

## ANÁLISIS COMPUTACIONAL DEL MECANISMO DE RESPUESTA DE PERNOS ANCLADOS EN HORMIGÓN

María H. Peralta<sup>(1)</sup>, José G. Etse<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Area Estructuras, Facultad de Ingeniería Universidad Nacional del Centro de la Pcia.de Bs. As.  
Avda. del Valle 5737- B7400JWI-Olavarría-Bs.As. Argentina. Tel: 02284-451055-Interno 274.  
email:mperalta@fio.unicen.edu.ar

<sup>(2)</sup> Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería. Facultad de Ciencias Exactas y  
Tecnología Universidad Nac. de Tucumán. Independencia 1800, 4000 Tucumán- Argentina

**Palabras claves:** hormigón, modelo constitutivo, pullout test

**Resumen.** *Numerosos estudios llevados a cabo muestran la alta complejidad del comportamiento de falla de los sistemas constituidos por pernos anclados en materiales cohesivos, sometidos a tracción. Los estudios computacionales desarrollados han demostrado la necesidad de utilizar modelos constitutivos que sean capaces de reproducir las fuertes variaciones que caracterizan el comportamiento de respuesta cuando son excitados por los complejos estados tensionales que se desarrollan en los ensayos de extracción de pernos anclados. Asimismo, han demostrado la influencia relevante de las condiciones de borde, de carga y geométricas del problema.*

*En el presente trabajo se estudian las predicciones que brindan modelos constitutivos elastoplásticos del mecanismo de respuesta de pernos anclados en hormigón, utilizados para evaluar la resistencia del hormigón a través del análisis computacional de la configuración del Pull-out Test. Los resultados obtenidos, mediante aplicación de modelos independientes y dependientes del primer invariante de tensiones, demuestran la significativa influencia del efecto cohesivo-friccional incorporado por la presencia de la presión en los criterios de máxima resistencia, tanto en la ductilidad como en el mecanismo de falla del ensayo.*

## 1 INTRODUCCION

Los sistemas de pernos anclados en hormigón se presentan con asiduidad en la práctica de la Ingeniería Estructural, tal es el caso de sistemas prefabricados, construcciones nucleares, sistemas de amarre contraviento, fundaciones de máquinas, fundaciones de estructuras, elementos no estructurales colgantes, anclajes, uniones de componentes de viviendas y de estructuras prefabricadas, reparación y refuerzo de estructuras existentes, etc. Particularmente, en la evaluación de estructuras de hormigón se utilizan como método no destructivo para determinar in situ la resistencia del hormigón.

A pesar de los innumerables ejemplos de pernos anclados en materiales cohesivos sometidos a tracción no se logró hasta el presente un conocimiento acabado o un criterio unificado, sobre el mecanismo de comportamiento y falla de los mismos bajo cargas estáticas o dinámicas. La falta de dicha unicidad de criterios se observa, además, en las discusiones referentes al tipo de resistencia del hormigón que efectivamente se mide con el ensayo de pernos anclados en hormigón: la de tracción, la de compresión, o la de corte y a la influencia de parámetros geométricos del sistema en la ductilidad y capacidad del *Pull-out Test*. Dada la gran utilidad, el estudio del comportamiento de falla de pernos anclados en hormigón se constituye en uno de los temas de actualidad, sobre todo en lo referente a la determinación precisa de la carga última de diseño.

Desde el punto de vista numérico es difícil establecer el modelo más adecuado para el estudio del comportamiento de pernos anclados en hormigón. La adopción de dicho modelo o teoría constitutiva ha sido y es motivo de muchas investigaciones analíticas, numéricas y experimentales. Esto se debe a que el complejo estado de tensiones y la tortuosa respuesta de falla del sistema, particularizado en el presente trabajo al *Ensayo de Extracción o Pull-Out Test*, requiere de formulaciones materiales capaces de brindar predicciones realistas para estados tensionales que cubran todo el espectro de situaciones posibles, incluyendo estados tridimensionales de tracción y compresión combinadas. Por lo tanto, resulta dificultoso definir una formulación constitutiva que brinde soluciones precisas y de igual confiabilidad en los fuertemente heterogéneos estados tensionales que genera el ensayo. Esta limitación se ha visto reflejada en las conclusiones de publicaciones de RILEM<sup>1</sup> y de otras entidades científicas que indican falta de consenso en cuanto a la teoría material más eficiente para el estudio de este tipo de ensayos.

En el presente trabajo se estudian las predicciones que brindan modelos constitutivos elastoplásticos del mecanismo de respuesta de pernos anclados en hormigón a través del análisis que brinda la configuración del *Pull-Out Test* indicado en Figura 1.

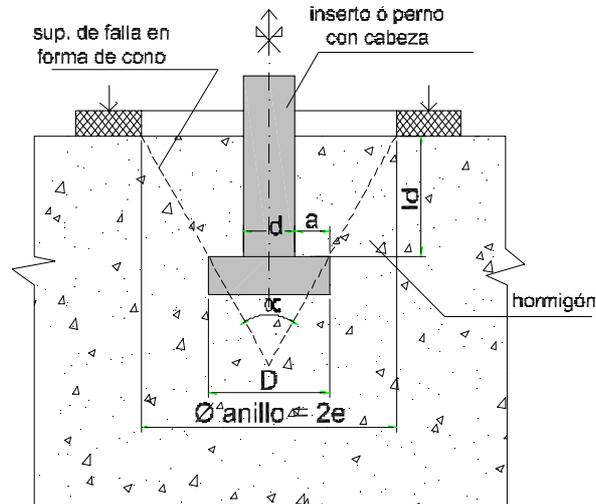


Figura 1: Configuración del Pull-out Test

## 2 MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTOPLÁSTICOS<sup>2,3</sup>

El concepto de plasticidad fue aplicado inicialmente para metales, demostrándose que su rotura no está influenciada por la presión hidrostática o que la misma es despreciable. Esta importante conclusión llevó a la formulación de los criterios de fluencia o de plasticidad independientes del primer invariante de tensiones, tales como los criterios de Tresca y Von Mises.

En los últimos años el término geomateriales es muy utilizado para materiales como suelos, rocas y hormigón. Estos materiales tienen en común y, en contraste con los metales, una gran sensibilidad en su comportamiento a la presión media, presentando distinta resistencia a tracción y compresión. No obstante esta característica común existen diferencias entre suelos, por un lado, y rocas y hormigones, por el otro. Los suelos sufren, usualmente, grandes deformaciones cortantes y es para ellos que se utiliza la denominación de "plásticos". Rocas y hormigones, por otro lado, son materiales frágiles, excepto bajo alta compresión triaxial. Sin embargo, a pesar de que clásicamente se denomina material frágil a aquellos que rompen inmediatamente después de alcanzar el límite elástico, algunas rocas y hormigones pueden desarrollar deformaciones inelásticas significativamente mayores que las deformaciones elásticas<sup>4</sup>.

Los hormigones, morteros y algunas rocas pueden desarrollar deformaciones permanentes que comparadas con las deformaciones elásticas son significativas. Estas deformaciones permanentes se deben a distintos mecanismos pudiendo mencionarse, como muy importante, la apertura y cierre de fisuras.

Los criterios de plasticidad dependientes de la tensión media, muy útiles en el caso de

rocas, suelos y hormigones tuvieron su origen en la teoría de rotura de Mohr. Dicha teoría indica que la falla ocurre sobre un plano de un cuerpo cuando las tensiones de corte y normales llegan a una combinación crítica que puede indicarse por la función  $\tau = \pm g(\sigma)$ . Esta ecuación representa un par de curvas en el plano de Mohr, de tal manera que un estado de tensiones determinado por los tres círculos de Mohr es seguro si los tres círculos se encuentran dentro de las curvas llegándose a un estado crítico cuando uno de los tres es tangente a las mismas. Estas curvas son las envolventes de los círculos de Mohr representantes de la falla y son llamadas, por lo tanto, envolventes de falla de Mohr. Otro criterio dependiente de la tensión media es el de Drucker Prager.

A continuación se describen los criterios de Von Mises y Drucker Prager que se utilizan posteriormente en el análisis numérico del *Pull-Out Test*.

## 2.1 Criterio de Von Mises o teoría de la energía de distorsión

Aunque es Von Mises quien lo hace conocido al criterio, en realidad éste es de Huber, Levy, Hencky.

Esta condición afirma que la deformación plástica comienza cuando el segundo invariante del desviador de tensiones ( $II_{\Sigma D}$ ) alcanza un valor crítico ( $C_Y$ ). Matemáticamente, la condición plástica de Von Mises establece que

$$II_{\Sigma D} = C_Y \quad (1)$$

que escrita en función de las tensiones principales ( $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ ) es

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6C_Y \quad (2)$$

respecto al límite elástico a tracción uniaxial ( $\sigma_Y$ ), se prueba fácilmente que la ecuación (2) da lugar a

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma_Y^2 \quad (3)$$

En relación con el valor del límite elástico a corte puro  $k$ , la condición de Von Mises indicada en (3) aparece en la forma

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6k^2 \quad (4)$$

donde  $k$ : representa la máxima resistencia de corte que se obtiene del ensayo de corte puro. En dicho estado tensional no se activan tensiones principales y sólo se activan tensiones fuera de la diagonal principal.

La representación deviatorica del criterio de Von Mises está dada por un círculo como se indica en Figura 2. En la misma figura se indica la representación deviatorica del criterio de Tresca.

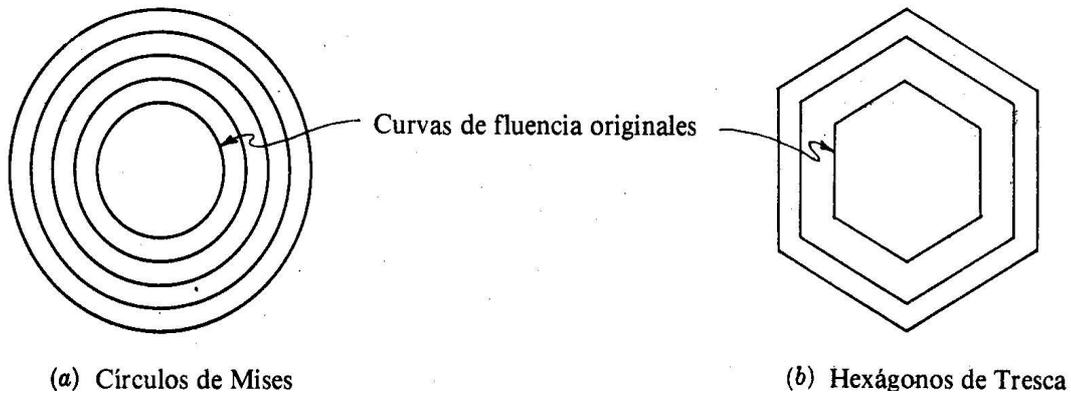
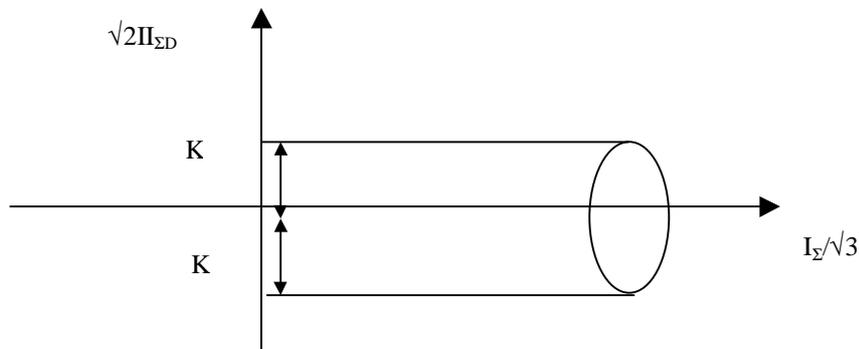


Figura 2: Representación deviatorica de los criterios de Von Mises y Tresca

Computacionalmente es más fácil trabajar con un círculo que con un hexágono. Los criterios de Tresca y Von Mises coinciden en los vértices del hexágono pero no en los puntos intermedios, esta diferencia aparece por la influencia en el segundo invariante del desviador de tensiones de la tensión normal intermedia. Ensayos realizados en metales han demostrado que esa tensión intermedia tiene influencia, entonces el criterio de Von Mises es más preciso para representar la falla en metales que el de Tresca.

En Figura 3 se indica la representación hidrostática del criterio de Von Mises, el cual no depende del primer invariante ( $I_1$ ), razón por la cual no es adecuado para materiales



cohesivos.

Figura 3: Representación hidrostática del criterio de Von Mises

## 2.2 Criterio de Drucker-Prager

La condición de fluencia de Drucker-Prager, a diferencia del criterio de Von Mises considera la dependencia del primer invariante de tensiones. La formulación del criterio de Drucker-Prager es

$$F = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} I_{\Sigma} + \Pi_{\Sigma}^{1/2} - \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} = 0 \quad (5)$$

donde  $c$  y  $\phi$  son cohesión y ángulo de fricción interna del material respectivamente. Llamando

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} I_{\Sigma} \quad (6)$$

y

$$\kappa = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (7)$$

entonces el criterio puede expresarse de la forma

$$\alpha I_{\Sigma} + \Pi_{\Sigma}^{1/2} - \kappa = 0 \quad (8)$$

La representación deviatorica del criterio de Drucker Prager es un círculo al igual que la representación de Von Mises.

La influencia del primer invariante que diferencia ambos criterios, se traduce en la forma de la representación hidrostática que en el caso del criterio de Drucker-Prager indica crecimiento del segundo invariante del desviador de tensiones ( $II_{\Sigma D}$ ) con el incremento de la presión hidrostática.

La representación en el espacio de tensiones principales es un cono recto como se indica en Figura 4. En la misma figura, a modo de comparación, se muestra la representación del criterio de Mohr Coulomb.

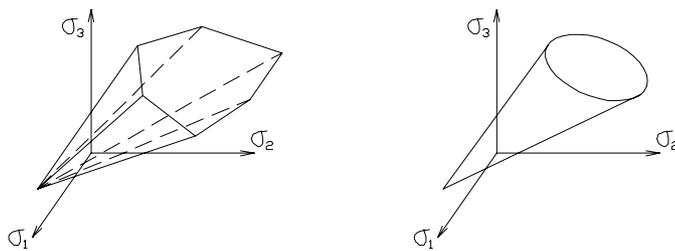


Figura 3: Representación, en el espacio de tensiones principales, del criterio de fluencia de Mohr Coulomb y Drucker Prager.

### 3 ANÁLISIS NUMÉRICO

Se analizan a continuación las predicciones que brindan los modelos constitutivos elastoplásticos de Von Mises y Drucker-Prager del mecanismo de respuesta del pull-out test. El análisis indicado se efectúa considerando la influencia de la geometría de la configuración del sistema a través de la variación de los parámetros  $a$  (ancho del ala de la cabeza del perno) y  $e$  (radio interno del anillo reactivo) indicados en Figura 1.

El análisis numérico, se realiza a través del uso del software ALGOR<sup>5</sup> e involucra modelos con idealización material elastoplástica considerando la teoría de Drucker Prager y Von Mises con endurecimiento de deformación isotrópico, flujo asociado y plasticidad perfecta<sup>6</sup>. A fin de analizar la capacidad de estas teorías para predecir el mecanismo de falla del sistema en estudio, y la influencia de la geometría del sistema y de la resistencia del hormigón sobre dicho mecanismo, se obtiene la curva carga-desplazamiento, la cual informará la carga última y el tipo de comportamiento para cada caso.

El análisis, en todos los casos, se realiza con control de desplazamientos, aplicando la acción directamente al hormigón desde el perno lo cual se ha materializado de acuerdo a lo indicado en la Figura 4.

En Figura 5 se muestra la geometría y discretización correspondiente al Modelo 1 (primera geometría analizada) consistente en 192 elementos y 226 puntos nodales. Se utiliza el elemento sólido elástico 2D, de 4 u 8 nodos con dos grados de libertad traslacionales por nodo, formulado en el plano yz. Las variaciones de geometría analizadas se corresponden a un incremento en el ancho del ala de la cabeza del perno ( $a$ ) del 50% en Modelos 3 y 4 respecto de 1 y 2, por un lado, y a una variación en el diámetro del anillo reactivo ( $2e$ ) de 300 mm (Mod. 1 y Mod. 3); 450 mm (Mod. 2 y Mod. 4) y 150 mm (Mod. 5).

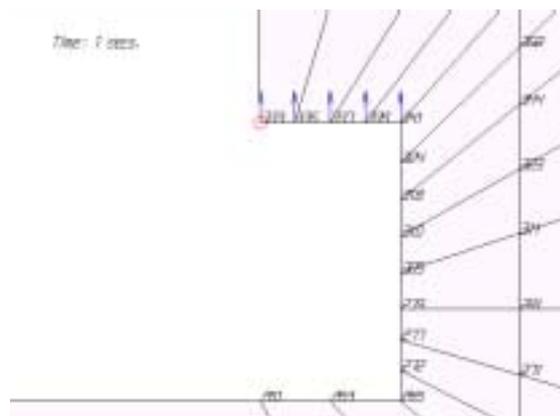


Figura 4: Materialización de la acción sobre el hormigón

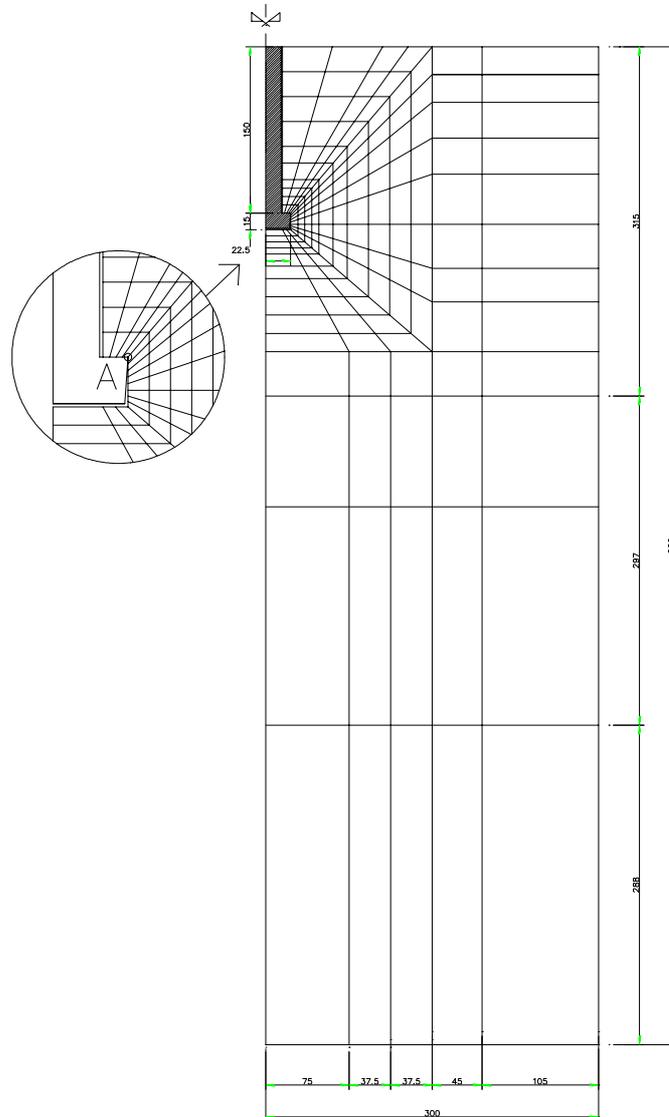


Figura 5: Geometría y malla de elementos finitos correspondiente a Modelo 1

Las características materiales consideradas, en cada uno de los casos son las que se indican a continuación, a través de la curva de respuesta del modelo para carga uniaxial, siendo los parámetros internos (elásticos y elastoplásticos) considerados

### **Modelo de Von Mises**

La curva de respuesta se representa en Tabla 1 y Figura 6, mientras que los parámetros internos considerados en el modelo son

$E=30$  GPa

$\nu=0.2$

$\sigma_c=30$  MPa (tensión límite plástico o tensión de comparación)

$\sigma_{le}= 10$  MPa (tensión límite elástico)

Tabla 1: Valores  $\sigma$ -E de la curva de respuesta  $\sigma$ - $\epsilon$  del modelo de Von Mises

Datos de los segmentos de la curva de respuesta $\sigma$ - $\epsilon$ del modelo de Von Mises		
	Tensiones [MPa]	Modulo de Elasticidad [Gpa]
1	10	30
2	15	20
3	20	15
4	25	10
5	30	0

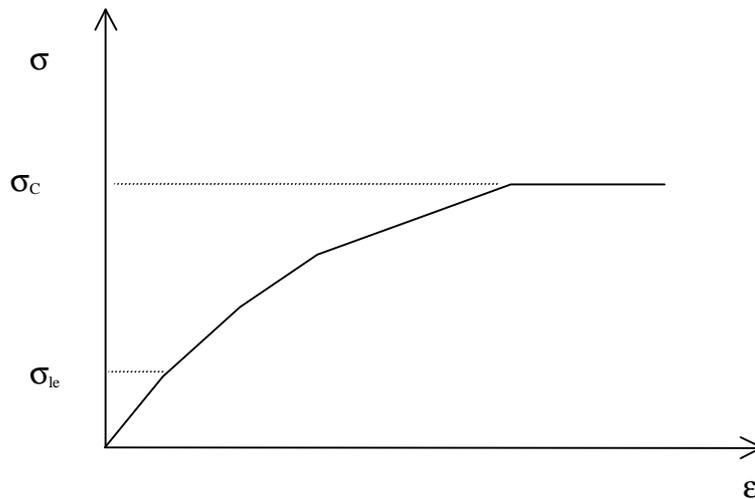


Figura 6: Curva de respuesta del modelo de Von Mises para carga uniaxial

### **Modelo de Drucker Prager**

$E = 30$  GPa

$\nu = 0.2$

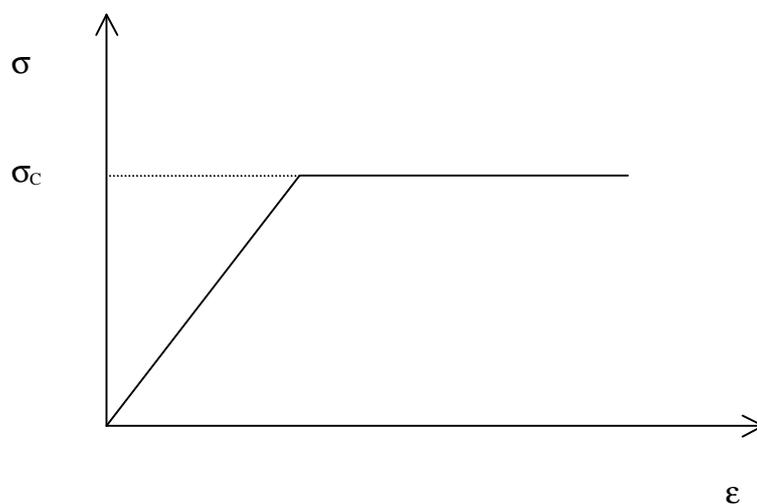
$f'c = 30$  MPa

$f't = 3$  MPa

$c = 8$  MPa (cohesión)

$\phi = 37^\circ$  (ángulo de fricción interna)

$\sigma_c = c / \text{tg } \phi = 10,6$  MPa

Figura 7: Curva de respuesta  $\sigma$ - $\epsilon$  del modelo Drucker Prager para carga uniaxial

#### 4 RESULTADOS OBTENIDOS

En Tablas 2 y 3 se indican los resultados en términos de carga última, obtenida como sumatoria de las reacciones nodales correspondientes a los desplazamientos aplicados. Asimismo, se indica el desplazamiento máximo sobre la cabeza del perno, correspondiente al punto A de Figura 5, para cada uno de los modelos analizados siguiendo los modelos de Von Mises y Drucker Prager para los estados axialsimétrico y plano de tensiones.

Tabla 2: Carga última y desplazamiento máximo correspondiente a los problemas Axialsimétricos

Modelo	e/a [mm/mm]	Von Mises		Drucker Prager	
		Pu [kN]	$\delta$ [mm]	Pu [kN]	$\delta$ [mm]
Modelo 1	150/7.5	20	0.032	108	0.370
Modelo 2	225/7.5	241	0.060	561	0.410
Modelo 3	150/11.25	473	0.055	1380	0.257
Modelo 4	225/11.25	550	0.100	1410	0.310
Modelo 5	75/11.25	12	0.020	80.3	0.200

Tabla 3: Carga última y desplazamiento máximo correspondiente a los problemas en estado Plano de Tensiones

Modelo	e/a [mm/mm]	Von Mises		Drucker Prager	
		Pu [kN]	$\delta$ [mm]	Pu [kN]	$\delta$ [mm]
Modelo 1	150/7.5	0.240	0.060	0.329	0.218
Modelo 2	225/7.5	0.310	0.030	0.359	0.143
Modelo 3	150/11.25	0.250	0.030	0.410	0.168
Modelo 4	225/11.25	0.320	0.096	0.450	0.170
Modelo 5	75/11.25	0.173	0.020	0.395	0.300

En Figuras 8a, 8b, 9a y 9b se presentan las curvas carga-desplazamiento correspondientes a los modelos de Drucker Prager y Von Mises en estado axialsimétrico y plano de tensiones, respectivamente.

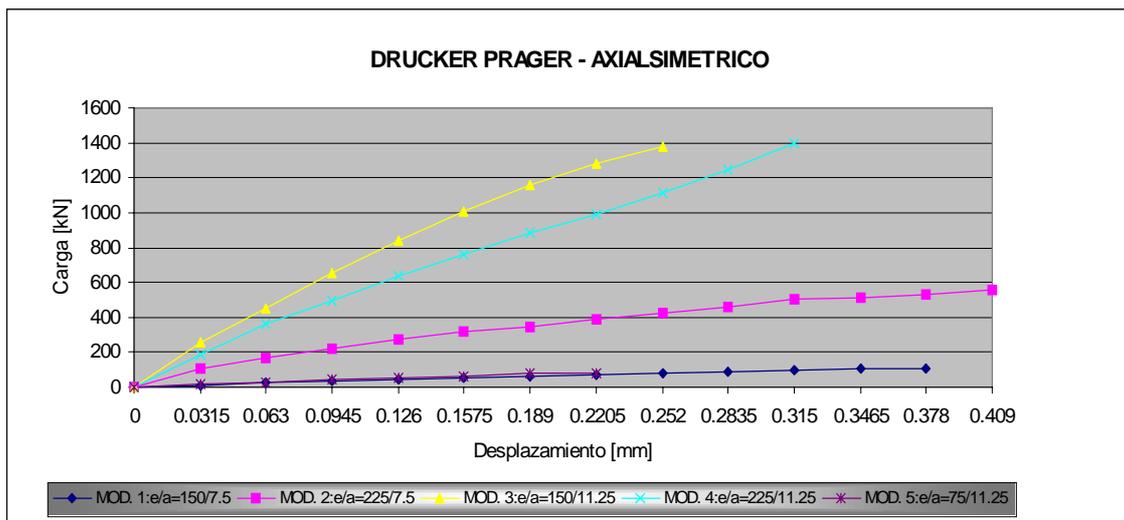


Figura 8a: Comportamiento carga-desplazamiento del modelo Drucker Prager en estado axialsimétrico

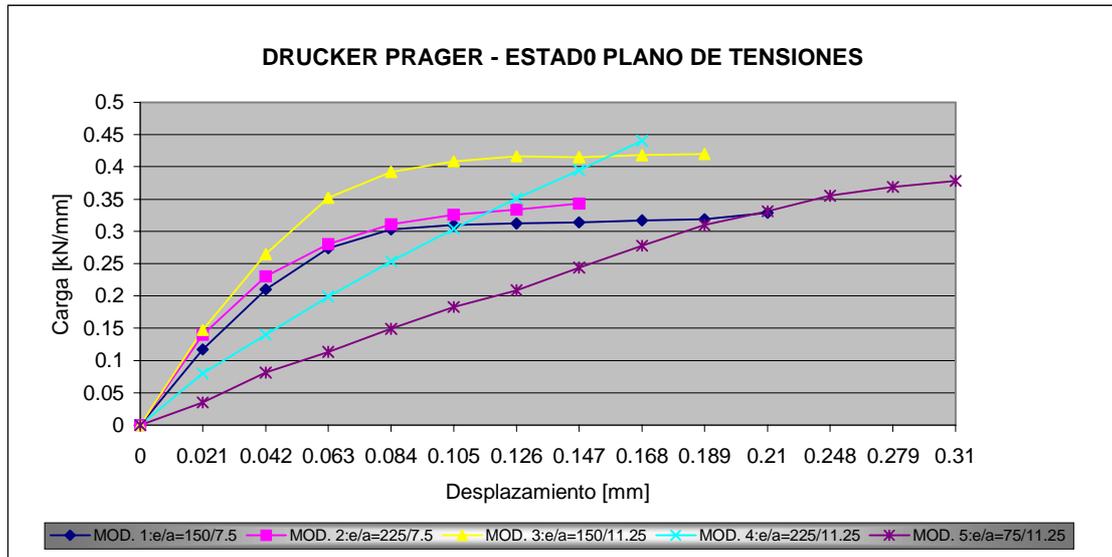


Figura 8b: Comportamiento carga-desplazamiento del modelo Drucker Prager en estado plano de tensiones

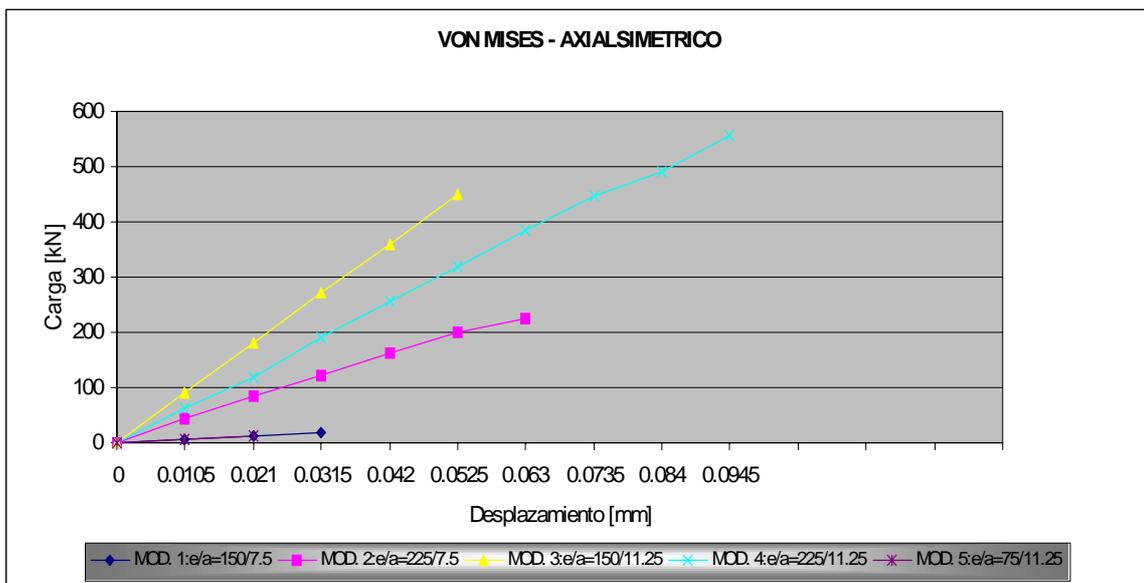


Figura 9a: Comportamiento carga-desplazamiento del modelo Von Mises en estado axialsimétrico

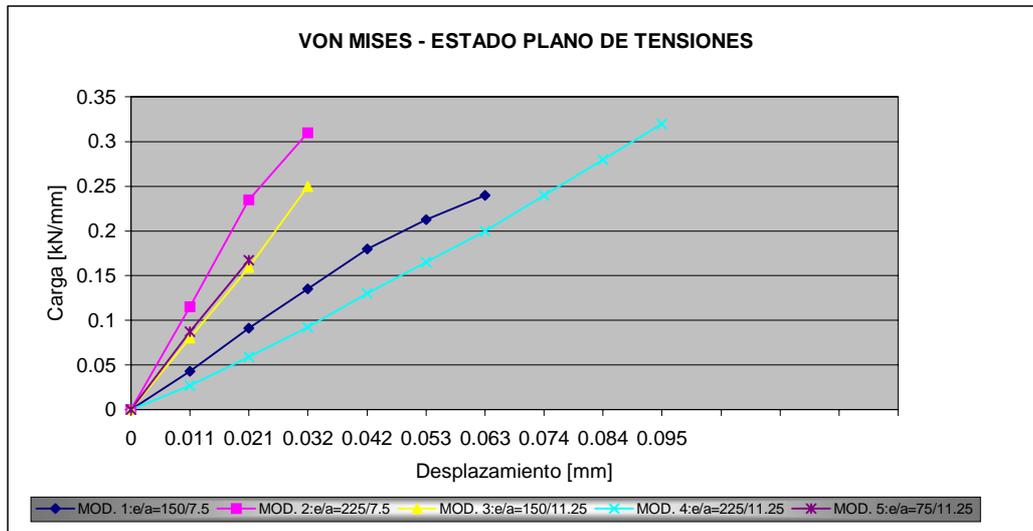


Figura 9b: Comportamiento carga-desplazamiento del modelo Von Mises en estado plano de tensiones

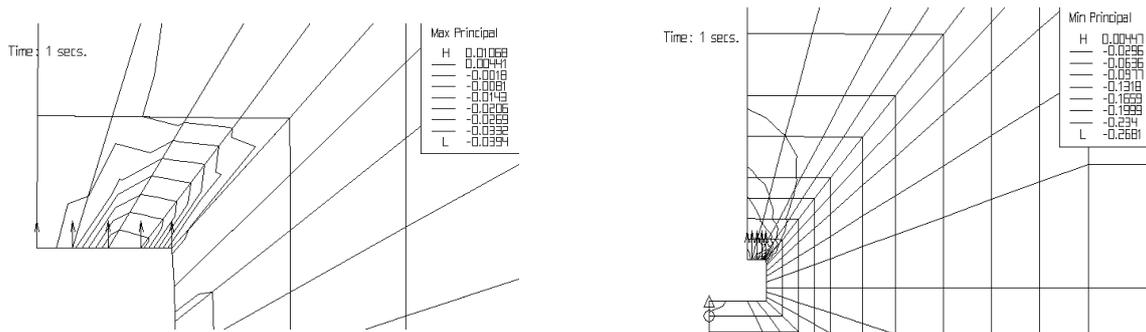


Figura 10: Distribución de Tensiones máximas y mínimas principales en Modelo 1 según Drucker Prager

## 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las diferencias en los resultados expresados en las Tablas 2, .3 y Figuras 8 a y b y 9 a y b, indican la sensibilidad del sistema a la variación de los parámetros geométricos estudiados, de acuerdo con lo demostrado por los resultados de RILEM TC-90 FMA<sup>1</sup>. Se observa que, al aumentar el radio del anillo reactivo ( $e$ ) y al aumentar el ancho del ala de la cabeza del perno ( $a$ ) la carga última se incrementa en todos los casos, siendo este incremento mucho más significativo en los problemas axialsimétricos que en los problemas bajo estado plano de tensiones.

Asimismo, se visualiza en Figura 10 la aparición de tensiones máximas principales de compresión en la cabeza del perno, las que sumadas a las tensiones mínimas principales también de compresión son responsables de la elevada tensión de confinamiento del hormigón en este sector con el consecuente incremento de la ductilidad global del sistema. Esto coincide con lo demostrado en el estudio realizado según referencia 4.

Los resultados del presente trabajo mostraron claramente que el modelo de Drucker Prager conlleva a tensiones de compresión, sobre la cabeza del perno, significativamente mayores a las correspondientes al modelo de Von Mises. Esto es consecuencia de la dependencia de la resistencia pico en la presión hidrostática que define el criterio de Drucker Prager, contrariamente al de Von Mises.

La capacidad de carga de los modelos de Drucker Prager es claramente mayor que la capacidad de carga de los modelos de Von Mises, tal lo observado en los resultados de las Tablas 2, 3 y en las curvas carga-desplazamiento indicadas en Figuras 8 a y b y 9 a y b. Esto se debe a la dependencia del primer invariante de tensiones del criterio de Drucker Prager.

En las Figuras 8 a y b y 9 a y b se visualiza la ductilidad del sistema a través de una paulatina caída de rigidez hasta alcanzar la carga última. Esta ductilidad depende del comportamiento de deformación del hormigón ubicado sobre la cabeza del perno y por lo tanto de la calidad del mismo.

El análisis anterior convalida la dependencia directa de la carga última de la resistencia del hormigón indicada por estudios numéricos y experimentales relevados<sup>7, 8</sup>. Por otro lado, la validación de los resultados obtenidos con los relevados de la bibliografía, permite concluir que de los modelos analizados, el Modelo 1 con la modelación material de Drucker Prager en estado axialsimétrico es el que mejor reproduce el comportamiento del sistema en estudio<sup>10</sup>.

## 6 CONCLUSIONES

Considerando que en las zonas donde se ha superado la tensión de tracción admisible del hormigón se ha iniciado la fisuración, las isolíneas de tensiones muestran que el desarrollo de las fisuras comienza en el vértice del hormigón vecino a la cabeza del perno propagándose en la dirección del apoyo en total coincidencia con las conclusiones de otros autores.

Las predicciones elastoplásticas permitieron vislumbrar adecuadamente el mecanismo de falla a través de la formación de un cono de extracción.

De la comparación de los resultados obtenidos con los modelos de Von Mises y de Drucker Prager se concluye que la consideración de teorías constitutivas con criterios de falla dependientes del primer invariante de tensiones (presión hidrostática), como el criterio de Drucker Prager, es de fundamental importancia para la predicción realista del comportamiento del *Ensayo de Extracción* en virtud de la fuerte heterogeneidad de estados tensionales que se generan en el mismo con marcada presencia de zonas altamente comprimidas. Esto conlleva a un comportamiento marcadamente dúctil que de ninguna manera puede predecirse mediante criterios de resistencia independientes de la presión de confinamiento como el criterio de Von Mises.

Los resultados, en el presente trabajo, permiten indicar que la influencia de la variación de los parámetros geométricos  $a$  y  $e$  es de fundamental importancia en el comportamiento de deformación o ductilidad del sistema. Esta influencia es más notable en los modelos axialsimétricos que en los modelos en estado plano de tensiones.

El análisis de la influencia de la geometría permite indicar que es recomendable, en los sistemas de pernos anclados representativos del *Pull-Out Test* o *Ensayo de Extracción* en

hormigón, la utilización de relaciones  $2e/d \geq 2$  a fin de lograr una adecuada correlación de la carga última del ensayo con la resistencia del hormigón, en un todo de acuerdo con la recomendación que en este sentido da ASTM C 900<sup>9</sup>.

Los análisis realizados permiten indicar que el parámetro geométrico  $a$ , correspondiente al ala del perno, influye en la ductilidad del ensayo y en la carga última resultante.

La influencia de la resistencia a compresión del hormigón en el comportamiento de deformación y en la carga límite es decisiva en todos los casos analizados.

## 7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] RILEM TC-90 FMA Fracture Mechanics of Concrete-Applications. Preliminary Report-. "Round-Robin Analysis of Anchor Bolts" (1991)
- [2] Lubliner J., "Plasticity Theory" Macmillan Publishing Company -New York.Collier Macmillan Publishers-London. (1990)
- [3] Desai, Chandrakant S.-Siriwardane, Hema J "Constitutive Laws For Engineering Materials" With Emphasis on Geologic Materials. Editorial Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1984)
- [4] Sfer, Etse, Danesi "Estudio Experimental de la Fractura de Hormigón Bajo Estados Triaxiales" XVI Jornadas de Ingeniería Estructural. AIE (1998).
- [5] ALGOR Software. Versión 2000 y sus correspondientes manuales. Pittsburgh. USA
- [6] Constantine Spyrakos, John Raftoyiannis "Linear and non linear finite element analysis in engineering practice" Algor, Inc. Publishing División Pittsburgh, PA (1997)
- [7] ETSE G., "Finite element analysis of failure response behavior of anchor bolts in concrete" Nuclear Engineering and Design 179. Pág. 249-252 (1998)
- [8] WALTHER, SUTTON AND MEINHEIT, "Evaluation of Expansion Anchor Ultimate Tensile Capacity Prediction Equations" Anchors in Concrete-Desing and Behavior SP 130-1, reporte de ACI Committee 355 (1991).
- [9] ASTM C 900 "Standard Test Method for Pullout strength of hardened concrete"(1993)
- [10] Peralta, María H. "Análisis Computacional del Mecanismo de Respuesta de Pernos Anclados en Hormigón" Tesis de Magister en Tecnología y Construcciones de Hormigón. Fac. de Ingeniería. UNCPBA. (2002)