

ANÁLISIS DE LOS EFECTOS DE INERCIA SOBRE EL DESPLAZAMIENTO DE UNA BURBUJA LARGA EN UN CAPILAR, EN PRESENCIA DE UN SURFACTANTE SOLUBLE

Diego M. Campana*[†] y Fernando A. Saita*

*INTEC-CONICET, Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, CP 3100, Santa Fe, Argentina
e-mail: dcampana@ceride.gov.ar

[†]Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos
Grupo de Biomecánica del Continuo
Ruta Provincial 11, Km. 10, CP 3101, Oro Verde, Entre Ríos, Argentina

Palabras clave: Problema de Bretherton, surfactante soluble, efectos de inercia.

Resumen. *En este trabajo se presentan resultados preliminares que permiten analizar el efecto de las fuerzas de inercia sobre el “problema de Bretherton” (el desplazamiento de una burbuja larga en el interior de un tubo capilar), considerando la presencia de un surfactante soluble en la fase. Para esto se modelan el transporte de masa en la fase e interfase, el proceso de adsorción/desorción de soluto y el acoplamiento entre la transferencia de masa y la fluidonámica del problema, producida por el surfactante. El modelo de ecuaciones fuertemente no-lineal y acoplado en sus variables se resolvió en forma directa utilizando el método de elementos finitos, el método de spines para encontrar la superficie libre y algunas técnicas adicionales que permiten una mejor representación numérica del problema. Luego de la validación con resultados publicados para régimen de Stokes ($Re = 0$) se obtuvieron resultados novedosos que muestran el efecto de las fuerzas de inercia sobre el espesor de la película que la burbuja deja a su paso (h_∞), cuando además actúan fuerzas tensioactivas. El análisis muestra que el surfactante actúa como un atenuante de las variaciones que produce la inercia sobre el espesor de film.*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

El desplazamiento de un fluido en un tubo capilar por una burbuja larga (semi-infinita), es un proceso íntimamente ligado a muchos fenómenos de interés práctico en diversas áreas como: flujos en medios porosos, flujos bifásicos, biomecánica de flujos biológicos, etc. En este tipo de problemas de pequeña escala o dimensión, las fuerzas capilares (tensión superficial) son tan importantes como los efectos viscosos y de inercia. Además, se suelen encontrar sustancias tensioactivas (surfactantes) disueltas en el fluido que se desplaza, las cuales se adsorben en la interfase gracias a la afinidad que estas moléculas tienen por ella. La habilidad de éstos compuestos para modificar la tensión superficial en función de su concentración local, determina la aparición de tensiones tangenciales en la superficie libre que acoplan el problema fluidodinámico con el de transferencia de masa. Debido a esto, los modelos carecen de solución analítica y su solución requiere de alguna técnica numérica. El análisis del problema bajo la suposición de un flujo en régimen de Stokes es, en general, una muy buena aproximación. No obstante, se puede mostrar que bajo ciertas condiciones experimentales, el número de Reynolds (Re) muestra valores no nulos. Hasta el presente, no se han reportado resultados para dichas condiciones. cuando hay surfactantes.

Entre los trabajos mas relevantes que analizaron el efecto de las fuerzas de inercia sobre el desplazamiento en estado estacionario de una burbuja larga (semi-infinita), se pueden mencionar principalmente dos, debido a la similitud en la formulación y técnica de solución utilizadas en este trabajo.

Giavedoni y Saita¹ fueron los primeros que presentaron resultados numéricos mostrando el efecto del número de Re en los casos plano y axisimétrico de este problema. Los resultados obtenidos para valores constantes del número Ca entre 0,005 y 1 mostraron un comportamiento no monótonico del espesor de film h_∞ en función del Re . Este fenómeno se debe a una compleja interacción entre fuerzas de inercia, capilares y viscosas. El rango del Re estudiado fue $0 \leq Re \leq 70$ y se encontró que tiene un efecto apreciable sobre h_∞ para $Ca \geq 0,01$, siendo muy pequeña su influencia para valores menores de este parámetro.

Mas recientemente, Heil² extendió el análisis paramétrico en Re ($0 \leq Re \leq 300$) para el caso plano investigado en el trabajo anterior. Por otro lado, limitó el análisis para el rango $0,01 \leq Ca \leq 5$, donde los efectos de inercia son mas apreciables. Este autor también analizó la formación de un vórtice o recirculación en el frente del menisco, el cual crece en magnitud con el aumento del Re ; su efecto se ve reflejado principalmente en la presión sobre dicha región, la cual disminuye como consecuencia del efecto “centrífugo” del vórtice. Finalmente, Heil concluyó que los efectos de inercia tienen mayor importancia en condiciones de alto Re y bajo Ca ($Re/Ca \cong 5000$), basado en su análisis de la caída de presión y formación del vórtice frente al menisco.

Con respecto al estudio del problema en presencia de surfactantes, sin duda el trabajo mas relevante lo constituye el de Ghadiali y Gaver,³ en el cual se analizó en forma bastante

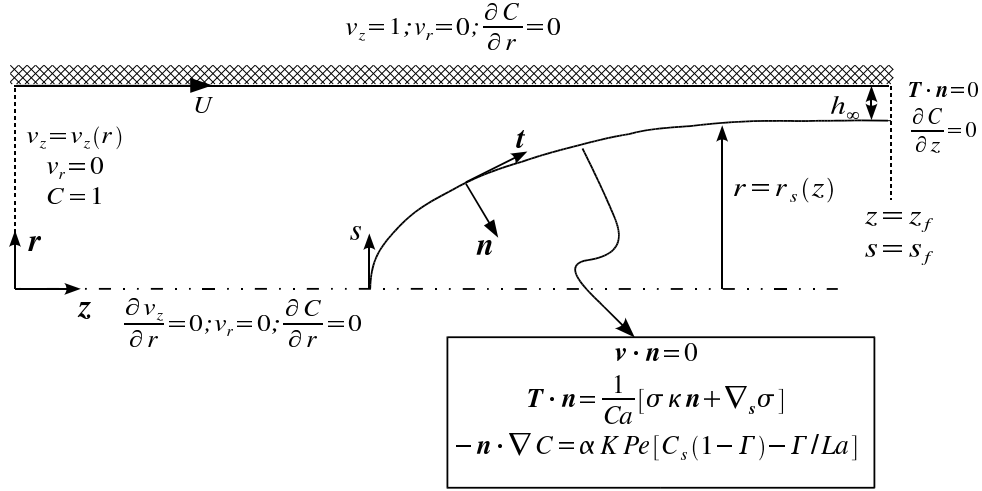


Figura 1: Modelo geométrico y condiciones de contorno.

completa la influencia de los diferentes parámetros relacionados con la transferencia de masa y efectos elásticos del surfactante sobre el espesor del film y la caída de presión. Sin embargo, la técnica numérica utilizada por estos autores limitó el rango de estudio en el número Ca ($0,015 \leq Ca \leq 1$) y además solo trabajaron bajo régimen de Stokes ($Re=0$).

Así, el primer objetivo de este trabajo consiste en extender y analizar con mayor detalle los resultados de Giavedoni y Saita¹ para el caso axisimétrico, considerando además las observaciones y resultados obtenidos por Heil,² con respecto a la influencia del Re en el problema. Como segundo objetivo, se introducirá el efecto de un surfactante en el sistema teniendo en cuenta los resultados obtenidos por Ghadiali y Gaver³ y sobre estos se procederá a analizar el efecto del Re . La primera sección trata sobre la formulación del modelo y la segunda sobre la técnica numérica utilizada. En la tercera se presentan los resultados agrupados en dos categorías: efectos de inercia en ausencia de surfactantes y considerando su acción. Finalmente, en la cuarta sección, se encuentran las conclusiones de este trabajo.

FORMULACIÓN DEL MODELO

En la Figura 1 se muestra una representación axisimétrica del frente de una burbuja larga, cuyo menisco se desplaza con velocidad constante U (en estado estacionario) en un capilar cilíndrico; allí se ha considerado, además, que el eje de coordenadas se desplaza con esta velocidad constante. De acuerdo con las definiciones mostradas en la Figura 1, se obtienen $r = r^*/R$, $z = z^*/R$, $s = s^*/R$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*/U$, $C = C^*/C_0$, $\Gamma = \Gamma^*/\Gamma_\infty$, $\sigma = \sigma^*/\sigma_{eq}$ y $p = p^*\sigma_{eq}/R$ como representaciones adimensionales de las coordenadas

radial, axial, longitud de arco, velocidad, concentración en la fase, concentración en la interfase, tensión superficial y presión, respectivamente. En las definiciones anteriores, C_0 representa la concentración de surfactante uniforme en la fase muy lejos del menisco, Γ_∞ indica la concentración de saturación de surfactante en la interfase, mientras que σ_{eq} es la tensión superficial de equilibrio según se definirá mas adelante.

De esta forma, el problema fluidodinámico en estado estacionario está gobernado por la ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Re\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{T} &= -p/Ca\mathbf{I} + (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \end{aligned} \quad (2)$$

En la ec. 2, se ha despreciado el efecto de la gravedad como consecuencia de la pequeña dimensión del problema y aparecen dos parámetros adimensionales: el número de Reynolds $Re = \rho UR/\mu$ y el número capilar $Ca = \mu U/\sigma_{eq}$. Para resolver las ecs. 1 y 2 se utilizan como condiciones de contorno un perfil parabólico a la entrada,

$$v_z = -2(1 - h_\infty)^2(1 - r^2) + 1; \quad v_r = 0 \longrightarrow z = 0, \quad 0 < r < 1 \quad (3)$$

mientras que en la interfase se establece el vector tracción ($\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$), cuya componente normal está en equilibrio con la tensión superficial y la curvatura media (κ) y la componente tangencial se equilibra con la tensión de Marangoni; además se aplica una condición cinemática $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ (ver Figura 1). A las condiciones anteriores se agregan la simetría en el centro del capilar, tracción nula en la salida y no deslizamiento sobre la pared. Con respecto al problema de transferencia de masa en la fase, la forma adimensional de la ecuación de conservación asumiendo una ley de Fick para la difusión queda,

$$Pe(\mathbf{v} \cdot \nabla C) = \nabla^2 C \quad (4)$$

donde $Pe = UR/D$ representa el número de Péclet y D es la difusividad del soluto en la fase. De manera similar, la ecuación para el transporte de masa sobre la interfase toma la siguiente forma,

$$Pe_s \nabla_s \cdot (\mathbf{v}_s \Gamma) = \nabla_s^2 \Gamma + j_n \quad (5)$$

donde ∇_s es el operador gradiente en la superficie, \mathbf{v}_s representa la componente de velocidad en la dirección del vector tangente \mathbf{t} , $Pe_s = UR/D_s$ es el número de Péclet superficial (D_s siendo la difusividad superficial del soluto) y j_n es el flujo de masa desde la fase a la interfase. Este último proceso de transporte se modela mediante una cinética de adsorción de Langmuir,

$$j_n = \alpha Pe_s [C_s(1 - \Gamma) - \Gamma/La] \quad (6)$$

donde aparecen dos nuevos parámetros adimensionales: $\alpha = Rk_a C_0/U$ es un índice de adsorción conocido como número de Hatta, mientras que el número de Langmuir $La =$

$C_0 k_a / k_d$ es un índice de la relación adsorción/desorción del surfactante. En las expresiones anteriores, k_a y k_d representan las constantes de adsorción y desorción del surfactante, respectivamente. Mediante C_s se indica la concentración en la fase, vecina a la interfase (sub-superficie). La ec. 5 se resuelve con condiciones de contorno de difusión nula en los extremos de la interfase; en $s = 0$ por simetría y en $s = s_f$ debido a que se alcanza el equilibrio en la transferencia con la fase. Por otro lado, para la ec. 4 se impone la siguiente condición de contorno sobre la interfase,

$$-\mathbf{n} \cdot \nabla C = -\frac{\partial C}{\partial n} = \alpha Pe K [C_s(1 - \Gamma) - \Gamma/La] \longrightarrow r = r_s(z) \quad (7)$$

que establece la igualdad entre el flujo difusivo de la fase a la sub-superficie y de esta a la interfase por adsorción (ec. 6). El parámetro $K = \Gamma_\infty / (RC_0)$ representa una longitud adimensional (o “profundidad”) de adsorción. El resto de las condiciones de contorno son las usuales: impermeabilidad de la pared, simetría en el centro del capilar, concentración uniforme de referencia en la entrada y equilibrio en la zona de la película (ver Figura 1).

Por último, para establecer un sistema de ecuaciones consistente, se debe especificar una relación entre la concentración local de surfactante y la tensión superficial: esto se conoce como *ecuación de estado*. Esta expresión se obtiene a partir de una ecuación de equilibrio (ec. 6 con $j_n = 0$) que, combinada con la relación termodinámica de Gibbs e integrándola entre dos estados, permite encontrar las ecuaciones buscadas:

$$\Gamma = \frac{LaC_s}{1 + LaC_s} \quad (8)$$

$$\sigma = 1 + \beta \ln \left(\frac{1 - \Gamma}{1 - \tilde{\Gamma}_{eq}} \right) \quad (9)$$

En la ec. 9, se ha definido el parámetro $\beta = RT\Gamma_\infty / \sigma_{eq}$ que representa el número de elasticidad y $\tilde{\Gamma}_{eq} = \Gamma_{eq} / \Gamma_\infty$ es la concentración interfacial adimensional de equilibrio, donde Γ_{eq} está en equilibrio con la concentración de la fase lejos del menisco C_0 . De esta forma, la ec. 8 establece que

$$\tilde{\Gamma}_{eq} = \frac{La}{1 + La} \quad (10)$$

mostrando así que la concentración de equilibrio depende de las condiciones de adsorción/desorción.

En la formulación físico-matemática descripta anteriormente, el espesor del film h_∞ es una incógnita que se debe determinar como parte de la solución del problema. Para ello, se introduce una nueva ecuación que establece la simetría de la interfase en el menisco ($\mathbf{t} = \mathbf{e}_r \longrightarrow s = 0$) y al resolverla en forma simultánea con el sistema anterior, permite encontrar el espesor de film buscado (Giavedoni y Saita¹).

TÉCNICA NUMÉRICA

El conjunto de ecuaciones presentados en la sección anterior, constituyen un sistema acoplado y fuertemente no-lineal que carece de solución analítica. El mismo se discretiza en el espacio utilizando el método de elementos finitos (formulación mixta de Galerkin) y la interfase se parametriza mediante la técnica de los spines;⁴ esta permite representar a la interfase mediante un conjunto de alturas h_i que se pueden incluir como incógnitas en el sistema de ecuaciones. Este sistema algebraico no-lineal así definido se resuelve utilizando el método de Newton-Rapson, el cual itera en forma simultánea sobre todas las variables del problema: $(\mathbf{v}; p; h_i; C; \Gamma; h_\infty)$ La técnica numérica fue bien descrita por Giavedoni y Saita,¹ pero ciertos aspectos inherentes al transporte de soluto, requieren de un tratamiento especial. El trabajo de Severino,⁵ demostró que cuando el problema de transferencia de masa en la fase es predominantemente convectivo ($Pe \gg 1$) y en el menisco se establece un importante gradiente radial de concentración, se necesita aplicar la condición de contorno de concentración uniforme ($C=1$) a una distancia muy grande del menisco con el objeto de evitar la aparición de fuertes oscilaciones en esta variable. Para optimizar los recursos computacionales, Severino utilizó en forma exitosa *elementos infinitos* en la entrada,⁶ los cuales permiten mapear el dominio finito mostrado en la Figura 1 a uno infinito ($z = 0 \leftrightarrow z = -\infty$), permitiendo así eliminar las oscilaciones en la concentración. Finalmente, para asegurar que el problema de transferencia de masa se resuelve en forma satisfactoria, se utiliza un balance de masa global de surfactante aplicado a un volumen de control limitado por las áreas de entrada ($z=0$), salida ($z = z_f$), la pared ($r=1$) y la región vecina a la interfase (es decir que se excluye a la interfase del balance). Esta ecuación global se resuelve en forma simultánea dentro de la iteración de Newton y así converge para alcanzar el mismo error establecido para todas las variables. En este trabajo, también se utiliza un método de refinamiento de la malla computacional cerca en la interfase,⁶ con el objetivo de describir en forma mas precisa el campo de velocidad y la transferencia de masa en dicha región.

RESULTADOS

Primera Parte: Efectos de inercia a tensión superficial constante

Como se mencionó anteriormente, Giavedoni y Saita¹ estudiaron el efecto del Re sobre el espesor h_∞ para los problemas plano y axisimétrico y en el rango $0 \leq Re \leq 70$, mientras que Heil² extendió el análisis hasta $Re=300$ para el caso plano. La Figura 2 muestra nuevos resultados para el caso axisimétrico, presentando la evolución de h_∞ para el rango propuesto por Heil.² Aquí se puede apreciar el comportamiento no monótono característico del espesor de film con el Re ; esto significa que se puede obtener la misma cantidad de líquido depositado sobre la pared del capilar tras el paso del frente de la burbuja, para diferentes números de Re a Ca constante. Esta condición se podría lograr cambiando la velocidad U y la viscosidad μ de manera que el Ca permanezca constante y varíe Re .

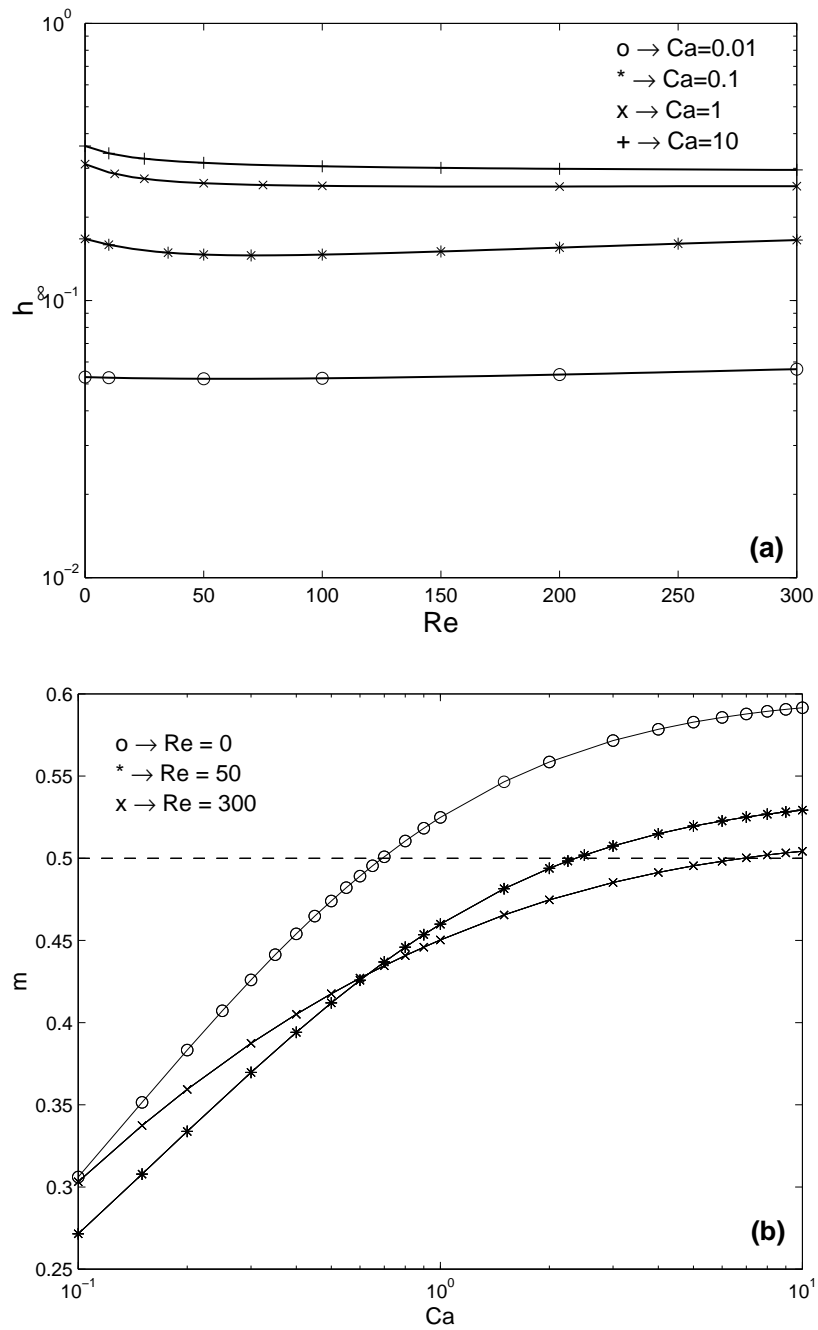


Figura 2: (a) Espesor del film vs Re para varios Ca y (b) parámetro m vs Ca para tres Re característicos.

La Figura 2-a contiene resultados que comprenden un amplio rango del número Ca (3 órdenes de magnitud), aunque es evidente que variaciones más significativas con Re se obtienen a partir de $Ca \geq 0,1$. Motivados por estos resultados, en la Figura 2-b se representa la variación del parámetro $m = 1 - (1 - h_\infty)^2$ propuesto por Bretherton, en función del Ca y para tres valores de Re^a . Aquí se encuentra marcado por su importancia el valor $m=0,5$, dado que por debajo de este existe un flujo de retroceso (*backflow*) a la entrada (ver ec. 3). En esta gráfica, se puede ver claramente el comportamiento no monótono de m vs Re para $Ca=0,1$, el cual desaparece para $Ca=0,636$; es decir que a partir de este valor el mínimo de m se encontrará siempre para $Re=300$. La pendiente de las curvas en $Ca=10$ muestran que estas no se vuelven a cruzar.

También resulta interesante analizar las modificaciones en el flujo con la ayuda de las líneas de corriente. Para ello, se tomó como caso de estudio el valor de $Ca=0,636$ y en la Figura 3 se muestran las líneas de corriente para los tres Re elegidos (0, 50 y 300). Se puede ver claramente como para $Re=0$, dado que m es ligeramente menor que 0,5 (0,4937), existe una pequeña recirculación sobre la línea de simetría y el punto de estancamiento se encuentra fuera de la interfase. Esto ya fue informado en,¹ quienes notaron que en el rango $0,603 \leq Ca \leq 0,692$ persiste un flujo de retroceso en esta región mientras que en la interfase la velocidad está dirigida siempre hacia el film: es decir que existe un solo punto de estancamiento sobre la interfase (ubicado en la intersección entre ella y la línea de simetría) y otro punto de estancamiento en algún lugar sobre la línea de simetría. Por otro lado, para $Re=50$ y 300 m es francamente menor que 0,5 y por lo tanto el flujo de retroceso tiene una magnitud mayor. Además del punto de estancamiento en el menisco, existe entonces un “anillo de estancamiento” sobre la interfase. Como se mostró en la Figura 2-b, m coincide para $Re=50$ y 300 a este valor de Ca . Así, en la Figura 3 se han dibujado las isocurvas para los mismos valores de la función línea de corriente (entre $Re=50$ y 300), con el objeto de mostrar la forma en que la inercia afecta al flujo. Estas variaciones se deben a los cambios de curvatura en el menisco, los cuales se pueden apreciar mejor en la Figura 4 donde se grafica la interfase para los tres valores de Re de la Figura 3. En ella se ve claramente la coincidencia del espesor de film para $Re=50$ y 300 (y por lo tanto de m), mientras que el menisco presenta una forma mucho más alargada u oblonga a medida que aumenta el Re . También se puede visualizar la gran distancia axial que necesita la interfase para relajarse, al compararla con la situación a $Re=0$.

Otro parámetro de interés para analizar el efecto de Re sobre el flujo consiste en calcular o medir la caída de presión que se produce en el sistema; usualmente esta cantidad se mide como la diferencia de presión sobre la interfase, entre la región del film y el menisco ($\Delta = p_{s=s_f} - p_{s=0}$). Por motivos de espacio estos resultados no se pueden mostrar aquí, pero se mencionará lo siguiente. Se encontró que a medida que aumenta Re (a Ca constante), siempre se requiere mayor diferencia de presión para desplazar la burbuja. Heil² mostró que, en el caso plano, se desarrolla un vórtice en el frente del menisco que aumenta

^aEstos valores se eligieron por ser los extremos del rango estudiado y un valor cercano para el cual se obtiene el espesor mínimo entre $0,01 < Ca < 0,1$.

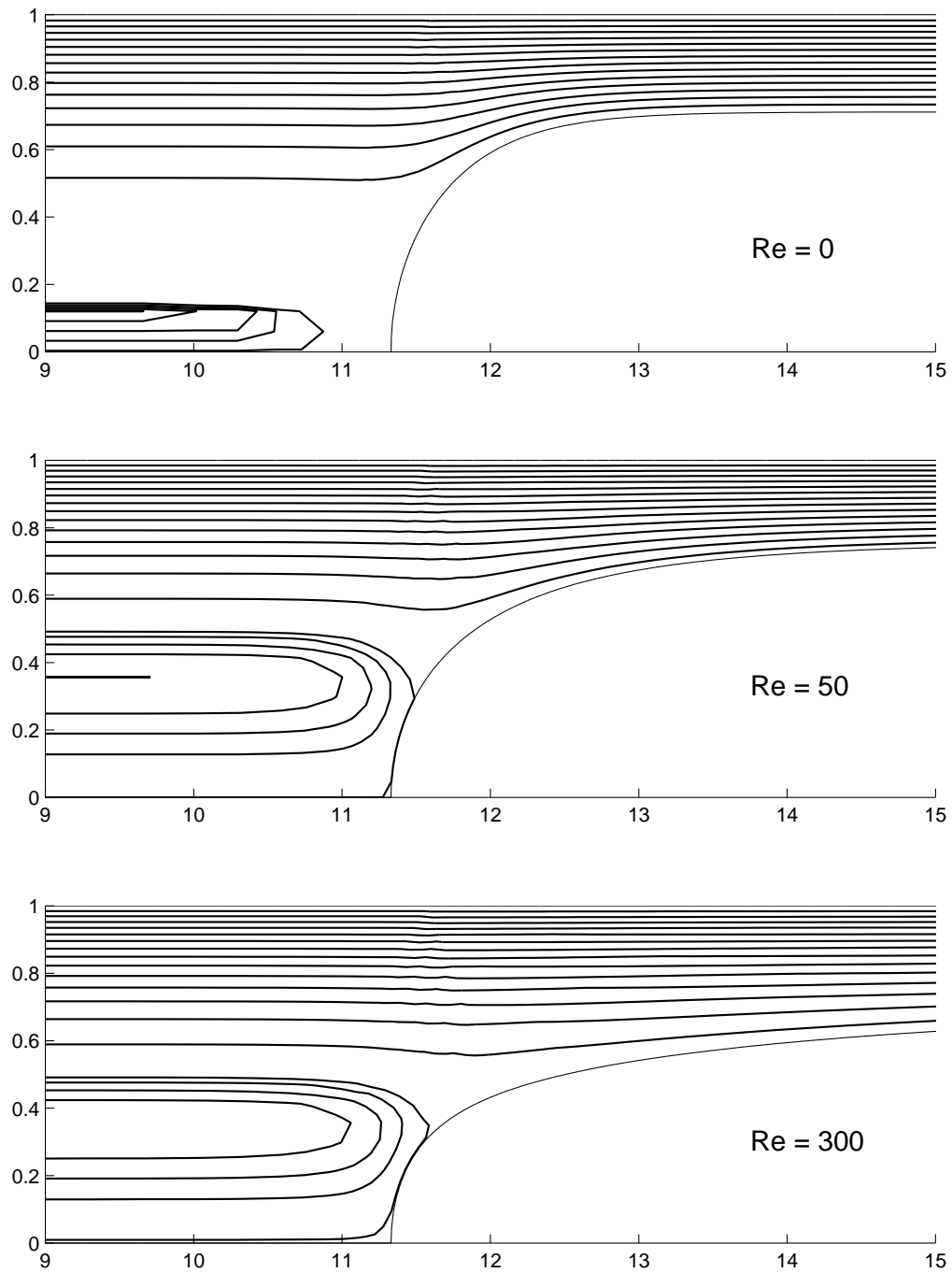


Figura 3: Efecto del Re sobre el flujo para $Ca=0.636$.

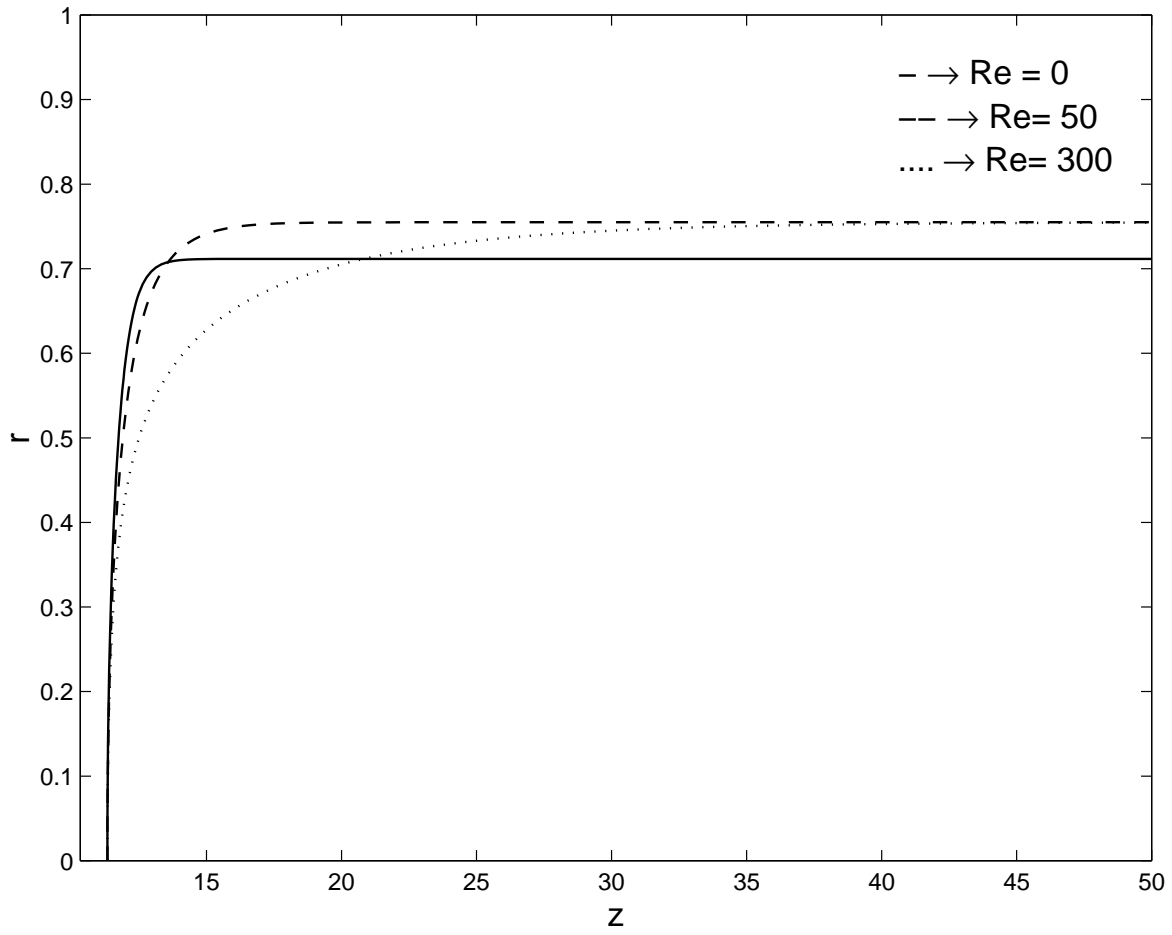


Figura 4: Efecto del Re sobre la interfase para $Ca=0,636$.

de tamaño al crecer el Re . La presencia de este vórtice introduce una caída de presión “adicional” (debido a una componente centrífuga) de tal forma que la presión del menisco deja de ser representativa de aquella en la zona de flujo desarrollado. Heil propuso entonces medir la caída de presión entre la región de la película y a una distancia fija del menisco, en la zona de flujo desarrollado. Para el caso axisimétrico estudiado aquí, no se detectó la aparición de este vórtice a pesar que se analizaron resultados para valores tan altos como $Re=1200$ ($Ca=0,05$). Sin embargo, nuestros resultados muestran que cuando los efectos de inercia son importantes, el fluido necesita una distancia cada vez mayor para alcanzar su estado de flujo desarrollado.

Segunda Parte: Comportamiento del sistema en presencia de un surfactante

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al incluir el efecto de un surfactante en las simulaciones numéricas y para ello se los ha dividido en dos categorías. En la primera se obtienen resultados a $Re=0$ que permiten validar el modelo aquí presentado con datos publicados recientemente,³ a la vez que demuestran los beneficios de la técnica numérica utilizada. En la segunda parte se analizan resultados novedosos, al incluir el efecto del Re sobre el sistema.

Validación del modelo en régimen de Stokes ($Re=0$) Para la validación del modelo, se realizó un estudio comparativo con resultados publicados por Ghadiali y Gaver,³ quienes realizaron un completo estudio del problema al analizar la influencia de los diferentes parámetros adimensionales. Estos autores proponen un caso base o de referencia (CR) que, de acuerdo con la definición de nuestros parámetros adimensionales, queda constituido por los valores: $Re = 0$, $Ca = 0,15$, $\alpha = 10$, $La = 2$, $K = 0,1$, $Pe = 0$, $Pe_s = 1000$ y $\beta = 1$. Los parámetros de este CR tienen relación con los valores normalmente encontrados en las aplicaciones y experimentos^b, como se determinó luego de explorar varias publicaciones relacionadas.^{1,7-13} Por ello, a partir de ahora se utilizará el CR propuesto para representar la actividad de un surfactante, considerando que el Re y Ca serán modificados de forma paramétrica en nuestro análisis.

Como ya se mencionó, la principal limitación de la técnica numérica utilizada por Ghadiali y Gaver³ es que solo permite considerar un sistema en régimen de Stokes ($Re=0$). Además, también limita el análisis a valores moderadamente bajos del número Ca ya que en ningún caso presentaron resultados para $Ca \leq 0,02$. Los datos experimentales muestran que aun tomando valores medios de las magnitudes físicoquímicas, el $Ca \sim 10^{-3}$ y puede llegar a valores tan bajos como $Ca \sim 10^{-5}$. De esta forma, la Figura 5 reproduce algunos de los resultados publicados para el CR³ a la vez que extiende el rango hasta $Ca = 10^{-4}$. En esta gráfica se muestra la variación de la relación $\nu_\infty = h_\infty/h_\infty^0$, es decir el cociente entre los espesores del film para los casos con y sin surfactante, respectivamente,¹⁴

^bLa única excepción la constituye la diferencia entre Pe y Pe_s utilizada por éstos autores, la cual no encuentra justificación en los datos experimentales.

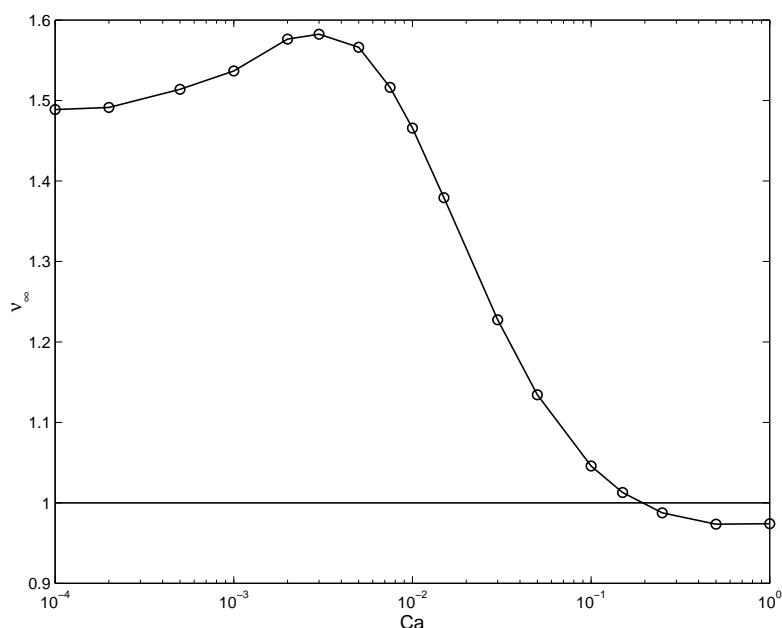


Figura 5: Variación de la relación de espesores de film para el CR y $\beta = 1$, en función del Ca .

considerando un soluto inerte ($\beta = 0$) y un surfactante con un importante efecto elástico ($\beta = 1$). La coincidencia de resultados con la literatura³ es muy buena, ya que se encontraron diferencias menores al 1% en los espesores de película. En la Figura 5 se ha delimitado el valor $\nu_\infty = 1$ para mostrar que el surfactante produce efectos antagónicos sobre el espesor del film dependiendo del Ca . Mediante interpolación, se aproximó el valor del Ca para el cual la relación de espesores se hace igual a la unidad: $Ca^* = 0,1791 \Rightarrow \nu_\infty = 1,0022$. Para $Ca < Ca^*$ el espesor de film aumenta (frente al caso sin surfactante) en forma no-monotónica, alcanzando un máximo para $Ca \sim 3 \times 10^{-3}$ y luego disminuyendo para tomar valores aproximadamente constantes en la región de $Ca^c \sim O(10^{-4})$. Este comportamiento ya fue observado por Severino,¹⁵ donde además se encontró que $Ca^c = Ca^c(\beta)$. Por otro lado, para $Ca > Ca^*$ el espesor de film disminuye en presencia del surfactante. Este comportamiento se puede entender analizando la competencia entre las tensiones de Marangoni (que tienden a aumentar h_∞ para este CR) y la tensión superficial del film que tiende a disminuir el espesor. Este último efecto se debe al estado de equilibrio elegido, el cual determina que $\sigma_{film} > \sigma_{eq}$ en todos los casos.

Mediante los resultados presentados en esta sección se pudo validar satisfactoriamente el modelo, a la vez que se mostró que la técnica numérica utilizada permite obtener resultados para números Ca acordes a los encontrados en las aplicaciones.

Efectos del Re en presencia de surfactantes El análisis de los resultados de la Figura 5 muestra claramente dos estados de interés para analizar el efecto del Re sobre

el sistema. El primero es naturalmente el valor donde el surfactante produce un efecto nulo ($Ca = Ca^*$), mientras que el segundo se puede tomar en el punto de máximo efecto ($Ca = Ca^{max}$). De esta forma, se realizaron experimentos numéricos variando el número Re en el rango estudiado previamente y para estos dos estados; los resultados se presentan en la Figura 6. Para el caso de $Ca = Ca^{max} = 3 \times 10^{-3}$ se puede observar que la acción del surfactante cambia la sensibilidad del espesor del film frente al Re ; mientras que con $\beta = 0$ el espesor h_∞ crece monótonicamente con el Re , para $\beta = 1$ adopta el comportamiento no-monotónico típico de números Ca mayores (Figura 2-a, $Ca=0,01$). Esto se debe al efecto de las tensiones tangenciales que, al producir un aumento del espesor h_∞ , hacen que el sistema responda ante las fuerzas de inercia de manera similar a casos con Ca mayores. Nótese de la Figura 6 que la acción del surfactante produce un valor de $h_\infty \sim 0,04$ para todo el rango de Re , el cual es muy similar al valor $h_\infty \sim 0,05$ que se obtiene para $Ca=0,01$ y $\beta = 0$ (ver Figura 2-a).

Para el caso con $Ca = Ca^*$, se puede apreciar que la acción de la inercia hace que los sistemas con y sin surfactante ya no tengan el mismo espesor de film. Esta diferencia en h_∞ aumenta desde $Re=0$, se hace máxima para $Re \sim 70$ y luego empieza a disminuir lentamente para Re mayores. Como se puede apreciar, aquí también se produce un cambio en la sensibilidad $h_\infty(Re)$, pero es mucho más moderado que el observado para $Ca = Ca^{max}$. Esto es comprensible, ya que para estos valores del Ca los efectos tensioactivos son de menor importancia (comparados con el caso $Ca = Ca^*$) en relación a los viscosos e inerciales.

Por último, resulta interesante observar de la Figura 6 como en ambos casos el surfactante introduce un efecto *atenuante* de las variaciones producidas por el Re sobre el caso sin tensioactivo. Así, cuando $Ca = Ca^{max}$ se pueden observar variaciones máximas de h_∞ cercanas al 7% para $\beta = 0$ y del 1% para $\beta = 1$; de manera similar, cuando $Ca = Ca^*$ estas variaciones son 14% y 12%, respectivamente.

CONCLUSIONES

En este trabajo se formuló un modelo físico matemático para describir el desplazamiento de una burbuja larga (semi-infinita) en un tubo capilar y en presencia de un surfactante soluble. La formulación incluye los efectos de las fuerzas de inercia en el modelo, característica comúnmente descartada para este tipo de trabajos. El conjunto de ecuaciones obtenidas se resolvió numéricamente mediante el método de elementos finitos y los resultados a $Re=0$ se validaron con otros publicados. Luego, se obtuvieron resultados novedosos que confirman que los efectos de inercia son importantes para valores del $Ca > 0,01$. Además, aún para valores altos este parámetro se comprobó que los efectos de los surfactantes son apreciables y contribuyen a atenuar las variaciones del espesor del film h_∞ , producidas por las fuerzas de inercia en el sistema.

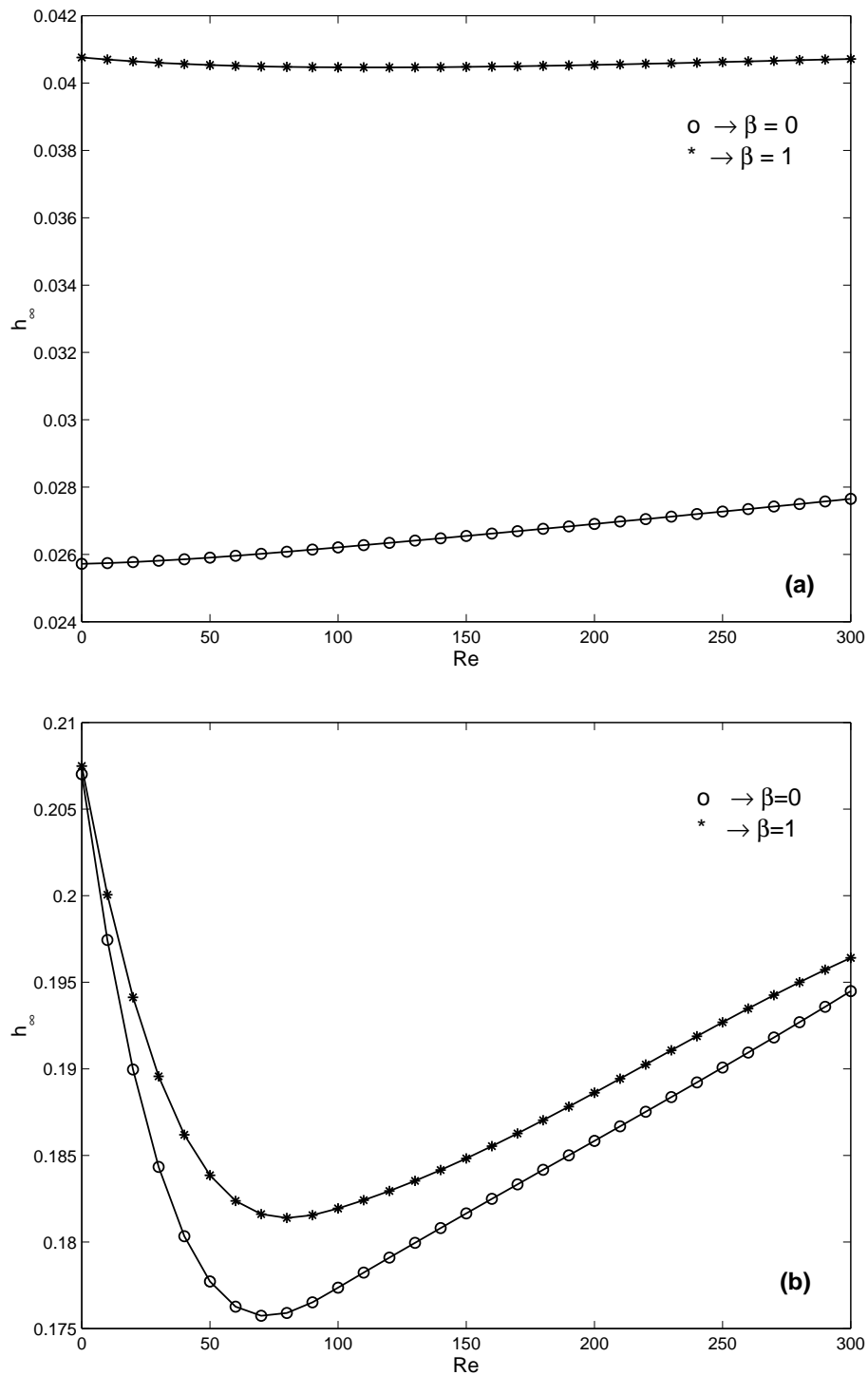


Figura 6: Variación del espesor de film con el Re para (a) $Ca = Ca^{max}$ y (b) $Ca = Ca^*$.

REFERENCIAS

- [1] M. D. Giavedoni and F. A. Saita. The axisymmetric and plane cases of a gas phase steadily displacing a newtonian liquid. A simultaneous solution of the governing equations. *Phys. Fluids*, **9**, 2420 (1997).
- [2] M. Heil. Finite Reynolds number effects in the Bretherton problem. *Phys. Fluids*, **13**(9), 2517 (2001).
- [3] S. N. Ghadiali and D. P. Gaver III. The influence of non-equilibrium surfactant dynamics on the flow of a semi-infinite bubble in a rigid cylindrical capillary tube. *J. Fluid Mech.*, **478**, 165 (2003).
- [4] S. F. Kistler and L. E. Scriven. *Coating flow computations*. Computational Analysis of Polymer Processing. Applied Science Publishers, Londres, (1982). Cap. 8.
- [5] M. Severino. *Desplazamiento de un líquido confinado entre placas planas por un gas en presencia de agentes surfactantes*. Tesis Doctoral, Facultad de Ingeniería Química - Universidad Nacional del Litoral, (Diciembre 2001).
- [6] M. Severino, M. D. Giavedoni, and F. A. Saita. Técnicas de discretización en elementos finitos apropiadas para flujos con interfases y en presencia de surfactantes. In *Mecánica Computacional*, volume XIX, page 61. AMCA, (2000).
- [7] M. D. Giavedoni and F. A. Saita. A free surface flow with compositional dependent interfacial properties. *Phys. Fluids*, **8**, 1371 (1996).
- [8] C-H. Chang and E. I. Franses. Adsorption dynamics of surfactants at the air/water interface: a critical review of mathematical models, data and mechanisms. *Colloids and Surfaces A*, **100**, 1 (1995).
- [9] A. Borhan and C. F. Mao. Effect of surfactants on the motion of drops through circular tubes. *Phys. Fluids A*, **4**(12), 2628 (1992).
- [10] C-H. Park. Effects of insoluble surfactants on dip coating. *J. Colloid and Interface Science*, **146**(2), 382 (1991).
- [11] B. Cuenot; J. Magnaudet and B. Spennato. The effect of slightly soluble surfactants on the flows around a spherical bubble. *J. Fluid Mech.*, **339**, 25 (1997).
- [12] O. K. Matar. Nonlinear evolution of thin free viscous films in the presence of soluble surfactant. *Physics of Fluids*, **14**(12), 4216 (2002).
- [13] S. L. Waters and J. B. Grotberg. The propagation of a surfactant laden liquid plug in a capillary tube. *Physics of Fluids*, **14**(2), 471 (2002).
- [14] J. Ratulowski and H. C. Chang. Marangoni effects of trace impurities on the motion of long bubbles in capillaries. *J. Fluid Mech.*, **210**, 303 (1990).
- [15] M. D. Severino, M.; Giavedoni and F. A. Saita. A gas phase displacing a liquid with soluble surfactants out of a small conduit-The planar case. *Phys. Fluids (in press)*.