

FRECUENCIAS NATURALES DE PLACAS CUADRANGULARES

Patricia M. Bellés^{*}, José L. Pombo[†] y Walter Tuckart[†]

^{*} Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur.
Comisión de Investigaciones Científicas (CIC) de la Provincia de Buenos Aires.
Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina.
e-mail: pbelles@criba.edu.ar

[†] Departamento de Ingeniería, Laboratorio de Vibraciones Mecánicas, Universidad Nacional del Sur.
Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina.
e-mail: wtuckart@criba.edu.ar

Palabras clave: Vibraciones mecánicas, métodos numéricos.

Resumen. *Se analiza el comportamiento dinámico de placas de forma cuadrangular arbitraria utilizando el Método del Elemento Completo (MEC).*

El MEC es un método variacional directo que requiere proponer un funcional adecuado, el cual es extremado mediante secuencias minimizantes apropiadas. Con el método empleado se obtienen soluciones analíticas teóricamente exactas y con precisión numérica prefijada de las frecuencias, lo cual significa una contribución original en este tema en el que los bordes empotrados constituyen una dificultad particular. Se estudia la vibración de una placa cuadrangular con sus cuatro bordes empotrados. Las frecuencias naturales de la placa se determinan además en forma experimental con modelos construidos y ensayados en el Laboratorio de Vibraciones Mecánicas del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur. También se comparan los resultados obtenidos con los del Método de Elementos Finitos (MEF).

1 INTRODUCCIÓN

El empleo de diversos métodos analíticos y numéricos ha dado respuesta a una gran cantidad de problemas de placas que pueden presentarse en el diseño de estructuras en ingeniería. Sin embargo, la solución analítica clásica de problemas de vibración de placas empotradas está limitada a un reducido número de casos en su aplicación práctica. El objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento dinámico de placas empotradas de forma cuadrangular arbitraria utilizando una solución generalizada denominada MEC.

El MEC es un método variacional directo que requiere proponer un funcional adecuado el cual será extremado mediante secuencias minimizantes apropiadas. Con el método empleado se obtienen soluciones analíticas teóricamente exactas y con precisión numérica especificada de frecuencias que significan una contribución original en este tema en el que los bordes empotrados constituyen una dificultad particular.

Las frecuencias de una placa de forma cuadrangular con sus cuatro bordes empotrados fueron calculadas con el MEC y se compararon con los resultados experimentales obtenidos a partir de modelos experimentales de la placa construidos y ensayados en el Laboratorio de Vibraciones Mecánicas del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur. También se presentan los valores de las frecuencias y modos de vibración respectivos, obtenidos con el Método de Elementos Finitos (MEF). La concordancia de los resultados analíticos, numéricos y experimentales es altamente satisfactoria.

2 MEC: CONCEPTOS TEORICOS

El MEC es un método variacional fundado en teoremas y corolarios² que no se incluyen en este trabajo. Consiste básicamente en extremar un funcional adecuado que está expresado en función de secuencias extremantes apropiadas. Dentro de la amplia gama de problemas diferenciales que pueden resolverse con el MEC, han sido estudiados en particular diversos problemas con condiciones iniciales y de borde^{1,2,3,4}. Las series utilizadas son de convergencia uniforme, al menos para las funciones esenciales (son aquellas que involucran derivadas de orden $\leq (k-1)$, si $2k$ es el mayor orden de derivación de la ecuación diferencial). Los resultados pueden ser hallados con precisión fijada. Esto es, se fija un número de dígitos deseados y la cantidad de términos en las secuencias se incrementa hasta que esa precisión es alcanzada.

2.1 Transformación de coordenadas

La aplicación del MEC se basa en la propuesta de series trigonométricas extendidas de convergencia uniforme en dominios unitarios. En este caso, dado que el dominio es de forma arbitraria, se requiere una transformación adecuada del sistema de coordenadas y en consecuencia, al funcional gobernante se lo deberá modificar apropiadamente.

Es sencillo introducir variables adimensionales que transforman el cuadrilátero genérico de la Figura (1-a) en el cuadrado de lado unitario de la Figura (1-b). Esto significa pasar del sistema original de coordenadas (x^*, y^*) al nuevo sistema local (X, Y) .

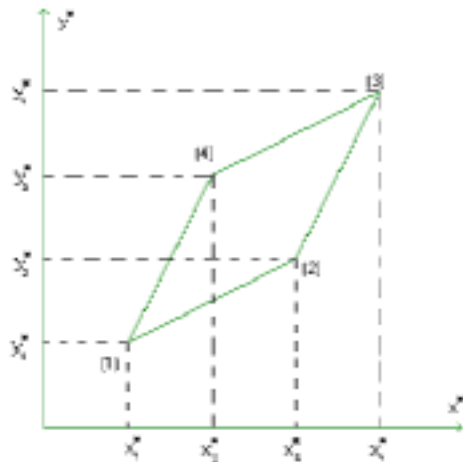


Figura (1-a)

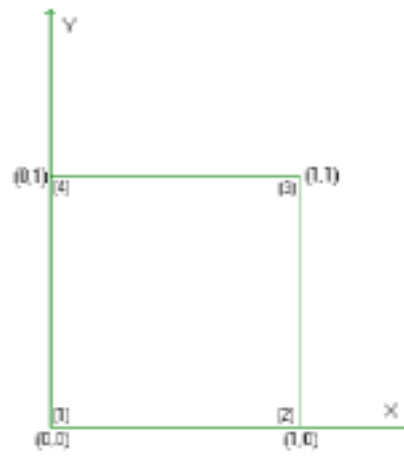


Figura (1-b)

Se emplean funciones de interpolación geométrica del tipo polinómico para transformar la geometría del cuadrilátero de vértices (1, 2, 3, 4). La notación genérica es:

$$N_i(X, Y) = \beta_{i1} + \beta_{i2}X + \beta_{i3}Y + \beta_{i4}XY \quad (1)$$

donde β_{ij} son constantes a determinar ($i, j=1, 2, 3, 4$).

Debido a la transformación, las coordenadas (x^*, y^*) se pueden escribir:

$$x^* = \sum_{i=1}^4 N_i(X, Y)x_i^* \quad , \quad y^* = \sum_{i=1}^4 N_i(X, Y)y_i^* \quad (2)$$

Las cuatro funciones de forma resultan:

$$N_1(X, Y) = 1 - X - Y + XY = (1 - X)(1 - Y)$$

$$N_2(X, Y) = X - XY = X(1 - Y)$$

$$N_3(X, Y) = XY$$

$$N_4(X, Y) = Y - XY = Y(1 - X)$$

que cumplen con la condición: $N_1(X, Y) + N_2(X, Y) + N_3(X, Y) + N_4(X, Y) = 1$

En el dominio de integración original de la placa cuadrangular, con ejes de referencia (x^*, y^*) , llamaremos: A^* al área y $dA^* = dx^* dy^*$ al diferencial de área. En el dominio transformado unitario los ejes de referencia son (X, Y) , el área es A y el diferencial de área es dA . Se verifica:

$$\iint_{A^*} dA^* = \iint_A dA = \iint_A |J| dXdY \quad (3)$$

donde: $|J| = \frac{\partial x^*}{\partial X} \frac{\partial y^*}{\partial Y} - \frac{\partial x^*}{\partial Y} \frac{\partial y^*}{\partial X} = ad - cb$ es el jacobiano de la transformación.

Siendo:

$$a \equiv a(Y) = \frac{\partial x^*}{\partial X} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial X} x_i^* = (Y-1)(x_1^* - x_2^*) + Y(x_3^* - x_4^*)$$

$$b \equiv b(Y) = \frac{\partial y^*}{\partial X} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial X} y_i^* = (Y-1)(y_1^* - y_2^*) + Y(y_3^* - y_4^*)$$

$$c \equiv c(X) = \frac{\partial x^*}{\partial Y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial Y} x_i^* = (X-1)(x_1^* - x_2^*) + X(x_3^* - x_4^*)$$

$$d \equiv d(X) = \frac{\partial y^*}{\partial Y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial Y} y_i^* = (X-1)(y_1^* - y_2^*) + X(y_3^* - y_4^*)$$

2.2 Aplicación del MEC

El funcional adimensional correspondiente a las vibraciones libres de una placa apoyada es:

$$F^*(w) = \iint_A \left(w'' + \ddot{w} \right)^2 dx^* dy^* - \Omega^2 \iint_A w^2 dx^* dy^* \quad (4)$$

donde $w = w(x^*, y^*)$ es el desplazamiento transversal. Se define el parámetro adimensional de

frecuencia $\Omega \equiv a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega$ donde ω es la frecuencia angular, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ la rigidez

flexional, ρ la densidad del material, ν es el coeficiente de Poisson, h el espesor y a es la longitud del lado mayor del menor rectángulo que inscribe a la placa.

La notación empleada para las derivadas es:

$$s' \equiv \frac{\partial s}{\partial x^*}; s'' \equiv \frac{\partial^2 s}{\partial x^{*2}}; \dot{s} \equiv \frac{\partial k}{\partial y^*}; \ddot{s} \equiv \frac{\partial^2 k}{\partial y^{*2}}$$

Como consecuencia de la transformación, se obtiene el nuevo funcional modificado. El propósito que se persigue con este trabajo no es exponer en detalle el procedimiento algebraico el cual, sin embargo, se describirá sintéticamente a continuación:

- Se expresan w'' y \ddot{w} en función de $w, w_X, w_Y, w_{XX}, w_{YY}, w_{XY}$ que son el desplazamiento transversal w y sus derivadas con respecto a las nuevas coordenadas (X, Y) .
- El nuevo funcional resulta entonces de la forma:

$$F(w) = \int_0^1 \int_0^1 \left(w_{XY} V_1 + w_X V_2 + w_Y V_3 - w_{YY} V_4 + w_{XX} V_5 \right)^2 |J| dXdY - \Omega^2 \int_0^1 \int_0^1 w^2 |J| dXdY \quad (5)$$

donde V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 son, en general, funciones de (X, Y) .

- Se impone la condición de extremo mediante la minimización del funcional, o sea:

$$\delta F(w) = 0 \tag{6}$$

que se escribe:

$$2 \delta F(w) = \int_0^1 \int_0^1 (w_{XY} V_1 + w_X V_2 + w_Y V_3 - w_{YY} V_4 + w_{XX} V_5) (\delta w_{XY} V_1 + \delta w_X V_2 + \delta w_Y V_3 - \delta w_{YY} V_4 + \delta w_{XX} V_5) |J| dXdY - \Omega^2 \int_0^1 \int_0^1 w \delta w |J| dXdY = 0 \tag{7}$$

- Se efectúan los productos indicados en (7).
- Luego se introduce la secuencia extremante para el desplazamiento transversal de la placa. La serie propuesta es:

$$w \equiv w_{MN} (X, Y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} s_i s_j \tag{8}$$

donde $s_i = \text{sen}(\beta_i X)$; $s_j = \text{sen}(\gamma_j Y)$; $\beta_i = i\pi$; $\gamma_j = j\pi$.

- Reemplazando (8) y sus derivadas en (7), se obtiene la suma de 26 términos.

- Identificaremos los términos (integrales) con la notación: T_1, T_2, \dots, T_{26} :

$$T_1 = \int_0^1 \int_0^1 (w_{XY} V_1) (\delta w_{XY} V_1) |J| dXdY \tag{a}$$

...

$$T_{26} = -\Omega^2 \int_0^1 \int_0^1 w \delta w |J| dXdY \tag{b}$$

Por razones de espacio analizaremos solamente el primer término (T_1). Comenzamos introduciendo las series (8) y sus derivadas en (9-a):

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^1 \int_0^1 (\delta w_{XY} w_{XY} V_1^2) |J| dXdY = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \delta A_{ij} \alpha_i \beta_j c_i c_j \right) \left(\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \alpha_p \beta_q A_{pq} c_p c_q \right) V_1^2 \right] |J| dXdY = \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \delta A_{ij} \left\{ \alpha_i \beta_j \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \alpha_p \beta_q A_{pq} \int_0^1 \int_0^1 c_i c_j c_p c_q V_1^2 |J| dXdY \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \delta A_{ij} \left\{ \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} \underbrace{\left(\alpha_i \beta_j \alpha_p \beta_q \int_0^1 \int_0^1 c_i c_j c_p c_q V_1^2 |J| dXdY \right)}_{I_1} \right\} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \delta A_{ij} \left\{ \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} I_1 \right\} \tag{10} \end{aligned}$$

Donde I_1 depende de i, j, p, q . Para cada (i, j) tendremos:

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} I_1 = 0 \quad (11)$$

Considerando ahora todos los términos (son 26), resulta:

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} [(I_1 + I_2 + \dots + I_{25}) - \Omega^2 I_{26}] = 0 \quad (12)$$

Luego se efectúan las integraciones en el dominio unitario, obteniéndose finalmente:

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} [\phi_{1(i,j,p,q)} - \Omega^2 \phi_{2(i,j,p,q)}] = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M A_{pq} \phi_{(i,j,p,q)} = 0 \quad (13)$$

Donde $\phi_{1(i,j,p,q)} = I_1 + I_2 + \dots + I_{25}$, $\phi_{2(i,j,p,q)} = I_{26}$, y $\phi_{(i,j,p,q)} = [\phi_{1(i,j,p,q)} - \Omega^2 \phi_{2(i,j,p,q)}]$

La (13) puede expresarse con notación matricial de la forma:

$$\{A\}^T [\phi] \{A\} = 0 \quad (14)$$

donde:

$\{A\}$ es el vector de las incógnitas del MEC de dimensión (M^2) .

$[\phi] = [\phi_1] - \Omega^2 [\phi_2]$ es la matriz de dimensiones $(M^2 \times M^2)$, es función de la frecuencia.

2.3 Condiciones de borde

El paso siguiente consiste en aplicar las condiciones de borde (CB) de empotramiento. En las aplicaciones anteriores del MEC se han utilizado con este fin multiplicadores de Lagrange. En el presente trabajo, el procedimiento que se utilizará es análogo al empleado en el cálculo matricial de estructuras por el método de rigidez; cada grado de libertad fijado por una condición de vínculo se elimina del sistema de ecuaciones, reduciendo el número de incógnitas a un número igual al de movimientos nodales efectivos⁵.

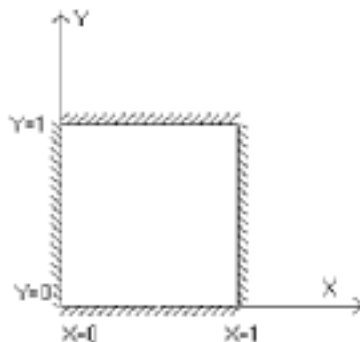


Figura 2: placa con bordes empotrados.

Consideremos la placa con sus cuatro bordes empotrados, como se indica en la Figura 2. Las CB que deben aplicarse a la placa empotrada son ocho. Las cuatro que imponen desplazamiento nulo ($w = 0$) en los cuatro bordes se cumplen automáticamente por las series adoptadas. Deben aplicarse las cuatro condiciones de giro nulo: $w_X = 0$ en $Y = 0$, $Y = 1$ y $w_Y = 0$ en $X = 0$, $X = 1$. Dichas CB se expresan por medio del siguiente sistema de ecuaciones de $4M$ ecuaciones con M^2 incógnitas:

$$I) \sum_{i=1}^M \alpha_i A_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M) \Rightarrow \alpha_1 A_{1j} + \alpha_2 A_{2j} + \dots + \alpha_M A_{Mj} = 0$$

$$II) \sum_{j=1}^M \alpha_j A_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M) \Rightarrow \alpha_1 A_{i1} + \alpha_2 A_{i2} + \dots + \alpha_M A_{iM} = 0$$

$$III) \sum_{i=1}^M (-1)^i \alpha_i A_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M) \Rightarrow -\alpha_1 A_{1j} + \alpha_2 A_{2j} + \dots + (-1)^M \alpha_M A_{Mj} = 0$$

$$IV) \sum_{j=1}^M (-1)^j \alpha_j A_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M) \Rightarrow -\alpha_1 A_{i1} + \alpha_2 A_{i2} + \dots + (-1)^M \alpha_M A_{iM} = 0$$

Estas $4M$ ecuaciones no son linealmente independientes, ya que 4 de ellas son combinación lineal de las demás. Por lo tanto hay $(4M-4)$ ecuaciones independientes. De éstas se pueden despejar $(4M-4)$ incógnitas, reduciéndose el número total de incógnitas de acuerdo con la ecuación:

$$(M-2)^2 = M^2 - (4M-4) \quad (15)$$

Por lo tanto la reducción conduce a un sistema homogéneo de orden $(M-2)^2$ que permite resolver el problema de la placa empotrada en sus cuatro bordes.

Como es sabido, el estudio de las vibraciones naturales conduce a un problema de valores propios. En este caso, los autovalores son Ω_i , proporcionales a la frecuencias naturales. Dichos autovalores son obtenidos en el presente trabajo mediante la técnica de iteración inversa.

3. ENSAYO EXPERIMENTAL

Los resultados experimentales de las frecuencias naturales y modos de vibración se obtuvieron a partir de dos modelos de la placa.

El modelo (A) es una placa de acero 1.6 mm de espesor. Propiedades del material: densidad=7855 kg/m³, módulo de elasticidad=1.9995e11 N/m² y coeficiente de Poisson: 0.29.

El modelo (B) consiste en una placa de acrílico, también conocido como polimetilmetacrilato (PMMA) de 2.4 mm de espesor. Propiedades del material: densidad=1190 kg/m³, módulo de elasticidad=3.2e9 N/m² y coeficiente de Poisson: 0.40.

La geometría original de la placa cuadrangular estudiada, de acuerdo con el esquema indicado en la Figura 1-a, está dada por las coordenadas de sus cuatro vértices:

Nudo	1	2	3	4
x*	0	4	5	1
y*	0	1	4	2

Los modelos experimentales fueron construidos a escala y en ambos casos el empotramiento de los bordes se materializó con dos marcos (inferior y superior) de gran rigidez que se fijaron entre sí mediante bulones.

Los modelos fueron excitados mediante técnicas apropiadas para provocar vibraciones libres y forzadas. Para producir la vibración libre, se aplican impactos de duración adecuada y se obtiene como respuesta un movimiento vibratorio que resulta de la combinación de las distintas frecuencias naturales. La señal analógica proveniente del sensor de proximidad es digitalizada y la separación de las distintas frecuencias se efectúa mediante análisis espectral y transformada rápida de Fourier (FFT).

Para provocar las vibraciones forzadas en una determinada frecuencia, se utilizaron: un oscilador, un amplificador y un parlante. Éste se coloca muy cerca de la placa, para lograr una excitación forzada de amplitud suficiente para ser medida con los sensores de proximidad. La técnica se basa en obtener la máxima amplitud de vibración para cada frecuencia. Comparando señales de excitación y de respuesta, se observan cambios de fase de 180° entre las frecuencias anteriores y posteriores a la estudiada. Una vez identificadas las frecuencias naturales se determinó la ubicación de las líneas nodales. Para ello se mantiene la excitación forzada en correspondencia con cada frecuencia, desplazando el sensor de medición para comparar fase y amplitud de la respuesta con la de excitación. Se utilizó la técnica de las figuras de Lissajous en un osciloscopio.

4. RESULTADOS ANALÍTICOS, NUMÉRICOS Y EXPERIMENTALES

4.1 Frecuencias naturales: resultados.

Los resultados de frecuencias que se presentan en esta sección corresponden al modelo (B) consistente en la placa de acrílico que se describió en 3.

En la Tabla 1 se muestran los valores del parámetro adimensional de frecuencia $\Omega = a^2 \sqrt{\frac{\rho}{D}} \omega$ obtenidos con MEC y experimentalmente. También se comparan con los resultados correspondientes a un modelo de elementos finitos.

Los valores de la Tabla 1 corresponden a las cinco primeras frecuencias naturales de vibración de la placa con bordes empotrados. El detalle de la información volcada en la tabla es el siguiente: en la 1° columna se indica el número de modo; en la 2° columna los resultados obtenidos con el MEC utilizando 50 términos en las series; en la 3° se muestran los resultados experimentales y la 4° muestra la diferencia porcentual entre resultados experimentales vs. MEC. En la 5° columna pueden verse los resultados del MEF utilizando el módulo de cálculo para análisis lineal de Algor. El modelo de elementos finitos consta de 2500 elementostipo

placa. La 6ª columna muestra la diferencia porcentual entre resultados MEF vs. MEC.

Tabla 1. Parámetro adimensional de frecuencias(5 primeros modos)

Modo	MEC	Experimental	D%	MEF	D%
1º	157.3534	148.2664	-5.77	159.4564	+1.34
2º	220.0089	209.8540	-4.62	223.9580	+1.79
3º	305.1043	291.9708	-4.30	307.7960	+0.88
4º	381.2244	369.5255	-3.07	383.7242	+0.66
5º	419.9572	383.2116	-8.75	425.1227	+1.23

4.2 Formas modales: comparación de resultados experimentales y numéricos.

En la Figura 3 se muestran las formas modales correspondientes a los tres primeros modos de vibración, obtenidas en el ensayo experimental realizado con la placa de acero, identificada como modelo (A). En la Figura 4 se muestran las mismas formas modales calculadas con el MEF. Puede observarse una coincidencia muy satisfactoria entre ambos resultados.



Figura 3: Placa de acero: primeros tres modos de vibración.

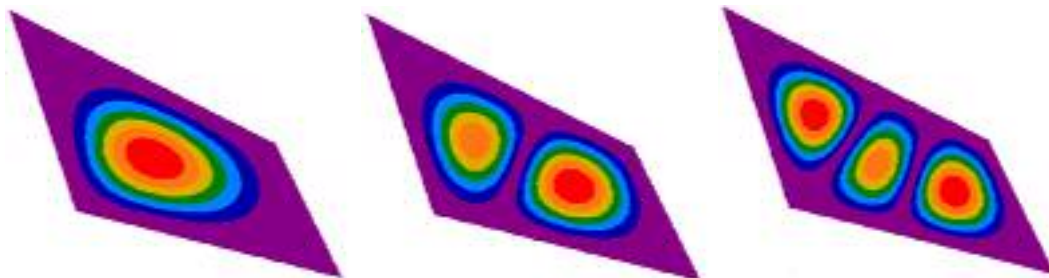


Figura 4: Modos de vibración calculados con el MEF.

Es interesante hacer un breve comentario acerca del procedimiento empleado para reproducir las formas modales. El mismo consiste en distribuir uniformemente sobre la placa algún material (como arena, azúcar, etc.) formado por partículas sueltas y livianas. Se provoca la vibración en una frecuencia natural determinada (con aceleración mayor que 1G). Entonces las partículas saltan alejándose de las zonas con mayores desplazamientos y acumulándose en las zonas donde éstos son menores. De esta forma las partículas se redistribuyen “dibujando”

la forma modal que corresponde a esa frecuencia. Este ensayo presentó algunos inconvenientes cuando se trabajó con la placa de acrílico debido a la carga electrostática que se produce en el transcurso del ensayo. Por tratarse de un material no conductor se dificulta la eliminación de dicha carga y en consecuencia las partículas resultan no se mueven libremente para reproducir las formas modales hasta que no se elimina la carga.

5 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Haciendo un análisis comparativo de los resultados presentados en 4.1, se observa que los parámetros adimensionales de frecuencias calculados utilizando solamente 50 términos en las series del MEC, presentan una diferencia máxima con los resultados del MEF del 1.76 % (en la 2º frecuencia). El elemento placa utilizado en este caso corresponde a la formulación de Veubecke. Es sabido que este tipo de elemento converge de forma monótona y rápida a la solución correcta, aunque más rígida. Puede concluirse que existe una muy buena concordancia entre ambos resultados. También los valores obtenidos experimentalmente resultan satisfactorios dado que la máxima diferencia observada con los valores obtenidos con el MEC es inferior al 9% en la 5º frecuencia, mientras que en los cuatro primeros modos las diferencias son apreciablemente menores.

Como se ha dicho anteriormente, con el método empleado se obtienen soluciones analíticas teóricamente exactas. Esto significa que se fija la precisión deseada a través de un número de dígitos y se incrementa el número de términos de las sumas hasta lograrlo. Esto es posible dado que las series son convergentes, lo cual asegura la obtención de valores con la precisión requerida.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración prestada en la realización de los ensayos de laboratorio por el Sr. Salvador La Malfa, profesional de apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Instituto de Mecánica Aplicada (UNS).

7 REFERENCIAS

- [1] C.P. Filipich, M.B. Rosales, "Beams and arcs exact frequencies via a generalized solution", *Journal of Sound and Vibration* 170, 263-269, 1994.
- [2] M.B. Rosales, *Un método variacional no clásico y su aplicación a estática y dinámica de elementos estructurales*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, B. Blanca, 1997.
- [3] C.P. Filipich, M.B. Rosales, P.M. Bellés, "Natural vibration of rectangular plates considered as tridimensional solids", *Journal of Sound and Vibration* 212, 599-610, 1998.
- [4] C.P. Filipich, M.B. Rosales, "Arbitrary precision frequencies of a free rectangular thin plate", *Journal of Sound and Vibration* 230, 521-539, 2000.
- [5] E. Oñate Ibáñez de Navarra, *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España, 1992.
- [6] ALGOR12 Professional Mech/VE, Linear Stress and Dynamics Reference División. Pittsburg, Pennsylvania, EEUU. Algor Inc., 2000.