

## **SIMULAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA GERAÇÃO DE CALOR NA DEGRADAÇÃO DE ESTRUTURAS METÁLICAS**

**Eduardo R. R. de Brito Junior<sup>\*</sup>, José Maria A. Barbosa<sup>\*</sup>,**

<sup>\*</sup> Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco  
R. Acadêmico Hélio Ramos S/N, Cidade Universitária, Recife-PE, Brasil Cep 50740-530, 55 (081)  
32718231 R 216, e-mail: [jmab@demec.ufpe.br](mailto:jmab@demec.ufpe.br), [errbj@yahoo.com.br](mailto:errbj@yahoo.com.br)

**Palavras chave:** Elementos Finitos, Elasto-Viscoplástico, Efeitos Térmicos, Dano.

**Resumo.** *Na análise de estruturas de aço a hipótese de transformações isotérmicas e geralmente utilizada. Nos componentes estruturais de aço submetidos a cargas cíclicas, uma parte do trabalho é transformado em calor resultando em um aumento da temperatura que afeta o comportamento mecânico do material. Um modelo elastoviscoplastico é apresentado e empregado no estudo da degradação e dos efeitos de acoplamento termomecânico de barras submetidas a cargas quase-estáticas. Uma variável interna é usada para representar o processo de degradação do material. O sistema de equações não lineares resultante é resolvido por um algoritmo baseado no método decomposição do operador e aplicação do método dos elementos finitos. Simulações numéricas simples realizadas em barras de aço 316L são apresentadas e analisadas. Este trabalho através de exemplos que a hipótese simplificada de transformação isotérmica pode ser inadequada quando transformações inelásticas estão presentes.*

## 1 - INTRODUÇÃO

Devido ao avanço computacional dos últimos anos, a utilização de modelagens mais completas e sofisticadas para simular e prever o comportamento dos materiais usados em Engenharia de uma forma mais realista e precisa, vem se tornando cada vez mais freqüente. Dado o grande número de variáveis utilizadas, a obtenção das equações do modelo consiste numa tarefa complexa sendo necessário um procedimento sistemático para obtê-las. A predição de vida útil pode ser feita através da Mecânica do Dano Contínuo onde inclui-se nas equações constitutivas uma variável adicional  $D$  ( $0 \leq D \leq 1$ ), denominada de dano, que é associada ao grau de degradação do material. O Dano neste trabalho pode ser interpretado como uma medida de degradação material local causada pela deformação plástica ( $D = 0$ , material virgem;  $D = 1$ , material totalmente degradado). Para maiores detalhes ver [1], [2]. Na maioria das teorias constitutivas com dano em aços e ligas procura-se extrapolar observações experimentais feitas a partir de ensaios uniaxiais simples para o contexto tridimensional. Existem procedimentos sistemáticos para a obtenção de equações constitutivas tridimensionais a partir de modelos uniaxiais baseados nessas observações experimentais. Portanto, neste contexto, se um modelo uniaxial for desenvolvido e analisado, é possível de forma mais ou menos automática obter informações que permitam o desenvolvimento de uma teoria mais geral.

O comportamento de um corpo deformável é regido por dois tipos de equações: as básicas que representam os princípios fundamentais ou as leis físicas universais que regem o comportamento de todos os corpos, e as equações constitutivas que descrevem comportamentos particulares de cada material. Com base nestas equações definem-se algumas equações de estado e leis de evolução que são utilizadas no trabalho para caracterizar o modelo estudado. As equações de estado expressam a relação entre as “forças termodinâmicas” associadas as variáveis internas estudadas. As variáveis internas são introduzidas para descrever alguns mecanismos físicos que refletem as modificações do estado interno do material. As leis de evolução representam a história do comportamento destas variáveis, e por conseguinte, do corpo e satisfazem a Segunda Lei da Termodinâmica. É apresentado neste trabalho um modelo de uma barra cilíndrica elastoviscoplastica solicitada axialmente e estudada a influência dos termos de acoplamento termomecânico, oriundos da equação na equação da energia, no seu comportamento mecânico.

Fizemos o uso do Método de Decomposição do Operador [8], com o qual podemos tratar um problema complexo altamente acoplado, decompondo-o em vários subproblemas, para os quais métodos numéricos disponíveis e testados podem ser aplicados [3]. O interesse em trabalhos deste tipo estudo está na área de análise do dano acumulado e previsão de vida residual de estruturas metálicas. Isto se deve a necessidade de se reduzir as paradas de manutenção, a necessidades de evitar paradas imprevistas, as considerações de segurança e principalmente a necessidade de se entender o tempo de operação de componentes mecânicos além da vida original de projeto.

## 2 – OBJETIVOS

Com este trabalho, pretendemos avaliar a degradação de materiais com comportamento Elasto-Viscoplastico através de um modelo que no qual primeiro não consideraremos os efeitos térmicos e depois faremos uma comparação dos resultados obtidos com os resultados obtidos se considerarmos os efeitos da temperatura.

Pretendemos mostrar também, os resultados obtidos em simulações numéricas obtidas do comportamento do material de uma barra metálica submetida a esforços variados, destacando os efeitos não lineares tais como plastificação, endurecimento e amolecimento.

Utilizando um método de solução para o problema unidimensional, baseado numa técnica de decomposição do operador, será analisada, através de simulações numéricas, a influência da degradação material na previsão da vida útil de uma barra metálica elasto-viscoplástica. Neste trabalho propõe-se identificar os diversos efeitos mecânicos devidos ao acoplamento entre a equação da energia, a deformação e o dano. Pretende-se aprofundar na análise do comportamento mecânico da barra, tendo como base a simulação de ensaios de fadiga de baixo ciclo. Estes resultados servirão de motivação da extensão da análise para os casos bi e tridimensionais.

### 3 – GEOMETRIA

A geometria do corpo utilizado neste trabalho consiste de um modelo unidimensional de uma barra cilíndrica solicitada axialmente. A barra possui comprimento  $L$  e área seccional  $A$  sendo definidos então seu domínio  $\Omega = (0,L)$  e o contorno  $\Gamma = \{0,L\}$ . A barra é engastada em uma das extremidades e submetida a diferentes solicitações na extremidade livre, tais solicitações podem ser em deslocamento prescrito ou força prescrita.

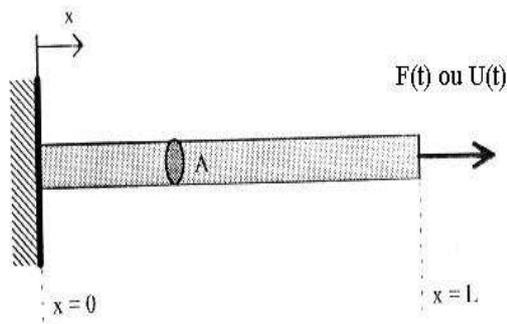


Figura 1 – Geometria do problema.

### 4 - MODELO UNIDIMENSIONAL

#### 4.1 – Relação cinemática e equação de equilíbrio

As equações que regem o modelo são descritas pela relação cinemática,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx} \quad (1)$$

onde  $\varepsilon$  corresponde a deformação total e  $u(x)$  corresponde ao deslocamento na posição  $x$ .

Partindo de um balanço de forças em um elemento infinitesimal, obtemos a seguinte equação de equilíbrio:

$$-\frac{\partial(\sigma A(x))}{\partial x} = f(x) \text{ em } \Omega = (0,L) \quad (2)$$

onde  $\sigma$  corresponde a tensão e  $f(x)$  corresponde a forças por unidade de comprimento ao longo da barra.

#### 4.2 - Modelo elasto-viscoplástico com dano e acoplamento térmico

Estruturas submetidas a condições adversas de solitação mecânica e/ou térmica, podem vir a ter sua resistência mecânica diminuída devido a processos de degradação do material como fluência e fadiga. Utilizando o enfoque da Termomecânica dos Processos Irreversíveis, é possível desenvolver modelos mais adequados, onde o processo de degradação do material é caracterizado através de uma variável interna chamada de dano que pode ser interpretada como uma medida local da degradação do material. Utilizando uma formulação termodinamicamente admissível, para a geometria considerada, as equações que definem o estado do corpo ficam da seguinte forma:

$$\sigma = (1 - D)E[(\varepsilon - \varepsilon^p) - \alpha(\theta - \theta_0)] \quad (3)$$

$$B^p = -Y = -(1 - D)(b[1 - e^{-dp}] + \sigma_p) \quad (4)$$

$$B^c = -\frac{2}{3}X = -(1 - D)(ac); X = X_1 + X_2; c = c_1 + c_2 \quad (5)$$

$$B^D = E \left[ \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p) - \alpha(\theta - \theta_0) \right] (\varepsilon - \varepsilon^p) + b \cdot (p + \frac{1}{d} e^{-d \cdot p}) + \sigma_p \cdot p + \frac{3}{4} [a_1 \cdot (c_1)^2 + a_2 \cdot (c_2)^2] \quad (6)$$

onde

$\varepsilon$  - deformação total ;

$\varepsilon^p$  - deformação plástica;

$\varepsilon^e$  - deformação elástica;

$\sigma$  - tensão;

$E$  - módulo de elasticidade;

$X$  - variável que corresponde ao endurecimento cinemático;

$c$  - variável interna associada a  $X$  ( $c = c_1 + c_2$ );

$a$  - constante que depende do material;

$Y$  - força termodinâmica que representa o endurecimento isotrópico. Esta ligado a estrutura cristalina da barra e tem como consequência o fenômeno do endurecimento propriamente dito. Neste caso o material chegará ao estado plástico de forma que independe de como o material é submetido ao esforços;

$b$  e  $d$  - constantes que dependem do material;

$p$  - deformação plástica acumulada. Considera os estados plásticos de tração e compressão.

$\sigma_p$  - tensão a partir da qual a barra plastifica;

$D$  - Dano. Variável interna que leva em conta a degradação do material

$B^D$  - função de energia associada ao dano.

$\theta$  - é a temperatura.

$\theta_0$  - é a temperatura inicial da barra.

$\alpha$  - coeficiente de dilatação linear.

Para completar o sistema de equações são adicionadas as leis de evolução para cada variável interna inserida:

$$\dot{\epsilon}^p = \left\langle \frac{f(\sigma, x, y)}{K} \right\rangle^N \text{sgn}(\sigma - X) \quad (7)$$

$$\dot{p} = |\dot{\epsilon}^p| \quad (8)$$

$$c_1 = \dot{\epsilon}^p - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\phi_1}{a_1}\right)X_1\dot{p} \quad (9)$$

$$c_2 = \dot{\epsilon}^p - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\phi_2}{a_2}\right)X_2\dot{p} \quad (10)$$

$$\dot{D} = \frac{B^D}{S_0} \dot{p} \quad (11)$$

onde,

$S_0$ - Constante associada ao Dano.

$f(\sigma, X, Y)$  - função que associa,  $\sigma$ ,  $X$  e  $Y$  e define o critério de plastificação pois só plastifica se  $f > 0$ , é dada por :

$$f(\sigma, X, Y) = |\sigma - X| - Y \quad (12)$$

**sgn**- função sinal que expressa se a barra está sendo comprimida ou esticada, é dada por :

$$\text{sgn}(\sigma - X) = \frac{(\sigma - X)}{|\sigma - X|} \quad (13)$$

$K$  e  $N$  – constantes que dependem do material;

$h$  – é o coeficiente de convecção.

$C_e$  – Calor específico.

$A$  – área.

$P$  – Perímetro da secção transversal da barra.

$\rho$  - É a densidade. ( considerada constante)

### 4.3 – Equação da energia

A equação da energia assume a seguinte forma:

$$\rho \cdot c_e \cdot \dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{h \cdot P}{A} \cdot (\theta - \theta_0) + d_1 + acpT + \rho r \quad (14)$$

$$d_1 = \sigma \dot{\epsilon}^p - Y \dot{p} - X \dot{c} + B^D \dot{D} \quad (15)$$

$$acpT = \theta \cdot \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \dot{p} + \frac{2}{3} \frac{\partial X}{\partial \theta} \dot{c} - \frac{\partial B^D}{\partial \theta} \dot{D} \right] \quad (16)$$

Nas simulações, não consideramos a condução e nem a geração de calor, logo os termos  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$  e  $\rho r$  são considerados nulos. Por simplificação, o termo convectivo  $-\frac{h \cdot P}{A} \cdot (\theta - \theta_0)$  também foi considerado nulo, mas este pode ser acrescentado sem grandes modificações.

#### 4.4 – Variação dos parâmetros constitutivos com a temperatura

Foi considerada uma variação linear dos parâmetros constitutivos com a temperatura. A tabela seguinte apresenta os valores dos parâmetros constitutivos, para um aço inoxidável 316L, compilados para as temperaturas 293K e 873K que foram usados na interpolado [1].

Tabela 1 : Variação dos parâmetros com a temperatura

	<b>293 K</b>	<b>873 K</b>
<b>E(Gpa)</b>	196	150
<b><math>\sigma_p</math> (Mpa)</b>	82	6
<b>K (Mpa.(s)<sup>-1/N</sup>)</b>	151	150
<b>N (-)</b>	24	12
<b>B (Mpa)</b>	60	80
<b>d (-)</b>	8	10
<b>a<sub>1</sub> (Gpa)</b>	108.3	17.5
<b><math>\phi_1</math> (-)</b>	2800	350
<b>a<sub>2</sub> (Gpa)</b>	4.5	1.0
<b><math>\phi_2</math> (-)</b>	25	15
<b><math>\alpha</math> (1x10<sup>-6</sup>/K)</b>	15.4	18.0
<b>Ce (J/KgK)</b>	454	584

#### 4.5 – Condições de contorno e iniciais

Para os exemplos que serão estudados neste trabalho podemos adotar as seguintes condições de contorno em tensão e deslocamento:

$$u(x=0,t) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \quad (17)$$

$$u(x=L,t) = u_L(t) \quad \text{ou} \quad \sigma(x=L,t) = \frac{F(t)}{A} \quad \forall t \in [0,T] \quad (18)$$

As condições iniciais de interesse que podem ser estudadas, são da forma:

$$\varepsilon^p(t=0) = p(t=0) = c(t=0) = D(t=0) = D_0 = 0 \quad (19)$$

$$\theta(t=0) = \theta_0 = 293^\circ K \quad (20)$$

#### 4.6 - Método da decomposição do operador

Apesar da generalidades e sofisticções das equações constitutivas consideradas neste trabalho, técnicas numéricas realmente simples podem ser utilizadas para se obter uma solução aproximada do problema descrito, conseguindo-se uma boa estabilidade e precisão nos resultados obtidos.

Para a aproximação da solução dos problemas de evolução quase-estática propõe-se uma técnica numérica simples baseada nos Métodos de Decomposição do Operador. A idéia básica do método consiste numa decomposição aditiva do problema original numa seqüência de outros mais simples do tipo preditor/elástico e corretor/termoplástico de

forma que possam ser aplicados métodos numéricos clássicos dos quais se conheça bem o comportamento de estabilidade e convergência. Este algoritmo implica, a cada passo, na solução de um problema elástico, resolvido pelo Método dos Elementos Finitos, seguido da aplicação de um algoritmo termoplástico consistindo na solução de equações diferenciais ordinárias cujo método de solução utilizado foi o Runge-Kutta. Abaixo, tem-se um fluxograma mostrando a técnica para solução do problema unidimensional:

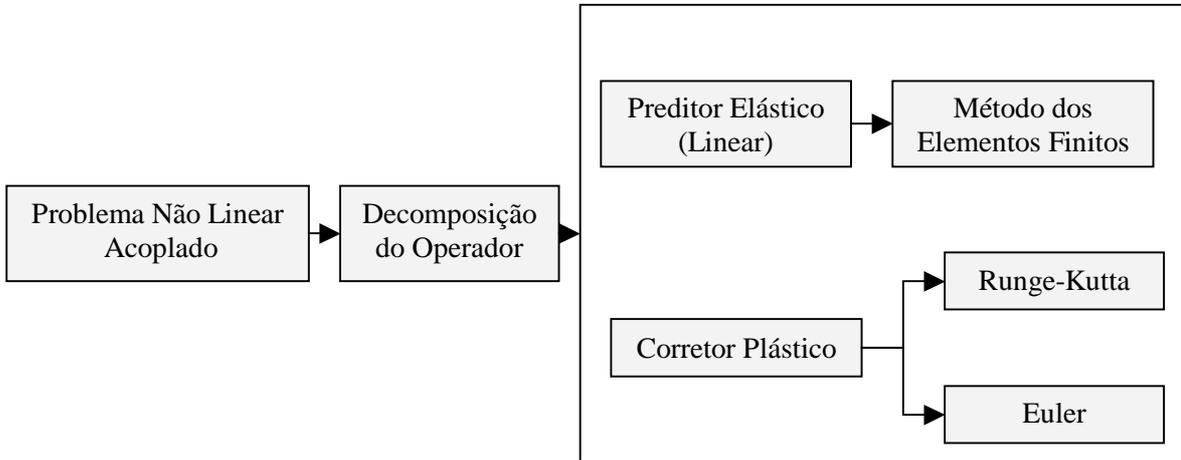


Figura 2 – Decomposição do Operador

O Problema Unidimensional Acoplado, em função das variáveis  $(\sigma, \varepsilon^p, p, c, D, \theta)$ , fica da forma:

$$-\frac{\partial(\sigma A)}{\partial x} + k(x)u(x) = f(x) \quad (21)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \sigma}{\partial (\varepsilon - \varepsilon^p)} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) + \frac{\partial \sigma}{\partial D} \dot{D} \quad (22)$$

$$\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p| \quad (23)$$

$$c_1 = \dot{\varepsilon}^p - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\varphi_1}{a_1}\right)X_1 \dot{p} \quad (24)$$

$$c_2 = \dot{\varepsilon}^p - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\varphi_2}{a_2}\right)X_2 \dot{p} \quad (25)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \left\langle \frac{f(\sigma, x, y)}{K} \right\rangle^N \text{sgn}(\sigma - X) \quad (26)$$

$$\dot{D} = \frac{B^D}{S_0} \dot{p} \quad (27)$$

$$\rho.c_e.\dot{\theta} = +d_1 + acpT \quad (28)$$

Aplicando o esquema de decomposição do operador para o problema unidimensional acima, obtemos uma decomposição aditiva da forma:

- Problema Elástico
- Problema de Termoplástico

No Problema Elástico as equações são dadas por:

$$-\frac{\partial(\sigma A)}{\partial x} + k(x)u(x) = f(x) \quad (29)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \sigma}{\partial (\varepsilon - \varepsilon^p)} \dot{\varepsilon} \quad (30)$$

$$\rho.c_e \dot{\theta} = \theta \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\varepsilon} \quad (31)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = 0; \dot{p} = 0; \dot{D} = 0; \dot{c}_1 = \dot{c}_2 = 0 \quad (32)$$

No Problema Termoplástico as equações são dadas por:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \sigma}{\partial (\varepsilon - \varepsilon^p)} \dot{\varepsilon}^p + \frac{\partial \sigma}{\partial D} \dot{D} \quad (33)$$

$$\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p| \quad (34)$$

$$c_1 = \dot{\varepsilon}^p - \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\phi_1}{a_1}\right) X_1 \dot{p} \quad (35)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \left\langle \frac{f(\sigma, x, y)}{K} \right\rangle^N \text{sgn}(\sigma - X) \quad (36)$$

$$c_2 = \dot{\varepsilon}^p - \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\phi_2}{a_2}\right) X_2 \dot{p} \quad (37)$$

$$\dot{D} = \frac{B^D}{S_0} \dot{p} \quad (38)$$

$$\rho.c_e \dot{\theta} = \sigma \dot{\varepsilon}^p - Y \dot{p} - X \dot{c} + B^D \dot{D} + \theta \left( -\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}^p + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \dot{p} + (2/3) \frac{\partial X}{\partial \theta} \dot{c} - \frac{\partial B^D}{\partial \theta} \dot{D} \right) \quad (39)$$

#### 4.7 – Solução do problema elástico pelo método dos elementos finitos

A forma forte do nosso problema é dada por:

$$-\frac{\partial \sigma A(x)}{\partial x} + k(x)u(x) = f(x) \text{ em } \Omega = (0, L) \quad (40)$$

no nosso problema consideramos a área constante, logo podemos escrever a equação da forma:

$$-\frac{A \partial \sigma}{\partial x} + k(x)u(x) = f(x) \text{ em } \Omega = (0, L) \quad (41)$$

Multiplicando a equação acima por uma função de teste e integrado por partes obtemos a forma fraca do nosso problema:

$$\int_0^L \left[ \sigma A \frac{\partial v}{\partial x} + Kuv \right] dx = \int_0^L f v dx + \sigma A v \Big|_0^L \quad (42)$$

Substituindo  $\sigma = (1-D)E[(\varepsilon - \varepsilon^p) - \alpha(\theta - \theta_0)]$  na equação acima e reorganizando os termos ficamos com a equação no domínio:

$$\int_0^L (1-D)EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \int_0^L kuv = \int_0^L f v + \int_0^L (1-D)EA \varepsilon^p \frac{\partial v}{\partial x} + \int_0^L (1-D)EA \alpha (\theta - \theta_0) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (43)$$

o termo do contorno é dado:

$$-(1-D)EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L \quad (44)$$

A noção básica introduzida pelo Método dos Elementos Finitos foi a construção de funções de forma baseadas em uma aproximação linear da geometria e do deslocamento. Para um elemento finito qualquer mostrado na figura, adotamos as seguintes funções de forma:

$$\psi_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad (45)$$

$$\psi_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (46)$$

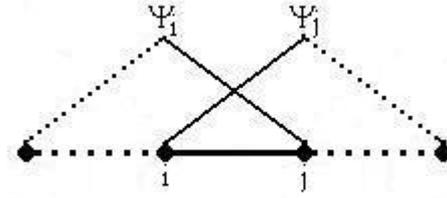


Figura 3 – Funções de Forma para um Elemento Finito qualquer

Aplicando as funções de forma acima definidas na forma fraca obtemos um sistema de equações algébrico da forma,

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{F}} \quad (47)$$

Onde as contribuições de um elemento são deifnidas pela matriz de rigidez do elemento:

$$\underline{\underline{K}}^e = (1-D) \frac{EA}{hi} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

e as contribuições devido a plastificação e a temperatura dada pelos vetores.

$$\underline{\underline{F}}^{ep} = (1-D)EA\epsilon^p \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$\underline{\underline{F}}^{e\theta} = +(1-D)EA\alpha(\theta - \theta_0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde hi é o comprimento do elemento.

#### 4.8 – Solução do problema termoplástico pelo runge – kutta

As equações diferenciais não lineares deste problema são resolvidos pelo método de Runge-Kutta. Este método segue o seguinte algoritmo:

- 1)  $n = 0$ ;
- 2)  $Y_n$  conhecido;
- 3)  $k_1 = f(Y_n, t_n)$ ;
- 4)  $k_2 = f(Y_n + k_1 \cdot (\Delta t/2), t_n + (\Delta t/2))$ ;
- 5)  $k_3 = f(Y_n + k_2 \cdot (\Delta t/2), t_n + (\Delta t/2))$ ;
- 6)  $k_4 = f(Y_n + k_3 \cdot \Delta t, t_n + \Delta t)$ ;
- 7)  $Y_{n+1} = Y_n + (1/6) \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \cdot \Delta t$

$$\text{No nosso caso, temos que } Y = \begin{Bmatrix} \sigma \\ p \\ \varepsilon^p \\ c_1 \\ c_2 \\ D \\ \theta \end{Bmatrix}, \text{ e } f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{p} \\ \dot{\varepsilon}^p \\ \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{D} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}.$$

#### 4.9 – Algoritmo global de solução

- 1)  $n=1$ ;  $\varepsilon_o^p$ ,  $\beta_o$ ,  $\theta_o$  e  $D_o$  são conhecidos em cada barra.
- 2) Estimativa elástica:  $\varepsilon_n^p = \varepsilon_{n-1}^p$ ,  $\beta_n = \beta_{n-1}$ ,  $\theta_n = \theta_{n-1}$  e  $D_n = D_{n-1}$ .
- 3) Cálculo da matriz rigidez  $K_n$ .
- 4) Cálculo de  $F^p(\varepsilon_n^p) = F_n^p$ .
- 5) Cálculo de  $F^\theta(\theta_n) = F_n^\theta$ .
- 6) Cálculo de  $U_n$ , solução do sistema pelo Método dos Elementos Finitos:  $(K_n)(U_n) = F_n + F_n^p + F_n^\theta$ . ( $K$  é uma matriz simétrica e positiva definida)
- 7) Cálculo das deformações ( $\varepsilon_n^p$ ) associadas aos deslocamentos nodais ( $U_n$ ).
- 8) Cálculo das forças termodinâmicas em cada barra ( $\sigma_n$ ), ( $B_n^\beta$ ) através das equações de estado.
- 9) Verificar para cada barra se  $F_n \leq 0$ .
  - 9.1) Sim  $\Rightarrow$  Processo elástico:  $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$ ,  $\beta_{n+1} = \beta_n$ ,  $\theta_{n+1} = \theta_n$  e  $D_{n+1} = D_n$ .
  - 9.2) Não  $\Rightarrow$  Problema de evolução: cálculo das taxas das variáveis internas  $\varepsilon_n^p$ ,  $\beta_n$ ,  $\theta_n$  e  $D_n$ . Cálculo de  $\varepsilon_{n+1}^p$ ,  $\beta_{n+1}$ ,  $\theta_{n+1}$  e  $D_{n+1}$  (método de Runge-Kutta).
- 10)  $D_{n+1} < D_{\text{crítico}}$  ?
  - 10.1) Sim  $\Rightarrow$  Continue
  - 10.2) Não  $\Rightarrow$  Fim
- 11)  $n = n + 1$
- 12) Critério de parada:  $n >$  número máximo de passos?
  - 12.1) Sim  $\Rightarrow$  Fim
  - 12.2) Não  $\Rightarrow$  Volte para (2)

Os algoritmos de solução foram implementados utilizando-se o software MATLAB.

Na decomposição do operador, decompomos o problema em um preditor elástico e um corretor termoplástico que pode ser visto a baixo:

Preditor Elástico:

Conhecido  $\overline{f_{n+1}}, \overline{\sigma_n}, \overline{\varepsilon_n^p}, \overline{p_n}, \overline{c_n}, \overline{\theta_n}$

Calcular  $\overline{u_{n+1}}, \overline{\varepsilon_{n+1}}, \overline{\sigma_{n+1}}, \overline{\varepsilon_{n+1}^p}, \overline{p_{n+1}}, \overline{C_{n+1}}, \overline{\theta_{n+1}}$  para cada elemento, tal que:

$$\overline{k.u_{n+1}} = \overline{f_{n+1}} + \overline{f_n^p(\varepsilon_n^p)} \quad (50)$$

$$\overline{\varepsilon_{n+1}} = \overline{B.u_{n+1}} \quad (51)$$

$$\overline{\sigma_{n+1}} = \overline{E.(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)} \quad (52)$$

$$\overline{C_{n+1}} = \overline{C_n} \quad (53)$$

$$\overline{p_{n+1}} = \overline{p_n} \quad (54)$$

$$\overline{X_{n+1}} = \overline{a.C_{n+1}} \quad (55)$$

$$\overline{Y_{n+1}} = \overline{b.(1 - e^{-d.p_{n+1}}) + \sigma_p} \quad (56)$$

$$\overline{\theta_{n+1}} = \overline{\theta_n} \quad (57)$$

Corretor Plástico:

Conhecidos  $\overline{u_{n+1}}, \overline{\varepsilon_{n+1}}, \overline{\sigma_{n+1}}, \overline{\varepsilon_{n+1}^p}, \overline{p_{n+1}}, \overline{C_{n+1}}, \overline{X_{n+1}}, \overline{Y_{n+1}}, \overline{\theta_{n+1}}$

Calcular  $\overline{u_{n+1}}, \overline{\varepsilon_{n+1}}, \overline{\sigma_{n+1}}, \overline{\varepsilon_{n+1}^p}, \overline{p_{n+1}}, \overline{C_{n+1}}, \overline{Y_{n+1}}, \overline{X_{n+1}}, \overline{\theta_{n+1}}$  para cada elemento, tal que:

$$\overline{u_{n+1}} = \overline{u_{n+1}} \quad (58)$$

$$\overline{\varepsilon_{n+1}} = \overline{\varepsilon_{n+1}} \quad (59)$$

$$\overline{\sigma_{n+1}} = \overline{\sigma_{n+1}} - \overline{E.\Delta\varepsilon^p} \quad (60)$$

$$\overline{\varepsilon_{n+1}^p} = \overline{\varepsilon_n^p} + \overline{\Delta p.sg(\overline{\sigma_{n+1}}, \overline{X_{n+1}})} \quad (61)$$

$$\overline{\theta_{n+1}} = \overline{\theta_n} + \overline{\Delta\theta} \quad (62)$$

$$\overline{C_{n+1}} = \overline{C_n} + \overline{\Delta\varepsilon^p} - \frac{\overline{\varphi}}{\overline{a}} \cdot \overline{X_{n+1}} \overline{\Delta p} \quad (63)$$

$$\overline{p_{n+1}} = \overline{p_n} + \overline{\Delta p} \quad (64)$$

$$\overline{X_{n+1}} = \overline{a.C_{n+1}} \quad (65)$$

$$\overline{Y_{n+1}} = \overline{b.(1 - e^{d.p_{n+1}}) + \sigma_p} \quad (66)$$

$$\overline{\Delta\varepsilon^p} = \overline{\Delta p.sg(\overline{\sigma_{n+1}}, \overline{X_{n+1}})} \quad (67)$$

$$\overline{\Delta p_n} = \left\langle \frac{\overline{f_n}}{\overline{k}} \right\rangle^n \overline{\Delta t} \quad (68)$$

obs.: O teste para verificar se está ocorrendo plastificação ou não (plastifica se  $f > 0$ , onde  $f$  é dada por  $f(\sigma, x, y) = |\sigma - x| - y$ ) deve ser feito para cada elemento da barra. O programa deve entrar no corretor plástico se o teste for verdadeiro para um determinado elemento, logo as leis de evolução do corretor plástico só devem ser aplicadas para aquele elemento específico.

## 5 – RESULTADOS

Para obtermos os resultados fizemos simulações com carregamento monótono e com carregamento cíclico. Estes resultados são mostrados e discutidos a seguir:

Carregamento Monótono: Nesta simulação, utilizamos o carregamento da forma  $P = 3 \times 10^5 t$ , durante o tempo de 5.5 segundos. Para este carregamento obtemos os seguintes resultados:

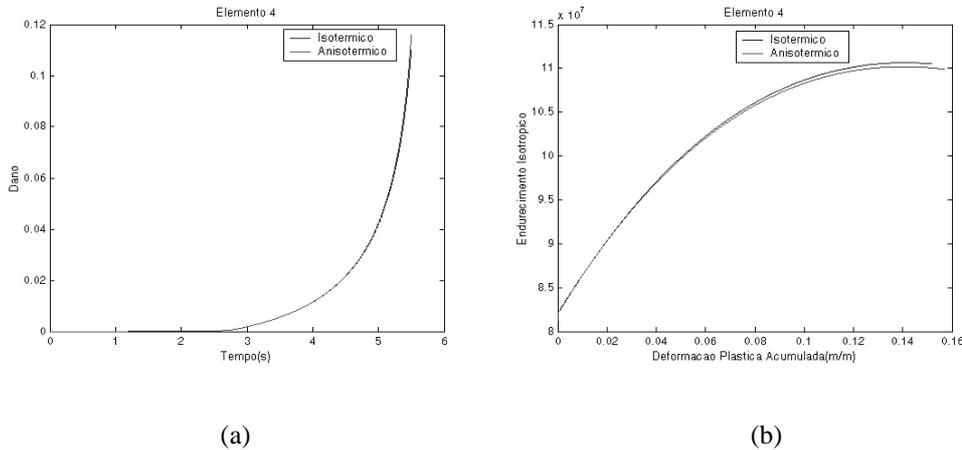


Figura 4 – (a) Dano x Tempo e (b) Endurecimento Isotrópico x Deformação Plástica Acumulada

No gráfico da figura 4(a) temos a evolução do dano, podemos observar que quando consideramos os efeitos da temperatura o material se degrada mais rápido. Na figura 4(b) observamos o efeito do amolecimento do material, sendo este efeito mais rápido no modelo anisotérmico.

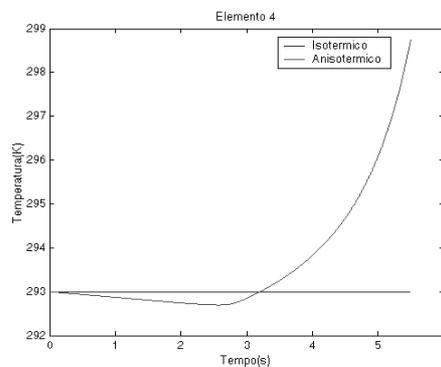


Figura 5 – Temperatura x Tempo

Este gráfico mostra a evolução da temperatura no modelo anisotérmico, vemos que na fase elástica ocorre um pequeno resfriamento e quando o material começa a plastificar a sua temperatura começa a aumentar.

Carregamento Cíclico: Nesta simulação, utilizamos o carregamento da forma  $P = 9.5 \times 10^5 \text{sen}(10\pi t)$ , durante o tempo de 6 segundos. Para este carregamento obtemos os seguintes resultados:

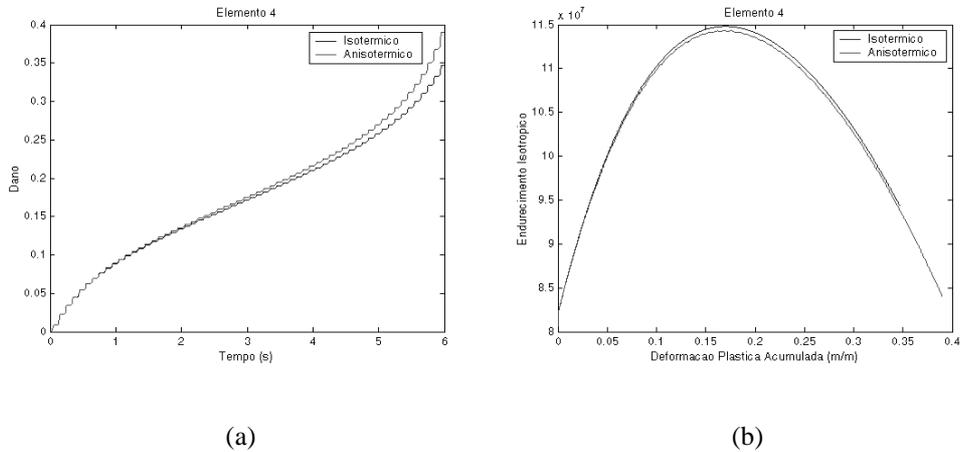


Figura 6– (a) Dano x Tempo e (b) Endurecimento Isotrópico x Deformação Plástica Acumulada

Observamos no gráfico da figura 6(a) que o dano tende a evoluir mais rápido no modelo anisotérmico, levando a uma degradação maior no material. Na figura 6(b), podemos observar o efeito do amolecimento do material, sendo este efeito mais rápido no modelo anisotérmico.

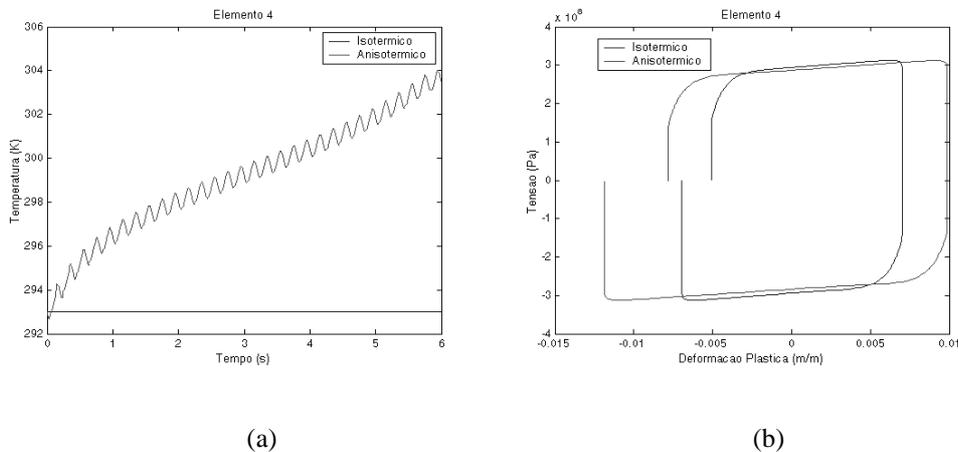


Figura 7 – (a) Temperatura x Tempo e (b) Tensão x Deformação Plástica

No gráfico 7(a) observamos a evolução da temperatura no modelo anisotérmico. As oscilações neste gráfico são devidas a parte elástica. No gráfico da figura 7(b) podemos ver o gráfico da tensão x deformação para o último ciclo de cada caso estudado. Podemos ver que no caso anisotérmico temos uma amplitude de tensão menor que a do caso isotérmico. Isto se deve ao processo de amolecimento associado ao aumento da temperatura do elemento.

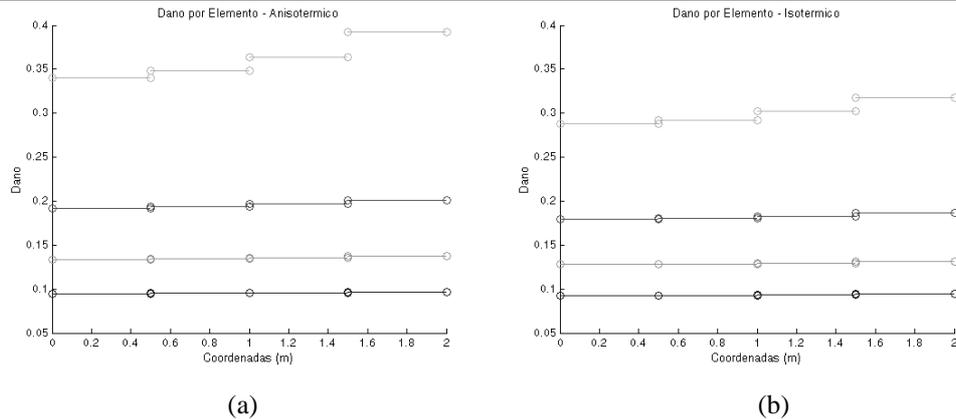


Figura 8 – Dano por Elemento – (a) Anisotérmico e (b) Isotérmico

Os gráficos acima mostram como está a distribuição espacial do dano, no caso anisotérmico e isotérmico, para diferentes intervalos de tempo. Isto se deve ao fato de que a deformação plástica está defasada do passo elástico para o plástico. Como consequência a equação de equilíbrio não é satisfeita ao final do passo plástico o que induz uma não uniformidade do dano. Para corrigir isto é proposto um algoritmo global iterativo.

## 6 - CONCLUSÕES

Este trabalho utilizou-se um modelo de variáveis internas para estudar o efeito do acoplamento termomecânico no comportamento de uma barra metálica, submetidas a cargas cíclicas e monótonas.

Uma formulação unidimensional foi considerada no problema onde para prever a integridade estrutural da barra, utilizou-se, na análise, um modelo de dano contínuo acoplado a uma lei de comportamento elastoviscoplasticidade do material em estudo, ambos descritos a partir de uma teoria constitutiva baseada na teoria de variáveis internas.

Apesar de se tratar de um problema de difícil solução, mostrou-se que soluções numéricas podem ser facilmente obtidas, a partir de métodos clássicos, se a técnica de decomposição do operador for aplicada.

Nas simulações, observou-se um aumento da temperatura provocado pelo processo de deformação plástica o que levou a diminuição da resistência mecânica do material.

## 7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CHABOCHE, Jean, LEMAITRE, Jean. Mechanics of Solids Materials. Cambridge University, 1990.
- [2] BARBOSA, J. M. A., Estudo da Localização da Deformação em Materiais Elasto-Viscoplásticos Levando em Conta Efeitos Térmicos e de Inércia, Doutorado em Eng. , Pontifica Unversidade Catolica do Rio de Janeiro,1998;
- [3] BARBOSA, J. M. A., PACHECO, P. M. C. L., COSTA MATTOS, H. S., Sobre el Papel de la Temperatura en las Vibraciones Mecánicas de Barras Elasto-Viscoplásticas, Revista Internacional de Informacion Tecnologica, vol 8 , n. 6, 1997.
- [4] CALFEN A finite element toolbox to Matlab vesrsion 3.3. Lund University. Division of Structural Mechanics and Division of Solid Mechanics.
- [5] ENGO, K., A. Marthinsen, H. Z. Munthe-Kaas. DiffMan User's Guide, Version 2.0. Departament of Informatics, University of Bergen, Norway.
- [6] HANSELMAN, Duane, Bruce Littlefield. MATLAB 5, Versão do Estudante, Guia do usuário.
- [7] MARCHAND, Patrick. Graphics and Guis with Matlab. Second Edition.
- [8] MARCHUCK, G. I., SHAIDUNOV, V. V., Difference Methods an their Extrapolations, Applications of Mathematics, vol. 19, Springer Veralg.
- [9] MATHWORKS, Building Guis with Matlab. Matlab the language of technical computing.
- [10] MATLAB, Ajuda do Matlab - CD do Matlab.
- [11] RUGGIERO, Márcia A. Gomes. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.
- [12] SAMPAIO, R., E. Cataldo e R. Riquelme. Introdução ao Matlab. Agência Espacial Brasileira.