

IMPLEMENTACION NUMERICA DEL MODELO CONSTITUTIVO DE GURSON-TVERGAAD-NEEDLEMAN

A. Anca, P. Sanchez y J. Risso

CIMEC / CONICET-UNL, Guemes 3450,
3000 Santa Fe,
Argentina.

email: aanca@intec.unl.edu.ar

Palabras Claves: fractura dúctil, nucleación y coalescencia de vacíos, modelo de Gurson.

Resumen. *En este trabajo se presenta un algoritmo para la integración numérica del modelo constitutivo de Gurson.*

Se detallan las ecuaciones de definición del modelo, incluyendo el criterio de fluencia y las leyes de evolución. Posteriormente se analiza el esquema de integración utilizado.

Por último se presentan resultados numéricos bajo hipótesis de pequeñas deformaciones, incluyendo análisis de error y aplicaciones a problemas 2-D axisimétricos.

1. INTRODUCCION

El modelo constitutivo de Gurson,¹ posteriormente modificado por Tvergaard-Needleman,² describe el proceso microscópico de nucleación, crecimiento y coalescencia de vacíos (voids) en la matriz del material. Este modelo puede ser empleado para predecir fractura dúctil para diferentes mecanismos de daño, analizando el comportamiento macroscópico por el método de elementos finitos.

Aravas³(87) presentó un algoritmo incondicionalmente estable para la integración numérica de modelos constitutivos dependientes de la presión, el cual es aplicable como caso particular al modelo de Gurson. A diferencia del mismo presentamos una estrategia alternativa sin desacople de las ecuaciones que gobiernan el modelo dentro del esquema iterativo.

En la sección 2.1 planteamos las ecuaciones de definición del modelo. A continuación en la sección 2.2 detallamos el esquema de integración utilizado para la resolución del mismo. En la sección 3.1 analizamos el error obtenido en el presente esquema. Por último, en la sección 3.2 mostramos resultados obtenidos en el análisis axisimétrico de tracción de barra.

2. MODELO DE GURSON

2.1. Definición del modelo

El modelo constitutivo de Gurson puede interpretarse como un modelo elastoplástico con daño, donde la relación tensión–deformación está dada (en el caso de linealidad geométrica) por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la tensión, $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ son la deformación total y plástica respectivamente y \mathbb{C} el tensor elástico de Hooke.

En el criterio de fluencia es donde se manifiesta el mecanismo de crecimiento y coalescencia de vacíos. Esta función está dada por :

$$\phi(p, q, f^*, e_m) = \frac{q^2}{(\sigma_m(e_m))^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{q_2}{2} \frac{p}{\sigma_m(e_m)}\right) - 1 - q_1^2 (f^*)^2 \quad (2)$$

donde p es la tensión media y q la tensión equivalente, definidas como:

$$p = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \quad ; \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_{dev} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{dev}} \quad (3)$$

La variable interna f^* es la relación de vacíos respecto al volumen total y aquí cumple la función de una variable de daño, aunque, al tomar valores muy pequeños ($< 0,1$), se desprecia su efecto sobre la rigidez elástica.

El término $\sigma_m(e_m)$ corresponde a la tensión equivalente de fluencia microscópica del material base (matriz) y depende exclusivamente de la deformación plástica efectiva de la

misma matriz (e_m). Ejemplos de esta dependencia es la ley potencial de Ramberg-Osgood (ver por ejemplo Lemaitre et al.⁴) de la forma

$$\sigma_m = \sigma_m^0 + H(e_m)^n \quad (4)$$

con σ_m^0 , H y n parámetros del material. Finalmente, q_1 y q_2 son parámetros del material.

De este modo se reconocen como variables internas del modelo a la deformación plástica ϵ^p conjuntamente con f^* y e_m . Para estas, se definen ecuaciones de evolución. La velocidad de deformación plástica se introduce siguiendo una ley asociativa:

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \nabla_{\sigma} \phi; \quad (5)$$

y escribiendo esta ley con las variables en velocidad conjugadas a p y q :

$$\dot{\epsilon}_p = \text{tr}(\dot{\epsilon}) \quad ; \quad \dot{\epsilon}_q = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{\text{dev}} \cdot \dot{\epsilon}_{\text{dev}}} \quad (6)$$

de tal modo que aplicando la descomposición $\sigma \cdot \dot{\epsilon} = p \dot{\epsilon}_p + q \dot{\epsilon}_q$; la ecuación (5) deriva en:

$$\dot{\epsilon}_p^p = \gamma \nabla_p \phi \quad ; \quad \dot{\epsilon}_q^p = \gamma \nabla_q \phi \quad (7)$$

Dos términos aportan a la ley de evolución del daño. Uno corresponde a la velocidad de crecimiento de vacíos, altamente influenciado por la triaxialidad de las tensiones. El segundo término corresponde a la velocidad de nucleación de vacíos que depende fundamentalmente de la velocidad de deformación plástica de la matriz \dot{e}_m :

$$\dot{f}^* = \underbrace{(1 - f^*) \dot{\epsilon}_p^p}_{\text{crecimiento}} + \underbrace{A_m(e_m) \dot{e}_m}_{\text{nucleacion}} \quad (8)$$

Escogiendo una distribución normal para el crecimiento, el término A_m está dado por:

$$A_m = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e_m - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right) \quad (9)$$

donde ϵ_N es la deformación media para nucleación, s_N la desviación estándar y f_N es la fracción en volumen de partículas capaces de producir nucleación (se asume que partículas duras son las que generan vacíos o huecos).

Finalmente la evolución para la variable interna e_m está fundamentada en el balance de potencia disipada en el material base, con el modelo completo:

$$(1 - f^*) \sigma_m \dot{e}_m = \sigma \cdot \dot{\epsilon} = p \dot{\epsilon}_p + q \dot{\epsilon}_q \quad (10)$$

De este modo, la relación tensión– deformación (1), el criterio de fluencia (2), las leyes de evolución (7), (8) y (10) junto con las típicas condiciones de carga–descarga:

$$\gamma \geq 0 \quad ; \quad \phi \leq 0 \quad ; \quad \gamma \phi = 0 \quad (11)$$

determinan el modelo de Gurson completamente.

2.2. Integración del modelo

La integración del modelo se realiza utilizando un esquema de diferencias finitas hacia atrás (backward-Euler). Las ecuaciones finales a resolver pueden formularse en términos de la proyección elástica (estado trial), asumiendo como conocidas las variables $\boldsymbol{\varepsilon}^{t+1}$ (al tiempo $t + 1$) y el resto de las variables al tiempo t , y definiendo la tensión de prueba como

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}^{t+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pt})$$

Se repite en este caso el argumento clásico que, si se mantienen las variables internas fijas en el paso de tiempo y la tensión de prueba no viola el criterio de fluencia, el mismo se considera elástico (todas las ecuaciones de evolución se verifican trivialmente). Caso contrario, se debe resolver el siguiente sistema algebraico de ecuaciones (todas las variables se consideran evaluadas al tiempo $t + 1$):

$$p = p^{tr} - K \Delta \varepsilon_p^p \quad (12)$$

$$q = q^{tr} - 3G \Delta \varepsilon_q^p \quad (13)$$

$$\Delta \varepsilon_p^p \nabla_q \phi - \Delta \varepsilon_q^p \nabla_p \phi = 0 \quad (14)$$

$$\phi = 0 \quad (15)$$

$$\Delta e_m = \frac{\Delta \varepsilon_p^p p + \Delta \varepsilon_q^p q}{(1-f^*)\sigma_m} \quad (16)$$

$$\Delta f^* = (1-f) \Delta \varepsilon_p^p + A_m(e_m) \Delta e_m = 0 \quad (17)$$

donde introducimos la notación $\Delta(\cdot)$ para significar el incremento de las variables correspondientes en el paso ($t + 1$). La ecuación (14) resulta trivialmente de considerar las siguientes ecuaciones de flujo incremental:

$$\Delta \varepsilon_p^p = \gamma \nabla_p \phi \quad ; \quad \Delta \varepsilon_q^p = \gamma \nabla_q \phi \quad (18)$$

Las ecuaciones (12) y (13) se utilizan para expresar explícitamente la dependencia de p con $\Delta \varepsilon_p^p$ y de q con $\Delta \varepsilon_q^p$. Con esto, el sistema de 4 ecuaciones restantes determinan los valores de $(\Delta \varepsilon_p^p, \Delta \varepsilon_q^p, \Delta f^*, \Delta e_m)$.

Para resolver el sistema no-lineal de ecuaciones algebraicas, utilizamos el método de Newton donde los incrementos se aproximan iterativamente por las ecuaciones :

$$\mathbb{J} \begin{pmatrix} \delta \varepsilon_p^p \\ \delta \varepsilon_q^p \\ \delta f \\ \delta e_m \end{pmatrix} = -\mathbf{Res} \quad (19)$$

El Jacobiano \mathbb{J} del sistema de ecuaciones se presenta en el Apéndice I.

3. RESULTADOS NUMERICOS

3.1. Análisis de Error

En esta sección se analiza la exactitud del algoritmo de integración del modelo. Para representar los resultados numéricos se utilizaron mapas de iso-error.

El error se analizó para tres posiciones de la tensión inicial $\boldsymbol{\sigma}_0$ sobre la superficie de fluencia. Se adoptaron los siguientes valores de tensión media:

$$\begin{aligned} p_{01} &= \frac{\sigma_m^0}{2} \\ p_{02} &= \sigma_m^0 \\ p_{03} &= 2\sigma_m^0 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_0 &= p_0 \mathbf{I} + \sqrt{\frac{2}{3}} q_0 \mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= \frac{\boldsymbol{\sigma}_{dev}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{dev} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{dev}}} \end{aligned} \quad (20)$$

Se ha utilizado un material base con endurecimiento isotrópico según la siguiente ley:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_m^0} = \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_m^0} + \frac{3Ge_m}{\sigma_m^0} \right)^n \quad (21)$$

y con propiedades: $\sigma_m^0 = 100$; $n = 0,1$; $E = 30000$; $\nu = 0,3$; $q_1 = 1,5$ y $q_2 = 1$, donde E es el módulo de Young, G es el módulo de corte, ν es la relación de Poisson y σ_m^0 es la tensión inicial de fluencia del material base. Los parámetros de coalescencia o nucleación son: $f_N = 0,04$; $e_N = 0,3$ y $s_N = 0,1$. La porosidad inicial adoptada es de $f_0 = 0,03$.

Para graficar la dependencia del error como función del incremento de deformación $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ se descompone el mismo en su componente volumétrica $\Delta\varepsilon_m$ y desviadora $\Delta\mathbf{e}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\varepsilon_m \mathbf{I} + \Delta\mathbf{e}$. La componente desviadora $\Delta\mathbf{e}$ se descompone a su vez en una componente radial $\Delta\mathbf{e}_r$ y tangencial $\Delta\mathbf{e}_t$, $\Delta\mathbf{e} = \Delta e_r \mathbf{n}_r + \Delta e_t \mathbf{n}_t$, en donde \mathbf{n}_r y \mathbf{n}_t son vectores unitarios en la dirección radial y tangencial al círculo de von Mises sobre el plano desviador, fig.1 .

El error para la componente desviadora es calculado en el rango

$$0 \leq \omega_r \leq 4 \quad , \quad 0 \leq \omega_t \leq 4 \quad (22)$$

donde $\omega_r = \frac{2G\Delta e_r}{\sigma_m^0}$; $\omega_t = \frac{2G\Delta e_t}{\sigma_m^0}$. Para la componente volumétrica de la deformación se ha utilizado $\omega_m = 0, 1, 2$ con $\omega_m = \frac{3K\Delta\varepsilon_m}{\sigma_m^0}$.

La figura 2 muestra los mapas de iso-error para la tensión calculada como función del incremento volumétrico y desviador de la deformación impuesta para los tres casos de tensión inicial: $p_{01} = 50$ en la columna izquierda, $p_{02} = 100$ en la columna central y

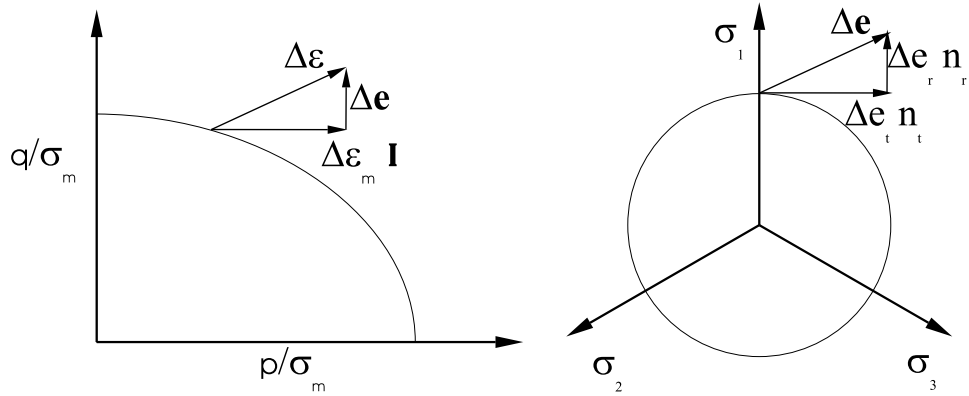


Figura 1: Estado inicial y descomposición del incremento de deformación

$p_{03} = 200$ en la columna derecha. Los resultados se expresan por medio del error cuadrático medio relativo:

$$error = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)}}{\sqrt{(\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}^*)}} 100 \quad (23)$$

Aquí $\boldsymbol{\sigma}$ es el resultado de aplicar el algoritmo de retorno a la superficie de fluencia, mientras que $\boldsymbol{\sigma}^*$ es la solución “exacta” correspondiente al incremento de deformación especificado. La solución exacta es obtenida para un dado incremento de deformación repitiendo la aplicación del mismo algoritmo de retorno a la superficie de fluencia con sub-incrementos de deformación de 1/1000.

Podemos concluir que las curvas de iso-error para $p_{02} = 100$ concuerdan bien con los resultados obtenidos por Zhang.⁵ Se aprecia también la dependencia del error respecto de la tensión media inicial p_0 sobre la superficie de fluencia.

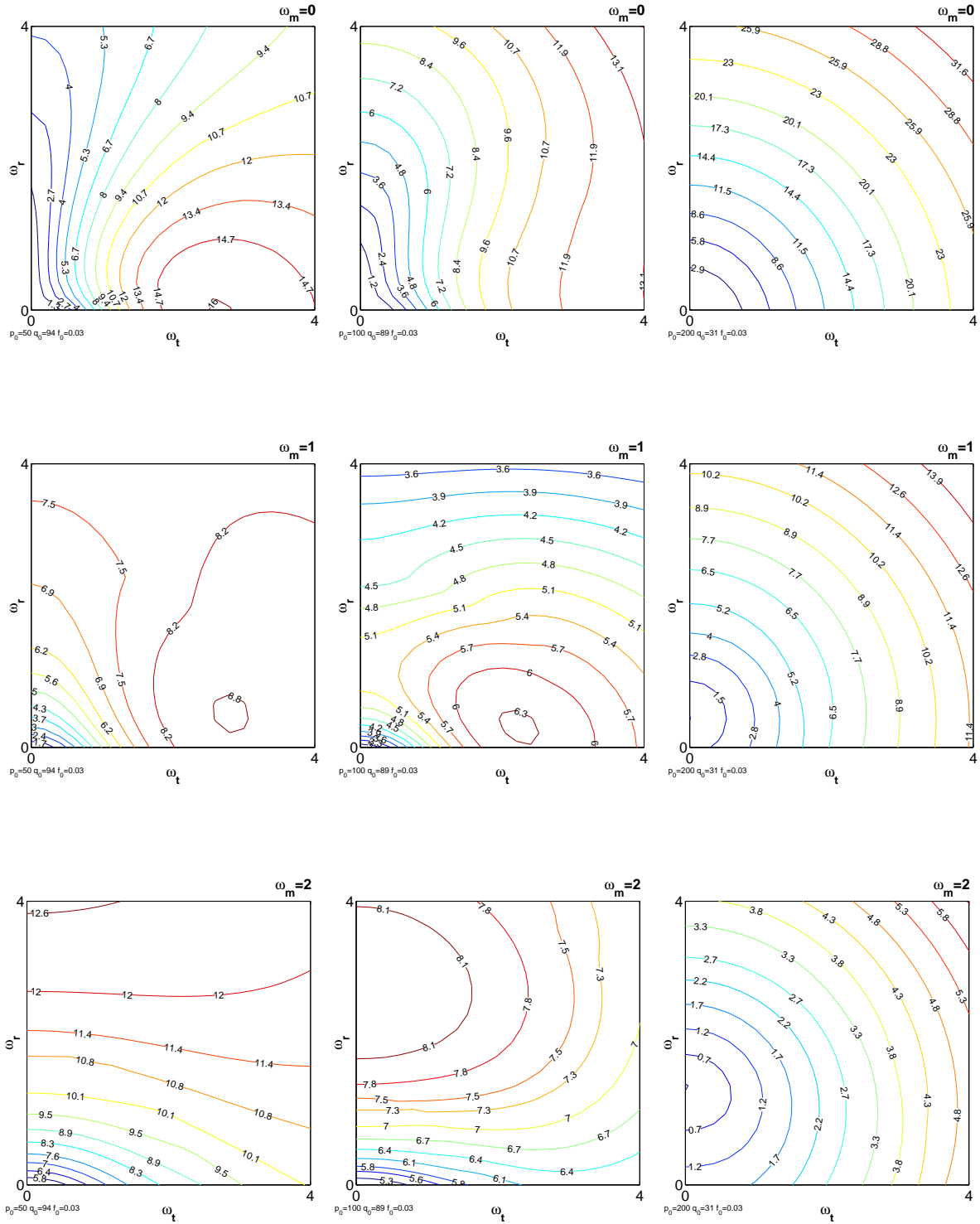


Figura 2: Mapas de iso-error de Tensión

3.2. Tracción de barra

En esta sección mostramos los resultados numéricos obtenidos tras implementar el modelo constitutivo de Gurson en un código standard de elementos finitos no-lineal. Se analiza un ejemplo sencillo axisimétrico de tracción de barra. Para la discretización espacial se han utilizado elementos cuadrangulares bilineales con 2x2 puntos de Gauss. La geometría, condiciones de borde y cargas pueden observarse en la fig. 3. La longitud y el

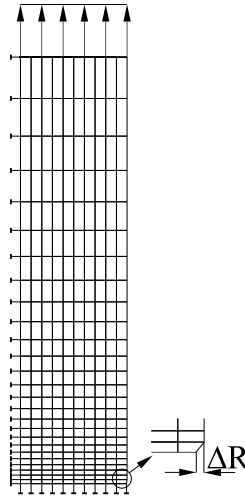


Figura 3: Geometría y detalles de la discretización

radio inicial son $2l_0$ y R_0 respectivamente, verificándose la siguiente relación $\frac{l_0}{R_0} = 4$. Se introduce una perturbación geométrica $\Delta R = 0,005R_0$ en el centro de la barra para forzar el inicio del proceso de plastificación en esa zona. Sólo un cuarto de la barra es modelada por razones de simetría. El test consiste en aplicar desplazamiento en forma incremental en los nodos superiores de la malla hasta llegar al desplazamiento final. Las propiedades del material base son las mismas que para el análisis de error previo.

A continuación mostramos los resultados obtenidos bajo la hipótesis de linealidad geométrica.

La curva carga normalizada vs. deformación axial (figura 4), pone de manifiesto la evolución de la variable interna f^* , superando en este sentido al incremento de tensión de fluencia dado por la ecuación 21, que se traduce a nivel macroscópico en un incipiente mecanismo de ablandamiento del material.

En la figura 5 se muestran curvas de nivel de la porosidad en la barra para el estado de máximo desplazamiento impuesto durante el test. En la zona de estricción se produce un estado triaxial de tensiones, que a su vez acelera la evolución de la variable interna f^* por crecimiento en esa región.

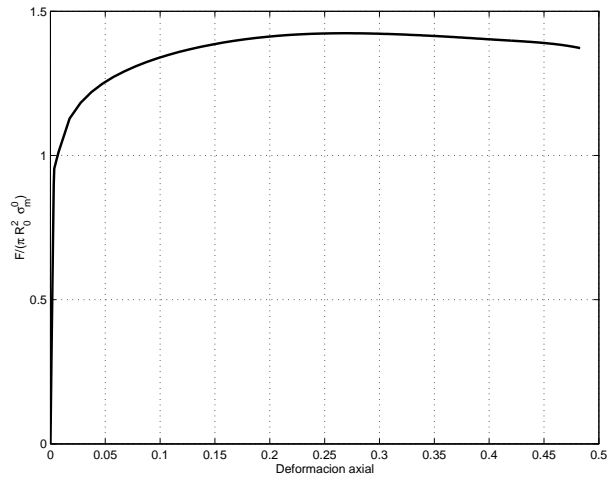


Figura 4: Carga normalizada vs. deformación

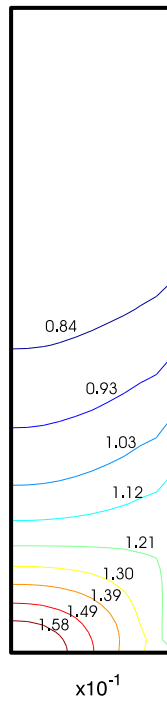


Figura 5: Curvas de nivel de la porosidad sobre la barra

4. CONCLUSIONES

Se ha propuesto un esquema totalmente acoplado para la integración de las ecuaciones constitutivas del modelo completo de Gurson por un método implícito. Se ha verificado que nuestra formulación presenta errores comparables con otros esquemas de integración propuestos en la literatura.^{3,5}

En el ejemplo de tracción uniaxial se observa la capacidad del modelo para predecir el crecimiento y nucleación de la porosidad (voids) como una variable interna de daño. Este mecanismo es evidenciado por la presencia de ablandamiento en la curva fuerza-deformación.

Como trabajo futuro se propone regularizar el comportamiento constitutivo para obtener objetividad en la respuesta cuando el proceso de ablandamiento se torna dominante.

Debe mencionarse además, que la evolución de las variables internas en situaciones particulares deriva en soluciones no admisibles físicamente (ver por ejemplo Kojic⁶), en tales casos será necesario desarrollar esquemas adicionales que eviten esta situación.

Apéndice I

Describimos el Jacobiano del sistema de ecuaciones (14),(15),(16) y (17).

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \phi_q + K\phi_{pp}\Delta\varepsilon_q^p & ; & -\phi_p - 3G\phi_{qq}\Delta\varepsilon_p^p & ; & -\phi_{pf}\Delta\varepsilon_q^p & , & \phi_{qe_n}\Delta\varepsilon_p^p - \phi_{pe_n}\Delta\varepsilon_q^p \\ -K\phi_p & ; & -3G\phi_q & ; & \phi_f & ; & \phi_{e_n} \\ -p + K * \Delta\varepsilon_p^p & ; & -q + 3G * \Delta\varepsilon_q^p & ; & -\sigma_m\Delta e_m & ; & (1 - f^*)\frac{d\sigma_m}{de_n}\Delta e_m \\ -(1 - f^*) & ; & 0 & ; & 1 + \Delta\varepsilon_p^p & ; & -\frac{dA_n}{de_n}\Delta e_m - A_m \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} \phi_p &= 2q_1 f^* \left(\frac{3}{2} \frac{q_2}{\sigma_m} \right) \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_m} \right) \\ \phi_q &= \frac{2q}{\sigma_m^2} \\ \phi_f &= 2q_1 \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_m} \right) - 2q_1^2 f^* \\ \phi_{e_n} &= \left[\frac{-2q^2}{\sigma_m^3} - 3q_1 f^* \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_m} \right) \frac{q_2 p}{\sigma_m^2} \right] \partial_{e_n} \sigma_m \\ \phi_{pq} &= \phi_{qf} = 0 \\ \phi_{pp} &= 2q_1 f^* \left(\frac{3}{2} \frac{q_2}{\sigma_m} \right)^2 \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_m} \right) \\ \phi_{qq} &= \frac{2}{\sigma_m^2} \\ \phi_{pe_n} &= 2q_1 f^* \left(-\frac{3}{2} \frac{q_2}{\sigma_m^2} \partial_{e_n} \sigma_m \right) \left[\sinh \left(\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_m} \right) + \frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_m} \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_m} \partial_{e_n} \sigma_m \right) \right] \\ \phi_{qe_n} &= -\frac{4q}{\sigma_m^3} \partial_{e_n} \sigma_m \end{aligned}$$

REFERENCIAS

- [1] Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part 1 - yield criteria and flow rules for porous ductile materials. *J. Eng. Matl. Tech.*, **99** (1977).
- [2] Tvergaard V. Material failure by void growth to coalescence. *Appl. Mech. Review*, **27** (1990).
- [3] Aravas N. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *Int. J. Numerical Meth. Eng.*, **24** (1987).
- [4] J.-L. Chaboche J. Lemaitre. *Mechanics of Solid Materials*. (1990).
- [5] Zhang Z. L. On the accuracies of numerical integration algorithms for gurson-based pressure-depended elastoplastic constitutive models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **121** (1995).
- [6] M. Kojic. Implicit stress integration procedure for small and large strains of the gurson material model. *Int. J. Numer. Mech. Engng*, **53**, 2701–2720 (2002).