

FACTOR TEÓRICO DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS EN PIEZAS CORTAS DE MATERIALES ANISOTRÓPICOS

Milagros Sánchez Alvarez*, Nando Troyani†

*Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Experimental Antonio José de Sucre, Puerto Ordaz,
Venezuela, milagros_sanchez@cantv.net.

†Centro de Métodos Numéricos en Ingeniería, Escuela de Ingeniería y Ciencias Aplicadas,
Universidad de Oriente, Venezuela, ntroyani@cantv.net.

Palabras claves: materiales anisotrópicos, piezas cortas, elementos finitos.

Resumen. *En este trabajo se demuestra la influencia que tiene la longitud de las piezas sobre los factores teóricos de concentración de esfuerzos, y se refuerza la influencia de otros parámetros geométricos ya conocidos. El estudio se presenta específicamente sobre placas rectangulares ortotrópicas con agujero centrado sometidas a cargas tensoriales unidireccionales, aplicando el método de los elementos finitos. Se demuestra que los factores de concentración de esfuerzo pueden alcanzar valores considerablemente grandes comparados con los obtenidos en placas infinitas. Al mismo tiempo se reporta la longitud de transición para dos orientaciones diferentes de las fibras del material de la placa estudiada.*

INTRODUCCIÓN

En el diseño de elementos de máquinas y de estructuras se hace indispensable conocer los Factores Teóricos de Concentración de Esfuerzos (FTCE) para diferentes discontinuidades geométricas, presentes en la mayoría de estos elementos; como son: entallas, agujeros, cambios de sección, etc.

Cuando se trata de materiales anisotrópicos, la determinación de estos FTCE no es tan directa, a diferencia de los materiales isotrópicos, de los cuales se dispone de suficiente información teórica y experimental.

Es bien sabido que en las últimas décadas los materiales anisotrópicos han cobrado verdadera importancia a nivel industrial, debido a las extraordinarias características mecánicas que exhiben: alta resistencia específica, altos módulos de elasticidad específicos, excelente comportamiento bajo cargas cíclicas, etc.

Lekhnitskii¹, fue uno de los primeros investigadores interesado en la determinación de los FTCE en placas infinitas anisotrópicas con agujero circular y elíptico sometidas a diferentes condiciones de borde. En trabajos más recientes^{2,3,4,5} se han presentado resultados de los FTCE en placas compuestas, con diferentes discontinuidades geométricas: uno o varios agujeros elípticos o circulares, ranuras, etc., utilizando diversos métodos matemáticos.

Sin embargo, es solo hasta ahora que se han reportado y publicado trabajos sobre la influencia de la longitud de las piezas sobre la magnitud de los citados FTCE en materiales isotrópicos^{6,7}. En estos, se establecieron los conceptos de pieza corta y de longitud de transición; el primero se refiere a las llamadas regiones de régimen de pieza corta y régimen de pieza larga; y el segundo a un parámetro de longitud adimensional, que representa el límite entre estas dos regiones.

En este trabajo se presenta un estudio similar al citado en el párrafo anterior, pero orientado a materiales anisotrópicos. Para ello se desarrolló un código de elementos finitos que permite estudiar la respuesta mecánica en piezas ortotrópicas⁸. Específicamente se trabajó con placas rectangulares ortotrópicas con agujero circular centrado y sometidas a cargas tensoriales unidireccionales. Se determinaron los FTCE para diferentes relaciones geométricas, longitud/ancho y diámetro/ancho de la placa, presentándose los resultados en curvas típicas de los FTCE en función de la relación adimensional diámetro/ancho. De igual manera, se determinó la longitud de transición de la placa. Este estudio se realizó para dos orientaciones diferentes de las fibras del material.

FORMULACIÓN

Problema de esfuerzo plano de la teoría de elasticidad en cuerpos ortotrópicos.

Para el análisis de estado de esfuerzo plano generalizado, se considera una placa delgada elástica homogénea ortotrópica de espesor uniforme, la cual está en equilibrio bajo la acción de fuerzas distribuidas en sus bordes y de las fuerzas volumétricas. Se asume lo siguiente:

1. En cada punto de la placa existe un plano de simetría elástico el cual es paralelo al plano medio de la placa.
2. Las fuerzas aplicadas a los bordes y las fuerzas del cuerpo actúan en planos paralelos al plano medio y están distribuidas simétricamente con respecto a éste plano.

3. Las deformaciones de la placa son pequeñas, lo cual significa que se utiliza la teoría linealizada de las relaciones desplazamiento–deformación.

En relación a la Fig. 1, el plano medio lo representa el plano x-y. El espesor de la placa se define por h; X_n, Y_n expresan las componentes de las fuerzas distribuidas en los bordes por unidad de área; X, Y representan las fuerzas del cuerpo por unidad de volumen; siendo $Z_n = Z = 0$ de acuerdo a las condiciones anteriormente establecidas.

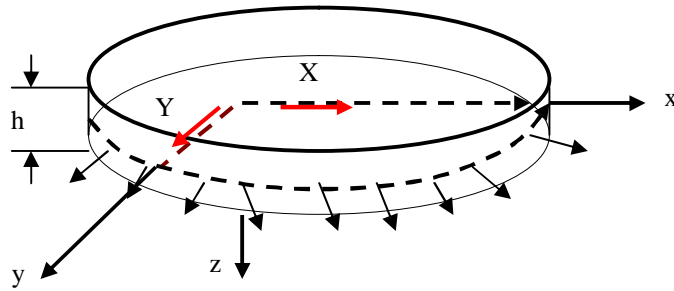


Fig. 1. Placa de espesor h sometida a cargas de tracción.

Las ecuaciones de equilibrio y de la ley de Hooke generalizada, aplicadas a problemas de esfuerzo plano en placas ortotrópicas, se reducen a las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E_1} s_x - \frac{u_{21}}{E_2} s_y = \frac{1}{E_1} s_x - \frac{u_{12}}{E_1} s_y \\ e_y &= -\frac{u_{12}}{E_1} s_x + \frac{1}{E_2} s_y = -\frac{u_{21}}{E_2} s_x + \frac{1}{E_2} s_y \\ g_{xy} &= \frac{1}{G_{12}} t_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Las relaciones desplazamiento-deformación están dadas por:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

Las correspondientes condiciones de borde actuando sobre los bordes de la placa se expresan de la siguiente manera:

$$s_x \cos(n, x) + t_{xy} \cos(n, y) = X_n \quad t_{xy} \cos(n, x) + s_y \cos(n, y) = Y_n \quad (4)$$

Las ecuaciones (1) y (4) pueden ser expresadas en función de los desplazamientos u y v , utilizando las ecuaciones (2) y (3):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E_1 E_2}{E_2 - u_{21}^2 E_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E_1 E_2 u_{21}}{E_2 - u_{21}^2 E_1} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[G_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + X = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[G_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{E_1 E_2 u_{21}}{E_2 - u_{21}^2 E_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E_2^2}{E_2 - u_{21}^2 E_1} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + Y = 0 \quad (6)$$

Las condiciones de borde se transforman en:

$$\left[\frac{E_1 E_2}{E_2 - u_{21}^2 E_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E_1 E_2 u_{21}}{E_2 - u_{21}^2 E_1} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \cos(n, x) + G_{12} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \cos(n, y) = X_n \quad (7)$$

$$G_{12} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \cos(n, x) + \left[\frac{E_1 E_2 u_{21}}{E_2 - u_{21}^2 E_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E_2^2}{E_2 - u_{21}^2 E_1} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \cos(n, y) = Y_n \quad (8)$$

El sistema de ecuaciones obtenidas, junto con las condiciones de borde, representan el problema de esfuerzo plano en placas ortotrópicas.

Formulación variacional del problema de esfuerzo plano.

La formulación variacional de estas ecuaciones diferenciales, se expone a continuación.

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left[c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right] - c_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = X \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega \quad (9a)$$

$$\left. \begin{aligned} -c_{33} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right] = Y \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right] n_x + c_{33} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] n_y = X_n \end{aligned} \right\} \text{ en } \partial\Omega_1 \quad (10a)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{33} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] n_x + \left[c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right] n_y = Y_n \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

Donde las constantes c_{11} , c_{12} , c_{22} y c_{33} vienen definidas por:

$$c_{11} = \frac{E_1 E_2}{E_2 - n_{21}^2 E_1} \quad c_{12} = \frac{E_1 E_2 n_{21}^2}{E_2 - n_{21}^2 E_1} \quad c_{22} = \frac{E_2}{E_2 - n_{21}^2 E_1} \quad c_{33} = G_{12} \quad (11)$$

y los términos: n_x , n_y representan los cosenos directores del vector unitario n , normal al borde $\partial\Omega_1$:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j} \quad (12)$$

Adicionalmente a las condiciones de borde sobre $\partial\Omega_1$, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} u(s) &= \hat{u}(s) \\ v(s) &= \hat{v}(s) \end{aligned} \right\} \text{ Sobre } \partial\Omega_2 \quad (13a)$$

$$(13b)$$

Estas ecuaciones: 9, 10, 11 y 13 definen el problema general bidimensional de valor en el borde en elasticidad lineal, describiendo el problema de esfuerzo plano en cuerpos ortotrópicos linealmente elásticos.

En problemas bidimensionales, Fig. 2, Ω representa el interior del dominio y $\partial\Omega$ el borde, el cual puede ser definido por las ecuaciones paramétricas: $x = x(s)$, $y = y(s)$, donde s es la longitud de arco a lo largo de $\partial\Omega$ medido desde algún punto de referencia arbitrario. De igual forma, el borde $\partial\Omega$ del dominio está dividido en dos partes: $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$, sobre los cuales las condiciones de borde son impuestas. Las condiciones de borde naturales se definen sobre $\partial\Omega_1$, mientras que las condiciones de borde esenciales se imponen sobre $\partial\Omega_2$. Sobre $\partial\Omega_1$ aparece el vector \mathbf{n} , normal a un punto cualquiera perteneciente a éste borde.

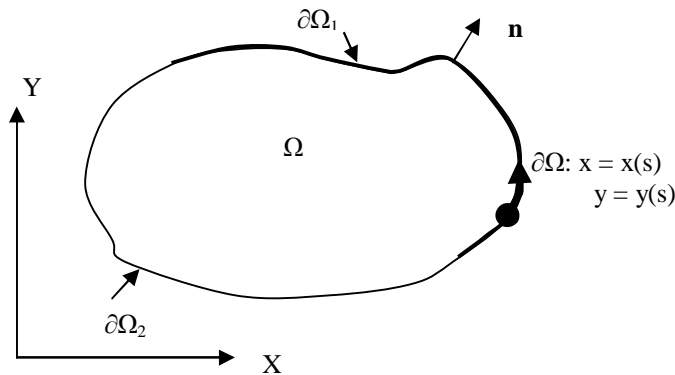


Fig. 2 Dominio de un problema bidimensional de valor en el borde.

Al multiplicar las ecuaciones (9a) y (9b) por funciones de prueba w_1 y w_2 , integrando y aplicando el teorema de Green, y después de varias operaciones de integración se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial w_1}{\partial x} \left[c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial w_1}{\partial y} \left[c_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dy - \int_{\partial\Omega_1} w_1 X_n ds - \int_{\Omega} X w_1 dy dx = 0 \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial w_2}{\partial x} \left[c_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial w_2}{\partial y} \left[c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right\} dx dy - \int_{\partial\Omega_1} w_2 Y_n ds - \int_{\Omega} Y w_2 dx dy = 0 \quad (15)$$

La declaración variacional del problema general de esfuerzo plano en materiales ortotrópicos comprende: encontrar funciones $u, v \in H^1(\Omega)$ tal que $u = \hat{u}(s)$, $v = \hat{v}$ sobre $\partial\Omega_2$; y 14 y 15 se cumplan para toda $w_1, w_2 \in H^1(\Omega)$ tal que $w_1 = G_1$ y $w_2 = G_2$ sobre $\partial\Omega_2$.

Modelación por elementos finitos

Al reemplazar el dominio Ω por un dominio Ω_h , el cual consiste de una colección de elementos finitos E y puntos nodales N , y suponiendo las siguientes aproximaciones:

$$u_h^e(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j^e f_j^e(x, y) \quad v_h^e(x, y) = \sum_{j=1}^N v_j^e f_j^e(x, y) \quad (16)$$

Donde u_h y v_h pertenecen al subespacio H^h de $H^1(\Omega_h)$, u_j, v_j son tales que: $u_j = \hat{u}_j$, $v_j = \hat{v}_j$ en los nodos sobre $\delta\Omega_{2h}$ y las ecuaciones (14) y (15) se cumplan para toda w_{1h} y $w_{2h} \in H^h$ tal que $w_{1h} = G_1$ y $w_{2h} = G_2$ sobre $\partial\Omega_{2h}$.

Al reemplazar (16) en las ecuaciones (14) y (15), estas se convierten en:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int_{\Omega^e} \left\{ u_i^e \left[c_{11} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \frac{\partial f_j^e}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial f_i^e}{\partial y} \frac{\partial f_j^e}{\partial y} \right] + v_i^e \left[c_{12} \frac{\partial f_i^e}{\partial y} \frac{\partial f_j^e}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \frac{\partial f_j^e}{\partial y} \right] \right\} dx dy - \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\delta\Omega_{1h}^e} f_j^e X_n ds - \int_{\Omega_h^e} f_j^e X dx dy \right] = 0$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int_{\Omega^e} \left\{ u_i^e \left[c_{12} \frac{\partial f_i^e}{\partial y} \frac{\partial f_j^e}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \frac{\partial f_j^e}{\partial y} \right] + v_i^e \left[c_{33} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \frac{\partial f_j^e}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial f_i^e}{\partial y} \frac{\partial f_j^e}{\partial y} \right] \right\} dx dy - \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\delta\Omega_{1h}^e} f_j^e Y_n ds - \int_{\Omega_h^e} f_j^e Y dx dy \right] = 0$$

En función de la matriz de rigidez, K , y el vector de carga, F , las ecuaciones (17) y (18) se pueden expresar por:

$$[K_{ij}^{11}] \{u_i^e\} + [K_{ij}^{12}] \{v_i^e\} = \{F_i^1\} \quad (19)$$

$$[K_{ij}^{21}] \{u_i^e\} + [K_{ij}^{22}] \{v_i^e\} = \{F_i^2\} \quad (20)$$

Donde:

$$K_{ij}^{11} = \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left[c_{11} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \frac{\partial f_j^e}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial f_i^e}{\partial y} \frac{\partial f_j^e}{\partial y} \right] dx dy \quad (21)$$

$$K_{ij}^{12} = \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left[c_{12} \frac{\partial f_i^e}{\partial y} \frac{\partial f_j^e}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \frac{\partial f_j^e}{\partial y} \right] dx dy \quad (22)$$

$$F_i^1 = \oint_{d\Omega_{ih}^e} f_j^e X_n ds + \int_{\Omega_h^e} f_j^e X dx dy \quad (23)$$

$$K_{ij}^{22} = \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left[c_{33} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \frac{\partial f_j^e}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial f_i^e}{\partial y} \frac{\partial f_j^e}{\partial y} \right] dx dy \quad (24)$$

$$F_i^2 = \int_{\Omega_h^e} f_j^e Y dx dy + \oint_{d\Omega_{ih}^e} f_j^e Y_n ds \quad (25)$$

Las ecuaciones (19) y (20) representan el modelo por elementos finitos de las ecuaciones de elasticidad de esfuerzo plano, (9a) y (9b).

RESULTADOS NUMÉRICOS.

Los resultados numéricos fueron obtenidos empleando un código de elementos finitos desarrollado para determinar la respuesta mecánica en piezas ortotrópicas⁸. Los resultados se presentan sobre una placa rectangular de madera laminada (también conocida como plywood), de dimensiones $2L \times 2w$, con agujero circular centrado, de radio a , sometida a la acción de fuerzas tensoriales unidireccionales, S , tal como lo indica la Fig. 3. El espesor de la placa, t , se considera constante y unitario. Para los cálculos se trabajó con un cuarto de placa debido a la simetría del problema.

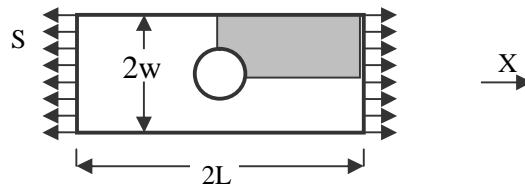


Fig. 3. Placa rectangular con agujero circular sometida a tracción

Las propiedades mecánicas de la madera laminada o *plywood* son: $E_x = 1.2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $E_y = 0.6 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\nu_{xy} = 0.071$ y $G = 0.07 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Los FTCE, K_i , se calcularon en función del esfuerzo nominal grueso, es decir, el esfuerzo que ocurre en la sección transversal mayor, a partir de la fórmula siguiente:

$$K_i = \frac{S_{\max}}{S_g} \quad (26)$$

Donde σ_{\max} corresponde el esfuerzo principal en el borde del agujero y σ_g representa el esfuerzo nominal grueso en la placa, en la dirección X .

Los resultados del estudio realizado, se muestran en la Fig. 4, donde se observa la influencia de los parámetros L/w y, del ya conocido, a/w , sobre los FTCE.

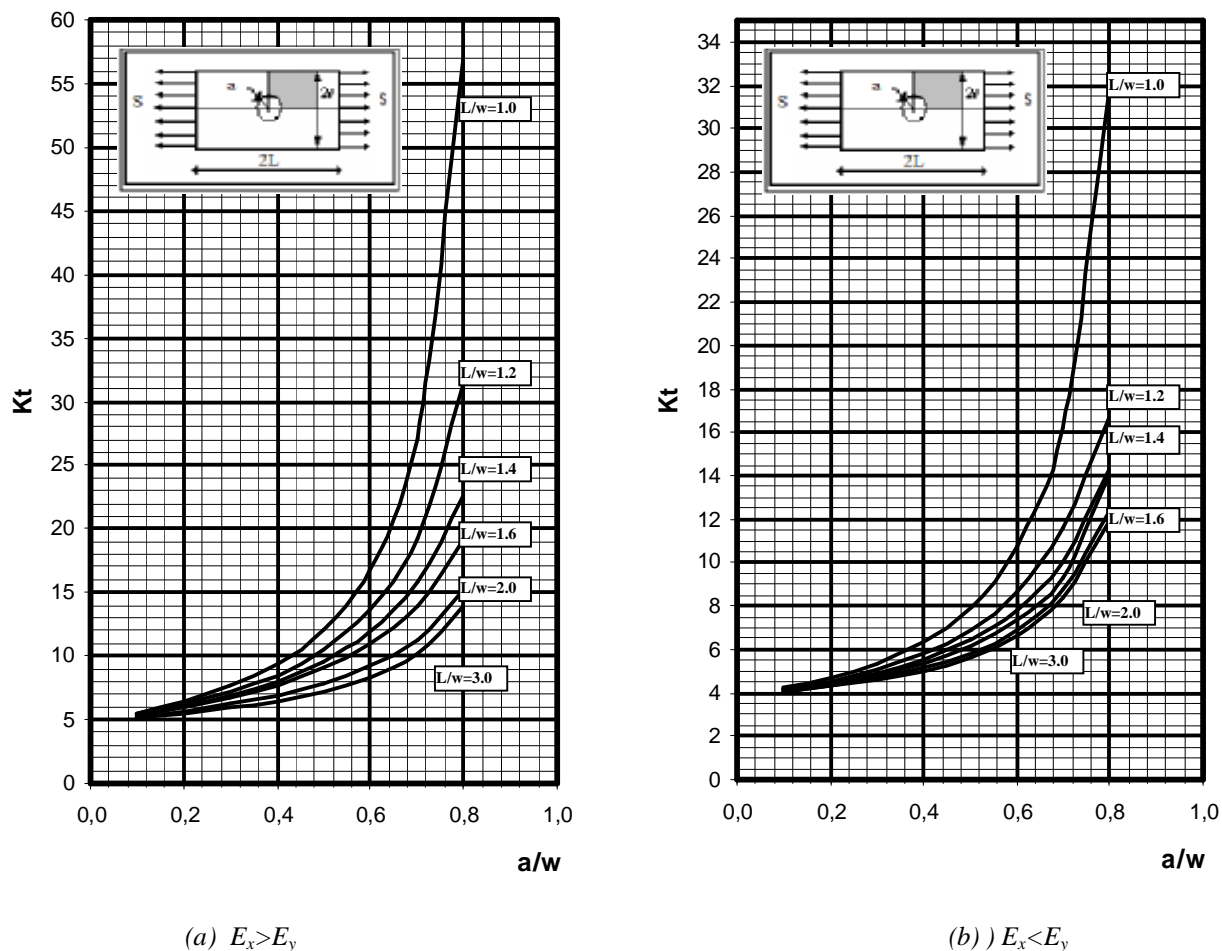


Fig. 4. FTCE para diferentes relaciones L/w y a/w

En ambas gráficas, se observa que los FTCE se incrementan significativamente a medida que la relación L/w disminuye, es decir, a medida que la pieza se hace más corta, obteniéndose los valores más altos de los FTCE para la relación $L/w = 1.0$. Puede observarse, además, que los máximos valores de los FTCE se obtienen cuando el módulo de elasticidad mayor coincide con la dirección de aplicación de la carga, es decir, para $E_x > E_y$.

Por otro lado, al observar la convergencia de los FTCE en la Fig. 4a y 4b, estos conducen al valor de 5.45 y 4.15, respectivamente, a medida que la relación a/w tiende a cero e independientemente de la relación L/w . Estos resultados fueron obtenidos por Lekhnitskii¹, para placas plywood infinitas.

La Fig. 5, muestra la longitud relativa de transición en función del parámetro a/w , presentándose para dos orientaciones de las fibras del material: en la primera, el módulo de elasticidad mayor coincide con la dirección de aplicación de la carga, Fig. 5a, en la segunda, el módulo de elasticidad menor coincide con la dirección de aplicación de la carga, Fig. 5b.

En ambas gráficas de la Fig. 5, se observa que la longitud relativa de transición tiende a un valor constante para el rango de valores de a/w comprendido entre 0.4 y 0.8.

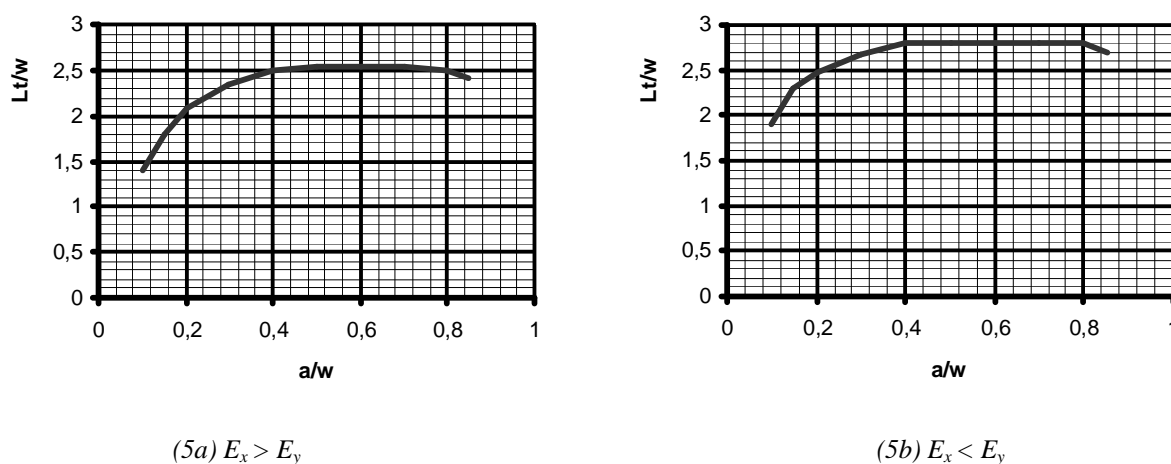


Fig. 5. Longitud de transición, L_t

CONCLUSIONES

1. Al igual que para el caso elástico-isotrópico, se pudo determinar que los FTCE para piezas de materiales ortotrópicos se ven influenciados significativamente por la relación geométrica L/w , al igual que influenciados por parámetros y aspectos ya conocidos, como por ejemplo: orientación de las fibras y tamaño relativo del agujero.
2. Se ha establecido que el nuevo concepto de longitud de transición presenta valores distintos que dependen de la orientación de la fibra de la lámina.
3. Al observar la convergencia de los FTCE en la Fig. 4, estos conducen al valor de 5.45 y 4.15, respectivamente, a medida que la relación a/w tiende a cero e independientemente de la relación L/w . Estos resultados fueron obtenidos por Lekhnitskii¹, para placas plywood infinitas.

REFERENCIAS

- [1] Lekhnitskii, S. G., Anisotropic plates. Gordon and Breach Science Publishers. New York. 1968.
- [2] Lin, C-C., C-C Ko. Stress and strength analysis of finite composite laminates with elliptical holes. *Journal of Composite Materials*. Vol. 22. 1988.
- [3] Gerhardt, T. D. A hybrid/finite element approach for stress analysis of notched anisotropic materials. *Journal of Applied Mechanical*. Vol. 51. 1984.
- [4] Xi, X-W y W-X. Fan. Stresses in orthotropic laminate with two elastic pins having different fitting tolerances. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 117. N° 6. 1991.
- [5] Yeh, H.-Y, M. D. Le. Mutual influence about stress concentration of holes in composite plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 12 - 1993.

- [6] Troyani, N., Gomes, C., Sterlacci, G. Theoretical stress concentration factor for short rectangular plates with centered circular holes. *Journal of Mechanical Design*, ASME, 2002.
- [7] Troyani, N., Sterlacci, G., Gomes, C., Simultaneous considerations of length and boundary conditions on theoretical stress concentration factors. *International Journal of Fatigue*, Vol. 25, pp 353-355, 2003.
- [8] Sánchez, M., Desarrollo de un código de elementos finitos para la determinación de la respuesta mecánica en placas ortotrópicas. Tesis de Maestría, 2003.