alpha} + c_{j\alpha} \sqrt{a_{jt}^2 + a_{jo}^2} = 0, j \in \mathcal{R}, \alpha \in \{t, o\}. \quad (20)$$

La ecuación (19) difiere significativamente de la (20), ya que la primera es lineal en las incógnitas c_{jn} y $c_{j\alpha}$ porque las velocidades son datos, en cambio la segunda es no lineal porque las aceleraciones son incógnitas.

Considerando que en el instante inicial t_0 se conocen, q_{obj} , \dot{q}_{obj} , g_{obj} , h_{obj} , M_{obj} para los objetos, θ_{man} , $\dot{\theta}_{man}$, τ , g_{man} , h_{man} , M_{man} para los manipuladores, las matrices de torsión W y las matrices Jacobianas J_{man} , \dot{q}_{obj} y $\dot{\theta}_{man}$ satisfacen las restricciones cimenáticas (10), (12) y (13), estudiar la dinámica de varios cuerpos en contacto significa determinar \ddot{q}_{obj} , $\ddot{\theta}_{man}$, c_n , c_t , c_o , a_n , a_t , a_o , que satisfagan las ecuaciones (7), (9), (11), (15), (17), (19) y (20).

Dado que el sistema de ecuaciones algebraico-diferencial que resulta es complejo de resolver, es conveniente reformularlo como un problema de complementaridad no lineal mixto. Para ello, se considera una discretización de la variable independiente, suponiendo que en el instante t_0 existe contacto y se conocen la posición y velocidades de todos los cuerpos (configuración inicial), y se resuelve un problema de complementaridad para establecer la configuración en un instante de tiempo $t_0 + \Delta t$. Esto significa analizar si el contacto se mantiene o desaparece, y calcular las posiciones y velocidades en la nueva configuración.

Teniendo en cuenta que existen las inversas de M_{obj} y de M_{man} se puede despejar \ddot{q}_{obj} y $\ddot{\theta}_{man}$ de las ecuaciones (7) y (9). Reemplazando \ddot{q}_{obj} y $\ddot{\theta}_{man}$ en la ecuación (11) y definiendo $a_\alpha \in \mathbb{R}^{n_c}$, con $\alpha \in \{n, t, o\}$, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_t \\ a_o \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} c_n \\ c_t \\ c_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_t \\ b_o \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{nn} & A_{nt} & A_{no} \\ A_{tn} & A_{tt} & A_{to} \\ A_{on} & A_{ot} & A_{oo} \end{bmatrix} = \mathcal{J}^t \mathcal{M} \mathcal{J}, \quad (22)$$

donde las $A_{\alpha\gamma}$ son submatrices de A que consisten en las filas y columnas correspondientes a las direcciones α y γ respectivamente, con $\alpha, \gamma \in \{n, t, o\}$.

A partir de M_{obj} , M_{man} , W_n , W_t , W_o , J_n^t , J_t^t , y J_o^t se definen las matrices

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} (M_{obj})^{-1} & 0 \\ 0 & (M_{man})^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} W_n & W_t & W_o \\ J_n^t & J_t^t & J_o^t \end{bmatrix}, \quad (23)$$

y el vector

$$\begin{bmatrix} b_n \\ b_t \\ b_o \end{bmatrix} = \mathcal{J}^t \begin{bmatrix} \dot{q}_{obj} \\ -\dot{\theta}_{man} \end{bmatrix} + \mathcal{J}^t \mathcal{M} \begin{bmatrix} g_{obj} + h_{obj} \\ g_{man} + h_{man} - \tau \end{bmatrix}. \quad (24)$$

La ecuación (19) se resuelve para obtener c_{jt} y c_{jo} con $j \in \mathcal{S}$ y se reemplazan en (21). Los vectores de aceleración y fuerzas de contacto se particionan para los contactos \mathcal{R} y \mathcal{S} . Como no hay restricciones adicionales para las componentes tangencial y ortogonal

de la aceleraciones en los puntos de contacto de deslizamiento, las ecuaciones del sistema (21) que definen estas componentes pueden separarse del mismo sin afectar la solución del problema de complementariedad

$$\begin{bmatrix} a_{Sn} \\ a_{Rn} \\ a_{Rt} \\ a_{Ro} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} c_{Sn} \\ c_{Rn} \\ c_{Rt} \\ c_{Ro} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{Sn} \\ b_{Rn} \\ b_{Rt} \\ b_{Ro} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

donde:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (\tilde{A}_{nn})_{SS} & (A_{nn})_{SR} & (A_{nt})_{SR} & (A_{no})_{SR} \\ (\tilde{A}_{nn})_{RS} & (A_{nn})_{RR} & (A_{nt})_{RR} & (A_{no})_{RR} \\ (\tilde{A}_{tn})_{RS} & (A_{tn})_{RR} & (A_{tt})_{RR} & (A_{to})_{RR} \\ (\tilde{A}_{on})_{RS} & (A_{on})_{RR} & (A_{ot})_{RR} & (A_{oo})_{RR} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A}_{nn})_{SS} \\ (\tilde{A}_{nn})_{RS} \\ (\tilde{A}_{tn})_{RS} \\ (\tilde{A}_{on})_{RS} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (A_{nn})_{SS} \\ (A_{nn})_{RS} \\ (A_{tn})_{RS} \\ (A_{on})_{RS} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (A_{nt})_{SS} \\ (A_{nt})_{RS} \\ (A_{tt})_{RS} \\ (A_{ot})_{RS} \end{bmatrix} V_{tS} - \begin{bmatrix} (A_{no})_{SS} \\ (A_{no})_{RS} \\ (A_{to})_{RS} \\ (A_{oo})_{RS} \end{bmatrix} V_{oS}, \quad (27)$$

$$V_{\alpha S} = \text{diag} \left(\frac{\mu_j v_{j\alpha}}{\sqrt{v_{jt}^2 + v_{jo}^2}} \right), \quad j \in \mathcal{S}, \quad \alpha \in \{t, o\}. \quad (28)$$

Las ecuaciones (15-17), (18-20), (25-28), constituyen un problema de complementariedad no lineal mixto PCNM como se define en (1) asociado a la dinámica 3D de varios cuerpos rígidos en contacto con fricción de Coulomb.

Para expresar el problema de complementariedad no lineal mixto con la notación usada en (2) se introducen las variables de holgura s_j definidas por,

$$s_j = \mu_j^2 c_{jn}^2 - c_{jt}^2 - c_{jo}^2 \geq 0, \quad j \in \mathcal{R}, \quad (29)$$

y el vector de variables complementarias λ cuyas componentes están dadas por,

$$\lambda_j = \sqrt{a_{jt}^2 + a_{jo}^2}, \quad j \in \mathcal{R}. \quad (30)$$

Se asignan, el vector $u \in \mathbb{R}^{n_S+2n_R}$ correspondiente a las variables complementarias, el vector $v \in \mathbb{R}^{4n_R}$ correspondiente a las variables libres y el vector de las variables de holgura $z \in \mathbb{R}^{n_S+2n_R}$

$$u = \begin{bmatrix} c_{Sn} \\ c_{Rn} \\ \lambda \end{bmatrix} \geq 0, \quad v = \begin{bmatrix} c_{Rt} \\ c_{Ro} \\ a_{Rt} \\ a_{Ro} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} a_{Sn} \\ a_{Rn} \\ s \end{bmatrix} \geq 0. \quad (31)$$

Particionando adecuadamente el sistema (25) y con (29) obtenemos la función vectorial $F : \mathbb{R}^{n_S+6n_{\mathcal{R}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_S+2n_{\mathcal{R}}}$,

$$F(u, v) = \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} A_1 & A_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} c_{S_n} \\ c_{\mathcal{R}_n} \\ c_{\mathcal{R}_t} \\ c_{\mathcal{R}_o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{S_n} \\ b_{\mathcal{R}_n} \end{bmatrix} \\ s(c_{\mathcal{R}_n}, c_{\mathcal{R}_t}, c_{\mathcal{R}_o}) \end{array} \right), \quad (32)$$

con

$$A_1 = \begin{bmatrix} (\tilde{A}_{nn})_{SS} & (A_{nn})_{S\mathcal{R}} \\ (\tilde{A}_{nn})_{\mathcal{R}S} & (A_{nn})_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} (A_{nt})_{S\mathcal{R}} & (A_{no})_{S\mathcal{R}} \\ (A_{nt})_{\mathcal{R}\mathcal{R}} & (A_{no})_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \end{bmatrix}.$$

La función vectorial $G : \mathbb{R}^{n_S+6n_{\mathcal{R}}} \rightarrow \mathbb{R}^{4n_{\mathcal{R}}}$ se expresa como sigue

$$G(u, v) = \begin{bmatrix} G_1(u, v) \\ G_2(u, v) \\ G_3(u, v) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

donde

$$(G_1(u, v))_j = \mu_j c_{jn} a_{jt} + c_{jt} \lambda_j, \quad j \in \mathcal{R}, \quad (34)$$

$$(G_2(u, v))_j = \mu_j c_{jn} a_{jo} + c_{jo} \lambda_j, \quad j \in \mathcal{R}, \quad (35)$$

$$G_3(u, v) = \begin{bmatrix} a_{\mathcal{R}_t} \\ a_{\mathcal{R}_o} \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} A_3 & A_4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} c_{S_n} \\ c_{\mathcal{R}_n} \\ c_{\mathcal{R}_t} \\ c_{\mathcal{R}_o} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{\mathcal{R}_t} \\ b_{\mathcal{R}_o} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} (\tilde{A}_{tn})_{\mathcal{R}S} & (A_{tn})_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \\ (\tilde{A}_{on})_{\mathcal{R}S} & (A_{on})_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} (A_{tt})_{\mathcal{R}\mathcal{R}} & (A_{to})_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \\ (A_{ot})_{\mathcal{R}\mathcal{R}} & (A_{oo})_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \end{bmatrix}.$$

5 EXPERIENCIA NUMÉRICA

Para ejemplificar el problema de complementaridad presentado en la sección 2 y resolverlo usando la metodología descrita en la sección 3 se considera el modelo de un objeto sujeto por una mano robot con tres dedos.

Para el ejemplo propuesto se establece la *configuración inicial* fijando la ubicación de los sistemas coordenados con orígenes en, el centro de masa del cuerpo (\mathbf{B}), la base del j -ésimo robot (\mathbf{S}_j), el j -ésimo punto de contacto (\mathbf{C}_j) y la palma de la mano (\mathbf{P}). Se considera el origen del sistema de coordenadas de referencia ubicado en la palma de la mano robot. En la figura 1 se presenta un esquema bidimensional para la configuración dada.

El algoritmo 1 obtiene la configuración del sistema de varios cuerpos en contacto en el instante $t_0 + \Delta t$ a partir de una configuración inicial.

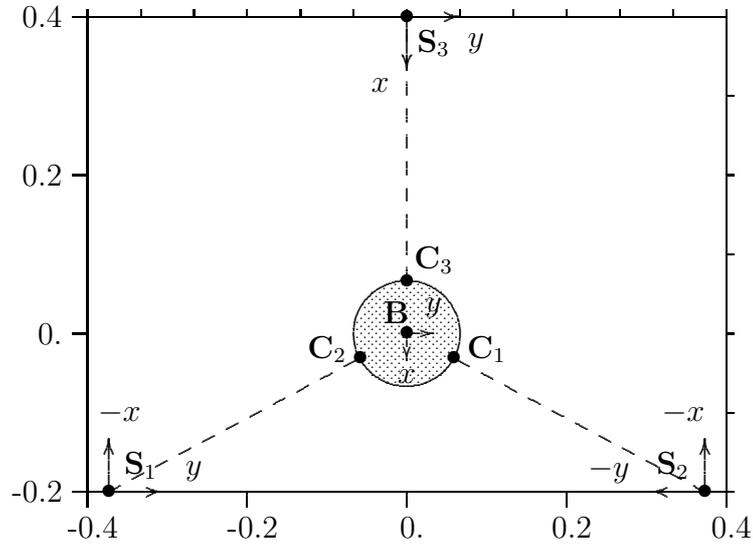


Figura 1: Tres dedos sujetando una esfera.

Algoritmo 1 Dados μ , $n_{\mathcal{R}}$, $n_{\mathcal{S}}$, y los parámetros de la configuración,

1. Definición de la configuración inicial.
 - 1.1 Calcular las matrices de las transformaciones de coordenadas,
 - 1.2 calcular el vector posición de las juntas del manipulador, θ_{man} (Problema de cinemática inversa).
2. Cálculo de las matrices para el objeto W , M_{obj} .
3. Cálculo de las matrices de los manipuladores, J_{man} , M_{man} .
4. Cálculo de las matrices del problema de complementariedad, \mathcal{M} , \mathcal{J} , y \tilde{A} .
5. Resolución del problema de complementariedad via optimización,
6. Definición de la nueva configuración.

En el paso 5. el problema de optimización puede resolverse usando cualquier algoritmo adecuado.

Para establecer la configuración inicial se consideran las matrices p_t y $p_{tt} \in \mathbb{R}^{3 \times n_c}$. Cada columna de p_t , $p_t(:, j)$, contiene las coordenadas del j -ésimo punto de contacto respecto del sistema \mathbf{P} ; mientras que la j -ésima columna de p_{tt} contiene las coordenadas del j -ésimo punto de contacto respecto del sistema coordinado \mathbf{S}_j . Para la configuración propuesta como ejemplo las matrices son,

$$p_t = \begin{bmatrix} r \cos(\sigma) & r \cos(\sigma) & -r \\ -r \sin(\sigma) & r \sin(\sigma) & 0 \\ a_{cm} & a_{cm} & a_{cm} \end{bmatrix},$$

$$p_{tt} = \begin{bmatrix} -(\tilde{b} - r) \cos(\sigma) & -(\tilde{b} - r) \cos(\sigma) & \tilde{b} - r \\ (\tilde{b} - r) \sin(\sigma) & -(\tilde{b} - r) \sin(\sigma) & 0 \\ a_{cm} & a_{cm} & a_{cm} \end{bmatrix},$$

donde r es el radio de la esfera, a_{cm} establece la ubicación del centro de masa de la esfera respecto del sistema de ejes coordenados de la palma \mathbf{P} , $p_{cm} = (0, 0, a_{cm})$, \tilde{b} es la distancia entre el origen de coordenadas \mathbf{B} y la proyección en el plano $z = a_{cm}$ del origen del j -ésimo sistema de coordenadas \mathbf{S}_j , $j = 1, 2, 3$ y σ es el ángulo que forma el semieje positivo x del sistema de coordenadas cartesianas fijo en el centro de masa del cuerpo \mathbf{B} y el segmento que une el origen de \mathbf{B} con los puntos de contacto C_1 y/o C_2 . Como se observa en la figura 1 la ubicación de los contactos C_1 y C_2 es simétrica respecto de \mathbf{B} .

Las matrices de rotaciones para cada contacto tienen las siguientes expresiones:

$$R_{P,C_1} = Q_z(-\sigma) Q_y(-\pi/2), \quad R_{P,C_2} = Q_x(\pi/2) Q_z(-\sigma), \quad R_{P,C_3} = Q_z(\pi/2) Q_x(\pi/2).$$

donde $Q_\alpha(\varphi)$, son las matrices elementales de rotación alrededor de la dirección α un ángulo φ .

El *modelo de fricción* queda caracterizado por la matriz,

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

La matriz $W \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ se expresa como sigue,

$$W = \begin{bmatrix} W_1 B & W_2 B & W_3 B \end{bmatrix}, \quad (38)$$

con W_j , con $j = 1, 2, 3$, definidas como,

$$W_j = \begin{bmatrix} R_{P,C_j} & 0 \\ \hat{p}_t(\cdot, j) R_{P,C_j} & R_{P,C_j} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Se utiliza la siguiente notación, dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$, $\hat{v} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es,

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

La matriz de momentos de inercia de la esfera respecto del centro de masa es $M_2 = \frac{2}{5}mr^2I_3$, donde I_3 es la matriz identidad de dimensión 3. Cuando el sistema de referencia fijo no está en el centro de masa del cuerpo se debe efectuar una modificación de la matriz de momentos de inercia usando el resultado del *Teorema de ejes paralelos*⁶.

La matriz de masa del objeto $M_{obj} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es,

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} mI_3 & 0 \\ 0 & M_2^{(P)} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Los experimentos se llevaron a cabo usando el manipulador conocido como PUMA (Programmable Universal Manipulator for Assembly). Para cada manipulador se calculan las matrices Jacobiana J_{f_j} y de masa M_{f_j} usando la *toolbox de robótica en MATLAB*⁷. La matriz Jacobiana para toda la mano de tres dedos $J_{man} \in \mathbb{R}^{9 \times n_\theta}$ resulta,

$$J_{man} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

con

$$J_j = B_f^t \begin{bmatrix} R_{P,C_j}^t & R_{P,C_j}^t \hat{D}_{tt}^t(\cdot, j) \\ 0 & R_{P,C_j}^t \end{bmatrix} J_{f_j},$$

donde B_f es la matriz del modelo de fricción.

La matriz de inercia de cada manipulador $M_{f_j} \in \mathbb{R}^{n_{\theta_j} \times n_{\theta_j}}$ es

$$M_{f_j}(\theta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} J_{L_j}^t(\theta) M_{L_j} J_{L_j}(\theta), \quad (43)$$

donde J_{L_j} y M_{L_j} son las matrices Jacobiana y de inercia generalizadas del L_j -ésimo eslabón (*link*). La matriz de masa de los tres dedos $M_{man} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ es,

$$M_{man} = \begin{bmatrix} M_{f_1} & 0 & 0 \\ 0 & M_{f_2} & 0 \\ 0 & 0 & M_{f_3} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Si se considera que todos los contactos son de deslizamiento el PCNM se reduce a un PCL. Resolver el PCL significa resolver el problema de optimización definido en (3) con la función objetivo

$$f(c_n, a_n) = \| a_n - \tilde{A}_{nn}c_n - b_n \|_2^2 + (a_n^t c_n)^2, \quad (45)$$

donde el vector $b_n \in \mathbb{R}^3$ se calcula a partir de la ecuación (24),

$$\tilde{A}_{nn} = A_{nn} - A_{nt}V_t - A_{no}V_o, \quad (46)$$

Las matrices V_t y V_o fueron definidas en (28) y cada submatriz $A_{\alpha\gamma}$ tiene la expresión

$$A_{\alpha\gamma} = W_{\alpha}^t (M_{obj})^{-1} W_{\gamma} + J_{\alpha} (M_{man})^{-1} J_{\gamma}^t. \quad (47)$$

Se hace un cambio de variables, $\hat{t} \in \mathbb{R}^6$, $\hat{t} = [c_n, a_n]^t$ de forma que la función objetivo se expresa como sigue,

$$f(\hat{t}) = \sum_{i=1}^3 (\hat{t}_{i+3} - \sum_{j=1}^3 M_{ij} \hat{t}_j - (b_n)_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \hat{t}_i \hat{t}_{i+3} \right)^2. \quad (48)$$

La matriz del problema de complementaridad M depende de los coeficientes de fricción en los puntos de contacto. Para el ejemplo propuesto y usando un manipulador PUMA560 los resultados obtenidos son:

Tabla 1: Resultados del problema de optimización para el PCL.

μ	<i>BoxIt</i>	<i>FunEval</i>	<i>QuacanIt</i>	<i>Matxvec</i>	f
0.1	4	5	15	22	2.0526×10^{-23}
0.2	6	7	35	49	1.2063×10^{-14}
0.4	7	8	32	48	1.7957×10^{-22}
0.5	9	10	47	71	1.0521×10^{-14}

Tabla 2: Resultados del PCL para los contactos de deslizamiento.

μ	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}
0.1	2.2867	2.7800	3.8067	0.	0.	0.
0.2	1.4669	2.2680	2.7108	0.	0.	0.
0.4	3.3672	6.3354	6.5843	0.	0.	0.
0.5	14.745	29.731	28.862	0.	0.	0.

Tabla 3: Resultados del problema de optimización para el PCNM.

μ	x_0	<i>BoxIt</i>	<i>FunEval</i>	<i>QuacanIt</i>	<i>Matxvec</i>	f
0.1	0	30	42	1179	1561	3.9561×10^{-10}
0.2	0	21	35	979	1390	1.4722×10^{-15}
0.4	0	18	30	762	1109	9.5039×10^{-16}
0.6	0	15	25	625	934	6.7051×10^{-12}
0.8	0	27	38	1021	1411	6.4478×10^{-11}

Tabla 4: Resultados del PCNM para los contactos de rodamiento.

$\mu = 0.1$	Contacto 1	Contacto 2	Contacto 3
C_{Rn}	1.2414	1.7054	2.1572
C_{Rt}	-8.3648×10^{-2}	1.54276×10^{-1}	1.8465×10^{-1}
C_{Ro}	9.1829×10^{-2}	7.2654×10^{-2}	1.1152×10^{-1}
a_{Rn}	0.	0.	0.
a_{Rt}	8.8764×10^{-1}	-2.7354	-2.1172
a_{Ro}	-9.7443×10^{-1}	-1.2882	-1.2787
s	0.	5.54549×10^{-7}	0.
λ	1.3173	3.0238	2.4733
	de deslizamiento	de deslizamiento	de deslizamiento

Como puede observarse en la tabla 2 el contacto se mantiene en todos los casos.

Si se considera que los tres contactos son de rodamiento el problema se formula como un problema de complementaridad no lineal mixto. El PCNM se resuelve considerando el problema de optimización equivalente (3), usando la función objetivo propuesta en (4). Se hace el siguiente cambio de variables $\tilde{t} = [c_n, c_t, c_o, a_n, a_t, a_o, s, \lambda]^t$, con la función objetivo $f(\tilde{t}) = sum_1 + sum_2 + sum_3^2 + sum_4$, donde

$$sum_1 = \sum_{j=1}^3 [\tilde{t}(j+18) - (\mu(j) \tilde{t}(j))^2 + (\tilde{t}(j+3))^2 + (\tilde{t}(j+6))^2]^2,$$

$$sum_2 = \sum_{j=1}^3 [\mu(j) \tilde{t}(j) \tilde{t}(j+12) + \tilde{t}(j+3) \tilde{t}(j+21)]^2 + [\mu(j) \tilde{t}(j) \tilde{t}(j+15) + \tilde{t}(j+6) \tilde{t}(j+21)]^2,$$

$$sum_3 = \sum_{j=1}^3 \tilde{t}(j) \tilde{t}(j+9) + \sum_{j=1}^3 \tilde{t}(j+18) \tilde{t}(j+21),$$

$$sum_4 = \|z_1 - F_1(u, v)\|_2^2 + \|G_3(u, v)\|_2^2.$$

El problema de optimización que se resuelve es de dimensión 24. Los resultados obtenidos se resumen en las tablas 3 y 4.

6 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Se plantea la dinámica de varios cuerpos rígidos en contacto con fricción de Coulomb como un problema de complementaridad no lineal mixto.

El problema de complementaridad no lineal mixto planteado aquí se asocia a un problema de optimización con restricciones de caja equivalente.

Es importante destacar que el problema de optimización para el caso mixto es general, a diferencia de muchos de los métodos, que son específicos para problemas de complementaridad lineal o no lineal, esta técnica puede aplicarse a cualquiera de ellos con sólo definir adecuadamente la función objetivo y la caja.

Se considera el ejemplo de una mano robot con tres dedos sujetando un objeto. Se privilegia la elección de las matrices de menor dimensión, que responden a un modelo real, respecto de matrices de mayor dimensión. Se desarrollan funciones en **MATLAB** para obtener las matrices del sistema y se resuelve el problema de optimización con restricciones de caja utilizando el programa de computación **easy**. La robustez del método de resolución del problema de optimización permite obtener en la mayoría de los casos una solución.

En el futuro se desea generar problemas de contacto con mayor número de cuerpos y puntos de contacto, tanto de rodamiento como de deslizamiento, tratando de considerar la estructura de las matrices que se generan sin perder el significado físico. Además se considera de interés completar los cálculos de la cinemática y la dinámica del problema del robot para una sucesión de tiempos $t_1, t_2, t_3\dots$ y verificar si los resultados obtenidos son satisfactorios. Se planea continuar profundizando el estudio de los PCNM en general siguiendo la línea de investigación propuesta.

7 REFERENCIAS

- [1] M.C. Ferris and J.S. Pang, “Engineering and economic applications of complementarity problems”, *SIAM Review*, **39**(4), 669-713 (1997).
- [2] J.C. Trinkle, J.S. Pang, S. Sudarsky, and G. Lo, “On dynamic multi-rigid-body contact problems”, *Z. Angew. Math. Mech.*, **77**, 267-279 (1997).
- [3] J.S. Pang and J.C. Trinkle, “Complementarity formulations and existence of solutions of multi-rigid-body contact problems with coulomb friction”, *Mathematical Programming*, **73**, 199-226 (1996).
- [4] R. Andreani, A. Friedlander, M.P. Mello, and S.A. Santos, “Complementarity and equivalent formulations via nonlinear programmings: numerical results on multi-rigid-body contact problem with Coulomb friction”, Technical Report 50, Instituto de Matemática, Estadística e Ciência da Computação da Universidade de Campinas (2002).
- [5] R.M. Murray, Z. Li, and S.S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, 2000 Corporate Blvd., N.W., Boca Raton, Florida (1994).
- [6] P.I Corke, *Robotics TOOLBOX for MATLAB (Release 6)* (2001), disponible en <http://www.cat.csiro.au/cmst/satff/pic/robot>.
- [7] J.J. Craig, *Introduction to robotics: mechanics and control*, Addison-Wesley Publishing Company (1989).