

UM MODELO PARA MATERIAIS COM ANISOTROPIA PLÁSTICA INDUZIDA PELAS DEFORMAÇÕES

Alexandre F. Marcon* e Guillermo J. Creus†

* Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Estado de Santa Catarina
Campus Universitário Avelino Marcante, Joinville, SC, Brasil.
Fone: 047 4317200 - ramal 236 - e-mail: afmarcon@mecanica.ufrgs.br

† Centro de Mecânica Aplicada e Computacional (CEMACOM)
Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Av. Osvaldo Aranha, 99, 3º andar, CEP 90035.190 Porto Alegre, RS, Brasil.
Fone: 54-051-33163362 - FAX: 051 33163999 - e-mail: creus@ufrgs.br

Palavras-chave: Anisotropia plástica, Modelos de endurecimento, Grandes deformações, Espaço de Ilyushin, Polinômios de Hermite.

Resumo. *Uma nova superfície de escoamento, descrita por polinômios de Hermite no espaço das tensões de Ilyushin, é apresentada. O modelo proposto permite qualquer combinação (convexa) para os valores das tensões de escoamento em tração, compressão e corte nos eixos principais de anisotropia. A determinação desses eixos, em grandes deformações, é feita através da análise dos autovetores do tensor de deformação plástica. O resultado final consiste em uma formulação que permite a mudança - governada pelas deformações - de tamanho, forma e orientação da superfície de escoamento. Desta maneira é possível analisar materiais que desenvolvem anisotropia induzida pelas deformações. O modelo de endurecimento proposto permite incorporar o endurecimento isótropo (mudança de tamanho) e anisótropo (mudança de forma), bem como dispensa o uso do modelo cinemático para análise do efeito Bauschinger. Mostrou-se também capaz de prever a rotação dos eixos principais de anisotropia em presença de grandes deformações. Um exemplo é apresentado comparando resultados experimentais, disponíveis na literatura, com resultados de simulação.*

1 INTRODUÇÃO

Para modelar o comportamento elasto-plástico dos metais em códigos numéricos (em particular, de Elementos Finitos) três questões precisam ser resolvidas: a) Qual função descreve a superfície de escoamento? b) Qual a relação entre o tensor de tensão e o incremento de deformação plástica? e c) Como a superfície de escoamento evolui com o incremento de deformação?

Várias funções de escoamento podem ser encontradas na literatura. Por sua simplicidade, o critério mais utilizado é o de Hill¹ que utiliza uma função quadrática relacionando as seis componentes de tensão, nos eixos principais de anisotropia, com os respectivos patamares de escoamento. Para um material isotrópico o critério de Hill reproduz o critério de von Mises.

Para o caso específico de ligas de alumínio, Barlat² sugere o uso de outra função de escoamento, capaz de reproduzir von Mises, Tresca ou formas intermediárias. Outros estudos³ enfocam o caso específico de chapas metálicas, e com isso produzem formulações no espaço das tensões planas. Uma excelente descrição de diversos modelos pode ser encontrada no trabalho de Habraken⁴.

A segunda questão diz respeito à regra de fluxo plástico. A mais utilizada, e experimentalmente comprovada, postula que o fluxo plástico ocorre numa direção ortogonal à superfície de escoamento.

Finalmente, a terceira questão diz respeito aos modelos de endurecimento. Os modelos mais conhecidos são os modelos isótropo e cinemático^{5, 6}. O primeiro permite que a superfície de escoamento aumente de tamanho com o incremento de deformação plástica, sem variação de forma e o segundo faz com que a superfície se translate no espaço das tensões principais com o objetivo de acomodar o efeito Bauschinger. Um modelo misto⁷ pode facilmente ser produzido com a combinação dos dois.

A literatura também apresenta modelos que utilizam múltiplas camadas de materiais justapostas⁸ ou múltiplas funções de escoamento^{9, 10}. Esses modelos apresentam a vantagem de reproduzir com mais facilidade alguns aspectos transientes do fluxo plástico e a desvantagem de utilizar muitos parâmetros ou muitas malhas de elementos finitos justapostas, o que onera o custo da solução. Nenhum dos modelos de endurecimento mencionados acima indica como prever a evolução dos eixos principais de anisotropia em presença de grandes deformações.

O presente trabalho utiliza uma abordagem fenomenológica para propor:

- 1) um modelo que descreve a superfície de escoamento, sua forma e orientação, e
- 2) um modelo que descreve a evolução da superfície de escoamento em presença de grandes deformações (mudança de tamanho, forma e orientação).

A descrição da superfície de escoamento utiliza seis polinômios de Hermite que definem uma curva suave no espaço das tensões de Ilyushin. Para materiais isotrópicos este modelo permite representar superfícies como a de von Mises ou de Tresca, bem como formas intermediárias. Para materiais anisotrópicos descreve uma curva suave e convexa passando por

seis pontos de controle: as tensões de escoamento em tração e compressão nos três eixos principais de anisotropia. Isso permite modelar materiais com tensão de escoamento em tração e compressão distintas.

Na segunda parte apresenta-se uma forma de atualizar os eixos principais de anisotropia em função das deformações plásticas. Propõe-se que os autovetores do tensor de deformação plástica sejam utilizados para definir as direções principais de anisotropia e os autovalores do mesmo tensor para definir os patamares de escoamento. Assim a superfície pode mudar de tamanho, forma e orientação. Discute-se também neste item a importância de um parâmetro de “memória”, que permite orientar a superfície com base nas últimas deformações plásticas, e não com base em todo o histórico de deformações do corpo.

2 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO PROPOSTO

O modelo proposto como critério de escoamento utiliza polinômios de Hermite para definir uma curva suave no espaço das tensões de Ilyushin.

2.1 Polinômio de Hermite

O polinômio de Hermite é descrito numa variável paramétrica u ($0 \leq u \leq 1$), através da seguinte função (os sub-índices se referem aos valores nos pontos de controle):

$$\begin{aligned} x &= (2x_1 - 2x_2 + dx_1 + dx_2)u^3 + (-3x_1 + 3x_2 - 2dx_1 - dx_2)u^2 + dx_1 u + x_1 \\ y &= (2y_1 - 2y_2 + dy_1 + dy_2)u^3 + (-3y_1 + 3y_2 - 2dy_1 - dy_2)u^2 + dy_1 u + y_1 \end{aligned} \quad (1)$$

Tangente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= 3(2x_1 - 2x_2 + dx_1 + dx_2)u^2 + 2(-3x_1 + 3x_2 - 2dx_1 - dx_2)u + dx_1 \\ \frac{dy}{du} &= 3(2y_1 - 2y_2 + dy_1 + dy_2)u^2 + 2(-3y_1 + 3y_2 - 2dy_1 - dy_2)u + dy_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Normal:

$$\begin{aligned} n_x &= 3(2y_1 - 2y_2 + dy_1 + dy_2)u^2 + 2(-3y_1 + 3y_2 - 2dy_1 - dy_2)u + dy_1 \\ n_y &= -3(2x_1 - 2x_2 + dx_1 + dx_2)u^2 - 2(-3x_1 + 3x_2 - 2dx_1 - dx_2)u - dx_1 \end{aligned} \quad (3)$$

O polinômio de Hermite possui seis parâmetros de controle: ponto inicial e final; tangente inicial e final; agressividade (ou velocidade, ou magnitude da tangente) inicial e final. A influência dos quatro primeiros dispensa explicações. A influência da agressividade é mostrada na figura 1.

2.2 Espaço de tensões de Ilyushin

O plano desviador é o espaço dos tensores de tensão com traço nulo. Para materiais

isotrópicos e com escoamento independente da pressão esse espaço é suficiente para descrever a superfície de escoamento. Se o material é anisotrópico esse espaço precisa ser acrescido de mais três eixos ortogonais (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}), resultando em um espaço de cinco dimensões. Usualmente o sistema coordenado do plano desviador é constituído pelas projeções das componentes de tensão normal do tensor de tensões. Como essas projeções não são ortogonais, Ilyushin¹¹ propôs utilizar um sistema de eixos ortogonais definidos no plano desviador. A figura 3, que será detalhada mais adiante, mostra as projeções dos eixos de tensão normal (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}) sobre o plano desviador juntamente com os eixos ortogonais (s_1 , s_2) propostos por Ilyushin.

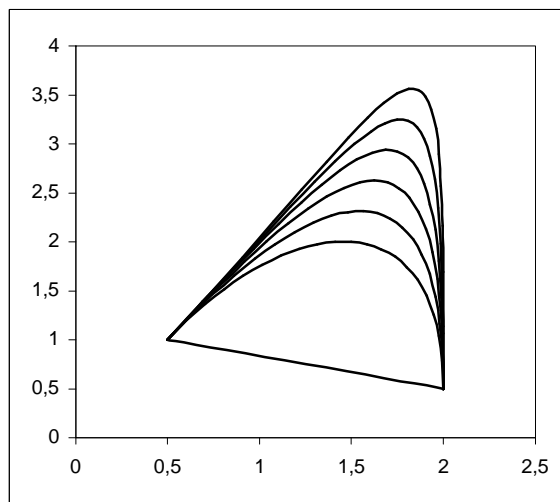


Fig. 1 – Influência da agressividade na forma da curva descrita pelo polinômio de Hermite. Os pontos inicial e final, assim como as tangentes inicial e final, são iguais em todas as curvas. Quando a agressividade é nula, anula-se também a tangente e a curva resulta uma reta.

O tensor de tensões no espaço das cinco componentes de Ilyushin, a partir do tensor de tensões desviadoras de Cauchy, é dado por:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} s_{xx} & s_3 &= \sqrt{2} s_{xy} \\
 s_2 &= \sqrt{2} \left(\frac{s_{xx}}{2} + s_{yy} \right) & s_4 &= \sqrt{2} s_{xz} \\
 & & s_5 &= \sqrt{2} s_{yz}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Assim, por exemplo, von Mises pode ser escrito como uma hipersfera no espaço de Ilyushin:

$$\left\| s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ s_5 \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \tag{5}$$

Observação: A métrica do espaço original de Ilyushin é diferente da apresentada acima. Há um fator $\sqrt{2/3}$ multiplicando todas as componentes.

2.3 Superfície de escoamento

Para descrever a superfície de escoamento são utilizados seis polinômios de Hermite no plano desviador. Os seis pontos de controle destes polinômios são os patamares de tração e compressão em cada um dos eixos principais de anisotropia, que devem ser determinados experimentalmente. O modelo permite colocar como parâmetros adicionais as inclinações das tangentes nos pontos de controle. Para evitar a necessidade de determinar experimentalmente também as tangentes em cada ponto, é proposto como tangente a seguinte simplificação: utilizar a declividade da reta que une os ponto de controle à direita e à esquerda do ponto em questão. Essa simplificação parece ser fisicamente razoável uma vez que a tangente assim calculada fornece uma composição para as componentes de deformação plástica que pondera os patamares de escoamento nas direções transversais.

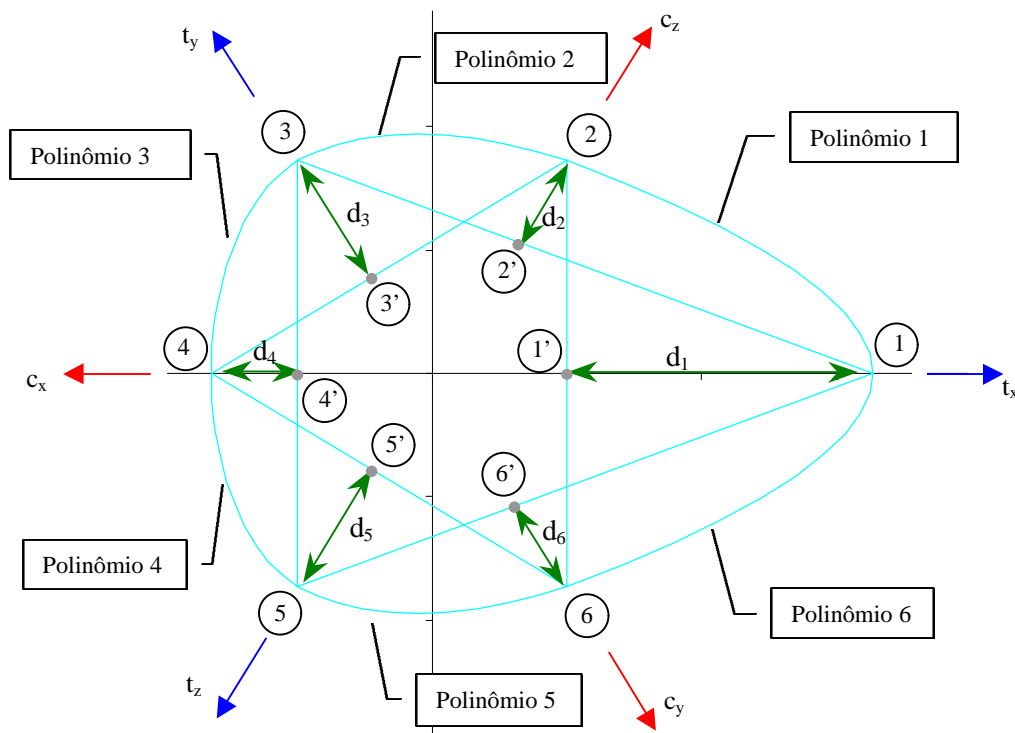


Fig. 2 – Superfície de escoamento descrita por seis Polinômios de Hermite no plano desviador.

Os pontos (1, 2, 3, 4, 5, 6) são os pontos de controle dos polinômios.

Os pontos (1', 2', 3', 4', 5', 6') são limites para garantir a convexidade.

As linhas retas fornecem a tangente nos pontos de controle.

As distâncias ($d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$) fornecem os valores de agressividade.

As distâncias d_1, d_2, \dots, d_6 , indicadas na figura 2, regulam a agressividade dos polinômios.

Assim a distância d_2 é o valor da agressividade inicial do polinômio 1 e final do polinômio 2. A distância d_1 é o valor da agressividade inicial do polinômio 6 e final do polinômio 1. A tabela 1 mostra como foram definidos os polinômios, seus pontos de controle, suas tangentes e agressividades.

Além do fator de agressividade particular de cada ponto de controle e de cada polinômio, pode ser utilizado um fator de agressividade geral (a_g). Este fator controla a aparência global da superfície e determina o intervalo onde a curva é convexa. Da forma como foi definido neste trabalho, este intervalo é $[0; 2]$. Para materiais isotrópicos, se $a_g = 0$, todos os polinômios resultam em retas e o critério reproduz Tresca. Se $a_g = 2$ o critério reproduz von Mises. Valores intermediários provocam superfícies também intermediárias entre Tresca e von Mises.

Na figura 2, os pontos internos ($1'$, $2'$, ..., $6'$) indicam os valores limites para assegurar convexidade. Se um dos pontos de controle assume um valor menor do que o seu limite correspondente, a superfície deixa de ser convexa. As equações em (6) mostram as restrições necessárias para assegurar a convexidade, e surgem da condição $d_i \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 t_{xx} &\geq \frac{c_{yy} c_{zz}}{c_{yy} + c_{zz}} & t_{yy} &\geq \frac{c_{xx} c_{zz}}{c_{xx} + c_{zz}} & t_{zz} &\geq \frac{c_{xx} c_{yy}}{c_{xx} + c_{yy}} \\
 c_{xx} &\geq \frac{t_{yy} t_{zz}}{t_{yy} + t_{zz}} & c_{yy} &\geq \frac{t_{xx} t_{zz}}{t_{xx} + t_{zz}} & c_{zz} &\geq \frac{t_{xx} t_{yy}}{t_{xx} + t_{yy}} \\
 0 &\leq a_g \leq 2
 \end{aligned} \tag{6}$$

Tabela 1 – Definição dos pontos de controle, tangentes e agressividades para cada polinômio de Hermite

Polinômio	Pontos	Tangentes	Agressividades
	$(x_1; y_1)$	$(dx_1; dy_1)$	a_1
	$(x_2; y_2)$	$(dx_2; dy_2)$	a_2
1	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}} t_{xx}; 0 \right)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{6}} (c_{zz} - c_{yy}); \frac{\sqrt{2}}{2} (c_{zz} + c_{yy}) \right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3} \left(c_{zz} - \frac{t_{xx} t_{yy}}{t_{xx} + t_{yy}} \right) a_g$
	$\left(\sqrt{\frac{1}{6}} c_{zz}; \frac{\sqrt{2}}{2} c_{zz} \right)$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{t_{yy}}{2} + t_{xx} \right); \frac{\sqrt{2}}{2} t_{yy} \right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3} \left(t_{xx} - \frac{c_{yy} c_{zz}}{c_{yy} + c_{zz}} \right) a_g$
2	$\left(\sqrt{\frac{1}{6}} c_{zz}; \frac{\sqrt{2}}{2} c_{zz} \right)$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{t_{yy}}{2} + t_{xx} \right); \frac{\sqrt{2}}{2} t_{yy} \right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3} \left(t_{yy} - \frac{c_{xx} c_{zz}}{c_{xx} + c_{zz}} \right) a_g$
	$\left(-\sqrt{\frac{1}{6}} t_{yy}; \frac{\sqrt{2}}{2} t_{yy} \right)$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \left(c_{xx} + \frac{c_{zz}}{2} \right); -\frac{\sqrt{2}}{2} c_{zz} \right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3} \left(c_{zz} - \frac{t_{xx} t_{yy}}{t_{xx} + t_{yy}} \right) a_g$

3	$\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}t_{yy}; \frac{\sqrt{2}}{2}t_{yy}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\left(c_{xx} + \frac{c_{zz}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}c_{zz}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(c_{xx} - \frac{t_{yy}t_{zz}}{t_{yy} + t_{zz}}\right)a_g$
	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}c_{xx}; 0\right)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{6}}(t_{yy} - t_{zz}); -\frac{\sqrt{2}}{2}(t_{yy} + t_{zz})\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(t_{yy} - \frac{c_{xx}c_{zz}}{c_{xx} + c_{zz}}\right)a_g$
4	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}c_{xx}; 0\right)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{6}}(t_{yy} - t_{zz}); -\frac{\sqrt{2}}{2}(t_{yy} + t_{zz})\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(t_{zz} - \frac{c_{xx}c_{yy}}{c_{xx} + c_{yy}}\right)a_g$
	$\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}t_{zz}; -\frac{\sqrt{2}}{2}t_{zz}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{c_{yy}}{2} + c_{xx}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}c_{yy}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(c_{xx} - \frac{t_{yy}t_{zz}}{t_{yy} + t_{zz}}\right)a_g$
5	$\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}t_{zz}; -\frac{\sqrt{2}}{2}t_{zz}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{c_{yy}}{2} + c_{xx}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}c_{yy}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(c_{yy} - \frac{t_{xx}t_{zz}}{t_{xx} + t_{zz}}\right)a_g$
	$\left(\sqrt{\frac{1}{6}}c_{yy}; -\frac{\sqrt{2}}{2}c_{yy}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left(t_{xx} + \frac{t_{zz}}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}t_{zz}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(t_{zz} - \frac{c_{xx}c_{yy}}{c_{xx} + c_{yy}}\right)a_g$
6	$\left(\sqrt{\frac{1}{6}}c_{yy}; -\frac{\sqrt{2}}{2}c_{yy}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left(t_{xx} + \frac{t_{zz}}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}t_{zz}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(t_{xx} - \frac{c_{yy}c_{zz}}{c_{yy} + c_{zz}}\right)a_g$
	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t_{xx}; 0\right)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{6}}(c_{zz} - c_{yy}); \frac{\sqrt{2}}{2}(c_{zz} + c_{yy})\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(c_{yy} - \frac{t_{xx}t_{zz}}{t_{xx} + t_{zz}}\right)a_g$

Observação.: As tangentes devem ser normalizadas.

A curva apresentada na figura 2 representa o critério de escoamento no plano desviador (onde o critério é definido pelos polinômios de Hermite). Nos demais eixos de Ilyushin (tensões de corte) propõe-se que o critério de escoamento assuma uma forma quadrática. Assim, no espaço das cinco dimensões de Ilyushin, o critério resulta:

$$\phi = \frac{s_1^2 + s_2^2}{s_{1e}^2 + s_{2e}^2} + \left(\frac{s_3}{s_{3e}}\right)^2 + \left(\frac{s_4}{s_{4e}}\right)^2 + \left(\frac{s_5}{s_{5e}}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

Onde:

$[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5]$

$[s_{1e}, s_{2e}, s_{3e}, s_{4e}, s_{5e}]$

são as componentes de Ilyushin do tensor de tensões de Cauchy;
são referências de escoamento.

Para um determinado estado de tensões, s_1 e s_2 indicam uma direção no plano desviador. As referências de escoamento s_{1e} e s_{2e} , necessárias na equação 7, são obtidas com o polinômio de Hermite nesta mesma direção. A figura 3 ilustra como obter esses valores. Os valores de s_{3e} , s_{4e} e s_{5e} são fornecidos diretamente pelas tensões de escoamento em corte no espaço de Ilyushin:

$$s_{3e} = \sqrt{2} \tau_{xy}^e \quad s_{4e} = \sqrt{2} \tau_{xz}^e \quad s_{5e} = \sqrt{2} \tau_{yz}^e \quad (8)$$

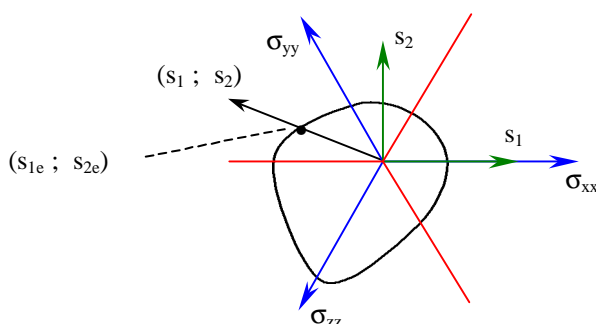


Fig. 3 – Projeção do tensor de tensões de Cauchy no plano desviador $(s_1 ; s_2)$ e limite de escoamento naquela direção $(s_{1e} ; s_{2e})$.

Para materiais isotrópicos, a formulação apresentada neste trabalho reproduzir o critério de Tresca ($a_g = 0$) ou de von Mises ($a_g = 2$). A Figura 4(a) mostra uma situação intermediária, com $a_g = 1$. A figura 4(b) mostra as diferenças que podem surgir entre os critérios de Tresca, von Mises, Hill e este trabalho.

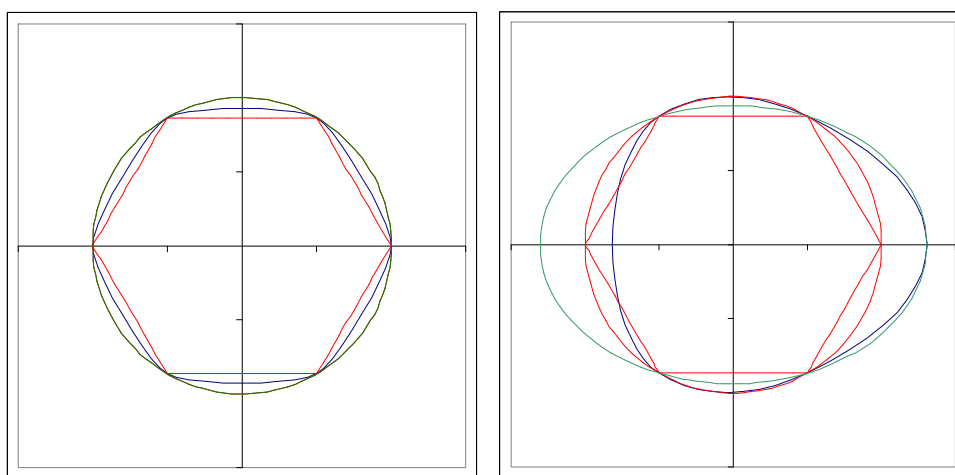


Fig. 4 – Comparação, no plano desviador, entre os critérios de von Mises (círculo), Tresca (hexágono), Hill (elipse) e este trabalho.
a) caso isotrópico e b) caso anisotrópico

3 MODELO DE ENDURECIMENTO

3.1 Eixos principais de anisotropia

O principal problema da anisotropia plástica em grandes deformações é a determinação dos eixos principais de anisotropia. A proposta deste trabalho é fazer coincidir os eixos principais de anisotropia com os eixos principais de deformação plástica.

Para modelar o encruamento isótropo emprega-se um escalar: a deformação plástica equivalente. Para modelar um encruamento não isótropo, é necessário empregar uma grandeza tensorial, por exemplo, o tensor de deformações plásticas. O cômputo deste tensor não é usual em códigos de elementos finitos, havendo algumas dificuldades que precisam ser resolvidas, como o método de integração e a escolha de uma configuração de referência adequada. Essas questões tem implicações matemáticas e físicas. As implicações matemáticas são análogas à discussão que envolve a integração do tensor de tensões^{12, 13, 14}. As implicações físicas dizem respeito ao conceito de memória do material. Utilizando como referência o estado inicial, onde o material é isotrópico, obtém-se um material que desenvolve anisotropia sem perda de memória. Toda a deformação plástica sofrida pelo corpo afeta os eixos principais de anisotropia. Por outro lado, adotando um estado atualizado a partir de uma certa magnitude de deformação plástica, obtém-se um material com um fator de “esquecimento”. As deformações plásticas anteriores a esse estado de referência não afetam mais os eixos principais de anisotropia.

Esse fator de esquecimento não é difícil de se determinar experimentalmente podendo ser interpretado da seguinte forma: qual a magnitude das deformações plásticas que é capaz de reorientar os eixos principais de anisotropia? O trabalho de Kim¹⁵, embora não tenha este propósito, mostra resultados experimentais que permitem determinar este parâmetro de memória.

3.2 Endurecimento isotrópico, anisotrópico e efeito Bauschinger

As funções que descrevem a evolução dos patamares de escoamento com as deformações plásticas podem assumir diversos modelos (linear, quadrático, exponencial, ...) bem como graus de complexidade (fazendo referência cruzada entre o patamar de escoamento numa direção com a deformação plástica em outra). De uma forma bastante genérica propõe-se que os patamares de escoamento (que definem os pontos de controle) sejam função da deformação plástica equivalente (ϵ_{eq}^P), do tensor de deformações plásticas ($\underline{\epsilon}^P$) e de um vetor $\underline{\lambda}$ de parâmetros adicionais.

Os eixos principais de anisotropia são determinados pelo tensor de deformações plásticas e os patamares de escoamento:

$$\begin{aligned} t_i &= f\left(\underline{\varepsilon}^P, \varepsilon_{eq}^P, \lambda\right) \\ c_i &= g\left(\underline{\varepsilon}^P, \varepsilon_{eq}^P, \lambda\right) \\ \tau_{ij} &= h\left(\underline{\varepsilon}^P, \varepsilon_{eq}^P, \lambda\right) \end{aligned} \quad (9)$$

Onde t_i , c_i e τ_{ij} são, respectivamente, os patamares de escoamento em tração, compressão e corte nos eixos principais de anisotropia ($i, j = x, y, z$).

Se, num procedimento experimental, verifica-se que o material reorienta suas direções principais de anisotropia com um valor X de deformação plástica, então o tensor de deformações plásticas que desenvolve anisotropia não deve ter módulo maior que X . Assim, todo o instante em que este tensor ultrapassar esse limite o programa deve normalizar o tensor de deformações para apresentar módulo X .

Uma observação importante é de que o tensor de deformação plástica pode “descarregar”, quando o material é submetido à um carregamento reverso. Já o escalar de deformação plástica equivalente cresce de forma monotônica, acumulando a informação relativa à toda a história de plasticidade do ponto. Esse fato faz com que essas duas grandezas não estejam relacionadas, podendo assumir quaisquer valores independentemente uma da outra.

3.3 Modelo linear

Apenas para exemplificar uma das possibilidades de relacionar essas variáveis e descrever o endurecimento isótropo, anisótropo e o efeito Bauschinger, segue abaixo um modelo linear.

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_0 + h_I \varepsilon_{eq}^P + h_A \left| \varepsilon_i^P \right| + h_B \varepsilon_i^P \\ c_i &= \sigma_0 + h_I \varepsilon_{eq}^P + h_A \left| \varepsilon_i^P \right| - h_B \varepsilon_i^P \\ \tau_{ij} &= \sqrt{\frac{t_i t_j}{3}} \end{aligned} \quad (10)$$

Onde:

- t_i é a tensão de escoamento em tração na direção principal de anisotropia ‘i’;
- c_i é a tensão de escoamento em compressão na direção principal de anisotropia ‘i’;
- τ_{ij} é a tensão de escoamento em corte na direção ‘ij’;
- σ_0 é o patamar de escoamento do material virgem;
- h_I é o módulo de encruamento isótropo;
- h_A é o módulo de encruamento anisótropo;

- h_B é o parâmetro do efeito Bauschinger;
- ε_i^P é o autovalor 'i' do tensor de deformação plástica;
- ε_{eq}^P é o escalar de deformação plástica equivalente;

Assim, se $h_I = h_A = h_B = 0$, o material é isotrópico, elásto-plástico perfeito, com tensão de escoamento σ_0 . E a superfície de escoamento pode assumir a forma de Tresca, de von Mises ou uma forma intermediária, dependendo do valor da agressividade escolhido para os polinômios de Hermite. Se somente h_A e h_B são nulos, o material é isotrópico, com endurecimento isotrópico linear dado por h_I . Se somente h_B é nulo, o material apresenta endurecimento isotrópico (h_I) e anisótropo (h_A). Se h_B é nulo os patamares de tração e compressão são idênticos (não há efeito Bauschinger). Se todos os coeficientes de endurecimento são diferentes de zero, o material desenvolve anisotropia com as deformações plásticas, e o efeito Bauschinger é proporcional ao parâmetro h_B .

Outras leis de evolução são possíveis, fazendo inclusive referência cruzada (patamar de escoamento i sofrendo influência da deformação j); a determinação da melhor lei de evolução depende de experimentação.

4 EXEMPLO NUMÉRICO

O exemplo numérico apresentado a seguir visa aproximar os resultados experimentais obtidos por Kim (*op. cit.*). Muito embora o modelo de encruamento empregado neste exemplo seja bastante simples - aquém das potencialidades da formulação proposta - este exemplo foi escolhido para mostrar a mudança de orientação dos eixos principais de anisotropia. Por razões de espaço não é possível apresentar os resultados completos, mas apenas os mais significativos.

Kim realizou baterias de ensaios de tração simples em chapas de aço de baixo carbono, utilizada pela indústria automotiva, em duas etapas de deformação plástica: a primeira na direção de laminação e a segunda numa direção a 30° com a direção de laminação.

Primeira etapa de deformação (tração na mesma direção de laminação):

- 1) Com o material no estado comercial, foram realizados ensaios de tração (dezenove) com corpos de prova retirados em direções que formam um ângulo α com a direção de laminação (α varia de 0° à 180° com passo 10°). Com essa etapa se obtém a curva "como recebido" da figura 5.
- 2) O material foi deformado em tração simples na direção de laminação até 3% de deformação plástica equivalente e, após, foram repetidos os 19 ensaios do passo 1 para obtenção da curva "3% de deformação" da figura 5;
- 3) O material foi deformado em tração simples na direção de laminação até 6% de deformação plástica equivalente e, após, foram repetidos os 19 ensaios do passo 1 para obtenção da curva "6% de deformação" da figura 5;

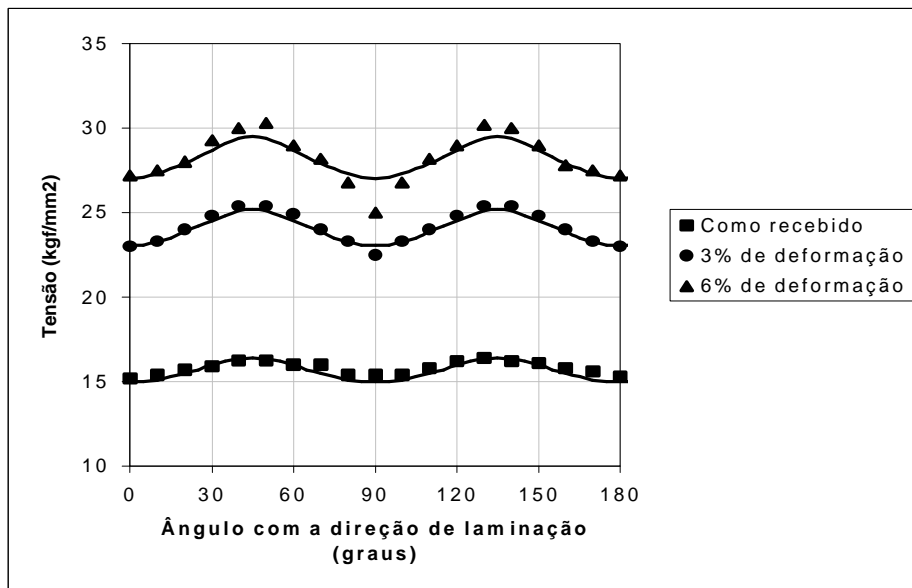


Fig. 5 – Distribuição da tensão de escoamento em tração em função do ângulo com a direção de laminação. Os pontos representam os resultados experimentais e a linha o resultado simulado. As deformações de 3% e 6% foram feitas na direção de laminação.

Segunda etapa da deformação (tração a 30° com a direção de laminação):

- 1) O material no estado de 3% de deformação plástica (passo 2 da primeira etapa) foi submetido à deformação de 1%, 2%, 5% e 10% numa direção inclinada 30° com a direção de laminação;
- 2) Para cada passo de deformação (1, 2, 5 e 10%) repetiram-se os 19 ensaios para obtenção das curvas da figura 6.

As funções de endurecimento utilizadas são:

$$t_i = c_i = 15 + 50 \epsilon_{eq}^{0.52} \quad \tau_{ij} = 1.13 \sqrt{\frac{t_i t_j}{3}} \quad (14)$$

As condições iniciais da chapa são desconhecidas. Os experimentos de Kim não são suficientes para determinar essas condições de forma única. Abaixo segue um conjunto de parâmetros, utilizados na simulação, que torna possível ajustar os resultados experimentais.

$$\epsilon^P = \begin{bmatrix} 0.0284 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0426 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0710 \end{bmatrix} \quad \epsilon_{eq}^P = 0 \quad (15)$$

O parâmetro de memória utilizado foi $X = 0,71$. Como mencionado anteriormente, não há

necessidade de haver correspondência entre o tensor de deformações plásticas e o escalar de deformação plástica equivalente. Os resultados experimentais (obtidos por Kim) e numéricos (obtidos com a formulação proposta neste trabalho) são apresentados nas figuras 5, 6 e 7.

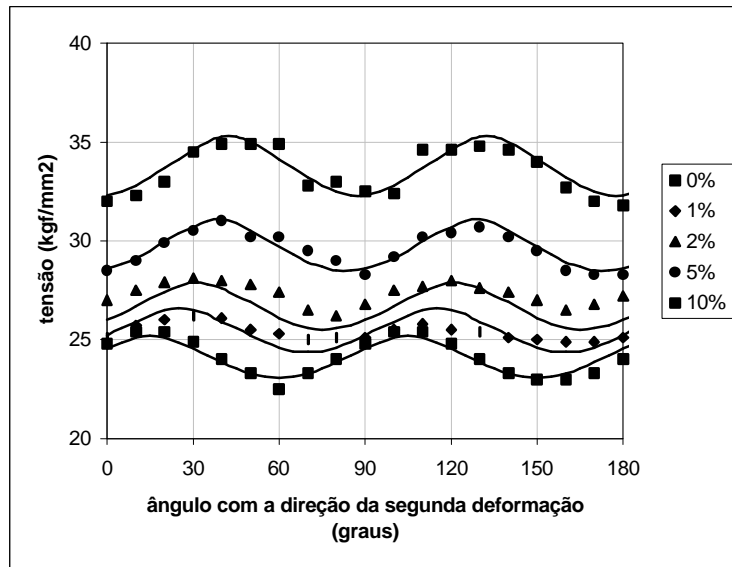


Fig. 6 – Distribuição da tensão de escoamento em tração em função do ângulo com a segunda direção de deformação (30° com a direção de laminação).

Os pontos representam os resultados experimentais e a linha o resultado simulado.

A curva de 0% corresponde à curva de 3% de deformação da fig. 5, defasada de 30°. As deformações de 1%, 2%, 5% e 10% foram feitas a 30° com a direção de laminação.

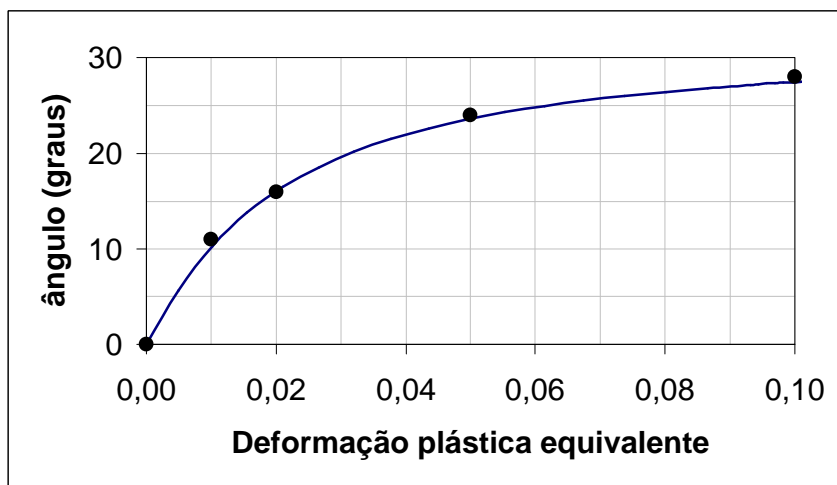


Fig. 7 – Rotação dos eixos principais de anisotropia em função da segunda deformação.

Os pontos representam os resultados experimentais (1%, 2%, 5% e 10%) e a linha o resultado simulado.

5 CONCLUSÕES

O modelo apresentado permite representar o comportamento de materiais elastoplásticos com anisotropia gerada por deformação, incluindo a rotação dos eixos principais de anisotropia. Uma versão reduzida do modelo mostrou-se suficiente para aproximar resultados experimentais da literatura.

Dentro dos aspectos computacionais, a maior dificuldade reside na necessidade de integrar o tensor de deformações plásticas ao longo da história de deformação, com um custo significativo associado ao cálculo dos autovalores e autovetores deste tensor (para determinação dos eixos principais de anisotropia).

6 AGRADECIMENTO

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Pró-Reitoria de Pesquisa (PROPESC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) pelo apoio financeiro.

7 REFERÊNCIAS

- [1] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, (1950).
- [2] F. Barlat and J. Lian, “Plastic Behavior and Stretchability of Sheet Metals. Part 1: A Yield Function for Orthotropic Sheets Under Plane Stress Conditions”, *Int. J. Plasticity*, **5**, 51 (1989).
- [3] R. Hill, “Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals”, *J. Mech. Phys. Solids*, **38**, 405-417 (1990).
- [4] A. M. Habraken, “Modeling the plastic anisotropy of metals by finite element method”, Thèse de l’Enseignement Supérieur, ... (2001)
- [5] W. Prager, “A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids”, *J. Appl. Mech.*, **23**, 493-496 (1956).
- [6] H. Ziegler, “A modification of Prager’s hardening rule”, *Quart. Appl. Math.*, **17**, 55-65 (1959).
- [7] P. G. Hodge, “A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids”, *J. Appl. Mech.*, **24**, 482-483 (1957).
- [8] J. F. Besseling, “A theory of elastic, plastic and creep deformation of an initially isotropic material showing strain hardening, creep recovery and secondary creep”, *J. Appl. Mech.*, **25**, 529 (1958).
- [9] Z. Mroz, “On the description of anisotropic workhardening”, *J. Mech. Phys. Solids*, **15**, 163-175 (1967).
- [10] J. Huétink, A. H. Streppel and P. T. Vreede, “Development and experimental verification of constitutive equations for anisotropic sheet metal”, *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, Proceedings of the fourth international conference held in Barcelona, Spain, 3-6 April 1995, Owen and Onate Eds, Pineridge Press.

- [11] A. A. Ilyushin, “On the relation between stresses and small strains in the mechanics of continua”, (in russian) *Prikl Mat. Mech.*, **18**, 641-666 (1954) – cited by T. Kurtyka and M. Zyczkowski, “Evolution equations for distortional plastic hardening”, *Int. J. Plasticity*, **12**, 191-213 (1996).
- [12] W. C. Moss, “On instabilities in large deformation simple shear loading”, *Comp. Meth. In Appl. Mech. and Eng.*, **46**, 329-338 (1984).
- [13] D. J. Peric, D. J. R. Owen and M. E. Honnor, “A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strain: computational issues”, *Comp. Meth. In Appl. Mech. and Eng.*, **94**, 35-61 (1992).
- [14] A. F. Marcon, E. Bittencourt and G. J. Creus, “On the integration of stresses in large deformation plasticity”, *Eng. Computation.*, **16 (1)**, 49-69 (1999).
- [15] K. H. Kim and J. J. Yin, “Evolution of anisotropy under plane stress”, *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, 841-851 (1997).