Mecánica Computacional Vol. XXII
M. B. Rosales, V. H. Cortínez y D. V. Bambill (Editores)
Bahía Blanca, Argentina, Noviembre 2003.

ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN CÁSCARAS AFINES

Salvador GIGENA [1), 2)], Moisés BINIA [2), 3)], Daniel ABUD [2), 3)]

[1)] Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario
Avda. Pellegrini 250 - 2000 Rosario
e-mail: sgigena@fceia.unr.edu.ar

[2)] Departamento de Matemáticas
Facultad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba
Avda. Velez Sarsfield 299 - 5000 Córdoba
e-mail: dabud@efn.uncor.edu - mbinia@arnet.com.ar

[3)] Departamento de Ciencias Básicas
Facultad. Regional Córdoba - Universidad Tecnológica Nacional
Avda. Vladislao Frias s/n - 5000 Córdoba
e-mail: dabud@efn.uncor.edu

Palabras Clave: Cáscaras afines, grupo afín, relaciones tensión-deformación, equilibrio

Resumen. *En trabajos anteriores hemos definido y utilizado los conceptos de "cáscara afín", "normal unimodular afín" y "geometría afín de superficies". Se establecieron, entre otros conceptos, las condiciones de compatibilidad afín, con fundamento en las condiciones de integrabilidad de la geometría unimodular afín de superficies.*

En el presente artículo, continuando con el desarrollo de la Teoría de Cáscaras Afines, establecemos las ecuaciones de equilibrio de una cáscara sólida en el sentido afín, reduciendo luego estas ecuaciones tridimensionales a las correspondientes ecuaciones bidimensionales en la superficie media, en términos de los invariantes geométricos, unimodulares afines de tal superficie.

El aumento en el número de invariantes proporciona un beneficio que aparece en estas ecuaciones que quedará claramente establecido en los métodos computacionales a desarrollar en un futuro próximo.

INTRODUCCION

En el desarrollo de la teoría clásica euclidiana de cáscaras las ecuaciones de equilibrio tridimensionales, y su posterior reducción a las correspondientes ecuaciones de equilibrio bidimensionales en la superficie media, juegan un papel central y preponderante.

En nuestro artículo previo, referente a las *Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines* [iv], introdujimos el concepto de Cáscara Afín y demostramos, en tales objetos físico-geométricos, las condiciones de compatibilidad en el sentido de la Geometría Afín que, como estableciéramos entonces, está basada en la consideración de los invariantes geométricos bajo la acción del grupo unimodular afín $ASL(3,\mathrm{R})$.

Es el objetivo del presente trabajo demostrar las ecuaciones de equilibrio para Cáscaras Afines. Estas ecuaciones son determinadas analizando la interacción que se produce entre los condicionantes de carácter puramente físico, i.e., la acción de fuerzas o cargas aplicadas a una determinada cáscara en su estado original, y las consecuencias geométricas de tal acción que se traducen en una deformación que, en el presente contexto, consideramos desde el punto de vista afín.

Lo expuesto anteriormente nos llevó a la decisión de mantener, en su parte pertinente, la nomenclatura usada en nuestro artículo anterior [iv]. Sin embargo, también deseamos que el presente artículo sea hasta cierto punto auto-contenido. Por este motivo, y también para beneficio del lector, incluimos una **sección**, la número **1**, con un resumen de la notación empleada en esa ocasión. En la **sección 2** presentamos las ecuaciones de equilibrio tridimensionales, que son elaboradas a partir de la aplicación del Principio de Cauchy, tradicionalmente empleado en el sentido euclidiano ([v], [vi], [vii], [viii], [ix], [x]), en este caso convenientemente adaptado para analizar la *deformación afín* de un elemento de volumen infinitesimal. En la **sección 3**, a partir de la integración de tales ecuaciones de equilibrio a lo largo de las fibras normales afines establecemos las correspondientes ecuaciones bidimensionales.

1. RESUMEN DE NOTACIÓN PARA CÁSCARAS AFINES (*AFFINE SHELLS*) [iv]

Introducimos primeramente las denominadas *coordenadas normales afines* de una cáscara. A tal fin consideramos la superficie media de la cáscara en el sistema no deformado, que denotaremos M_0, parametrizada localmente por una función vectorial, suficientemente diferenciable, expresada por $X_0 : U \to \mathbb{R}^3$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$.

Las coordenadas del dominio son denotadas (u^1, u^2) de tal forma que se puede expresar, localmente,

$$M_0 = X_0(u^1, u^2) \tag{1}$$

donde se supone que X_0 es una inmersión topológica (*embedding* en Inglés).

Las partículas de la cáscara, en el estado original, tienen coordenadas curvilíneas (Lagrangianas) (U^1, U^2, U^3) y las representamos a través de la ecuación

$$X(U^1,U^2,U^3) = X(u^1,u^2,t) = X_t(u^1,u^2) = X_0(u^1,u^2) + tN_{\mathrm{ua}} \quad \text{con} \quad U^3 = t \tag{2}$$

donde hemos extendido, obviamente, la anterior función a $X : U \times (-h,h) \to \mathbb{R}^3$, con $X(u^1,u^2,0) = X_0(u^1,u^2)$ y donde N_{ua} es el vector normal afín a la superficie media.

Denotaremos, en general, con el signo de derivación ∂ seguido de subíndices las derivadas parciales ordinarias sucesivas de las funciones escalares y vectoriales:

$$\frac{\partial g}{\partial u^a} := \partial_a g \quad ; \qquad \frac{\partial f}{\partial U^i} := \partial_i f \quad ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^a \partial u^b} := \partial_{ab} f \ , \tag{3}$$

usando los siguientes rangos indiciales: letras latinas minúsculas serán índices variando entre 1 y 3: $1 \le i, j, k, \ldots \le 3$, esto significa que nos situamos en la cáscara C (considerándola como un volumen); mientras que las minúsculas griegas serán reservadas para denotar una variación entre 1 y 2: $1 \le a, b, g, \ldots \le 2$, i.e.: nos referimos a la superficie media M_0 original y sin deformación o a la superficie media deformada M_0^*.

Recordemos que los invariantes de la geometría unimodular afín se construyen en base a la escogencia, en R^3, de una 3-forma exterior, o función determinante, y que para tal se emplea el símbolo $[\ ,\ ,\ ] = \det =$ determinante, resultando que la unidad de medida es el volumen.

A seguir se define entonces, en la superficie media de la cáscara M_0, la matriz de funciones:

$$h_{ab} = \left[\frac{\partial X_0}{\partial u^1}, \frac{\partial X_0}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial u^a \partial u^b} \right] \tag{4}$$

y se agrega la hipótesis de que la superficie sea no-degenerada, i.e., $H = \det(h_{ab}) \neq 0$, lo que permite definir la nueva matriz

$$g_{ab} = |H|^{-1/4} h_{ab} \tag{5}$$

obteniéndose así la primera forma fundamental unimodular afín representada por

$$I_{ua} = \sum_{a,b} g_{ab}\, du^a du^b \tag{6}$$

que es una estructura pseudoriemanniana, [i], [ii], [iii], [iv], [xi].

La normal unimodular afín se define a seguir a través de la expresión

$$N_{ua} = \tfrac{1}{2} \Delta(X_0) \tag{7}$$

donde Δ es el laplaciano con respecto a la seudo-métrica I_{ua}, i.e.:

$$\Delta X_0 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{a=1}^{2} \frac{\partial}{\partial u^a} \left(\sqrt{|g|} \sum_{b=1}^{2} g^{ab} \frac{\partial X_0}{\partial u^b} \right) \quad \text{con} \quad g = \det\left(g_{ab}\right) \tag{8}$$

Se verifica fácilmente que tal campo vectorial es transversal a la superficie media M_0 y que se obtienen, a partir de todo lo anterior, dos conexiones definidas en la superficie media M_0:

1) La conexión de Levi-Civita con respecto a la pseudométrica I_{ua}: $\tilde{\nabla}$.
2) La conexión *inducida normal afín*, ∇, o sea la proyección de D, la conexión playa natural de R^3 como espacio vectorial, en la dirección de N_{ua}, i.e.:

$$\nabla_Z Y = \operatorname{proy}_{\mathrm{N_{ua}}}\left(D_Z Y\right) \tag{9}$$

donde Z e Y denotan campos vectoriales tangentes a la superficie media M_0.

La *segunda forma* (*cúbica*) *fundamental* unimodular afín se define luego como la derivada covariante normal afín de la primera forma fundamental, i.e. :

$$\nabla\left(I_{ua}\right) := II_{ua} \tag{10}$$

que, en coordenadas locales, se puede representar también por:

$$II_{ua} = \sum_{abg} g_{abg}\, du^a\, du^b\, du^g \tag{11}$$

con los coeficientes g_{abg} totalmente simétricos en sus índices.

La *tercera forma fundamental afín* se introduce a partir de la observación de que las derivadas locales de la normal afín yacen en el espacio tangente a la superficie en cada punto, i.e.,

$$\frac{\partial N_{\mathrm{ua}}}{\partial u^a} = -\sum_b B_a^b \frac{\partial X_0}{\partial u^b} = -B_a^1 \frac{\partial X_0}{\partial u^1} - B_a^2 \frac{\partial X_0}{\partial u^2}\,, \tag{12}$$

lo que permite definir la tercera forma fundamental afín por la expresión:

$$III_{\mathrm{ua}} = B_{ab}\, du^a\, du^b\,, \quad \text{con} \quad B_{ab} = \sum_g g_{ag} B_b^g\,. \tag{13}$$

En cuanto a la construcción de una métrica, o seudo-métrica, en la cáscara recordemos que se realiza a partir de la seudo-métrica de la superficie media I_{ua} representando primeramente los coeficientes métricos, sobre la superficie media M_0 por:

$$g_{ab} = I_{\mathrm{ua}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial u^a}, \frac{\partial X_0}{\partial u^b}\right) \tag{14}$$

Entonces, sobre la cáscara C definimos una estructura seudo-métrica, invariante unimodular afín, que denotaremos por

$$G = \sum_{i,j} G_{ij} dU^i dU^j \tag{15}$$

por medio de las ecuaciones

$$G_{ab} := g_{ab} - 2tB_{ab} + t^2 \sum_l B_a^l B_{bl} \ , \tag{16}$$

$$G_{3a} = G_{a3} = G\left(\frac{\partial X}{\partial U^a}, \frac{\partial X}{\partial U^3} \right) = G\left(X_a, N_{ua} \right) := 0 \, , \tag{17}$$

y

$$G_{33} = G\left(\frac{\partial X}{\partial U^3}, \frac{\partial X}{\partial U^3} \right) = G\left(N_{ua}, N_{ua} \right) := 1 \tag{18}$$

Por otra parte, los objetos geométricos que pertenecen a la cáscara en el estado deformado son denotados con un asterisco superior derecho: $X_0^* : U \to \mathbb{R}^3$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$ representa la parametrización de la superficie media de la cáscara deformada $M_0^* = X_0^*(u^1, u^2)$, y donde el dominio de definición de esta inmersión, $U \subset \mathbb{R}^2$, y sus parámetros, o coordenadas del dominio, (u^1, u^2), son los mismos que para la superficie media de la cáscara en el estado original, previo a la deformación. Para el resto de los objetos se adapta consecuentemente esta notación y ésta, a su vez, nos permite introducir las correspondientes componentes de los tensores diferencia:

$$e_{ij} := \tfrac{1}{2}\left(G_{ij}^* - G_{ij} \right), \qquad s_{abg} := g_{abg}^* - g_{abg} \, , \qquad w_{ab} := B_{ab}^* - B_{ab} \, . \tag{19}$$

2. ECUACIONES DE EQUILIBRIO TRIDIMENSIONALES PARA CÁSCARAS AFINES

Bajo la acción de fuerzas generadas por cargas o solicitaciones genéricas, como saltos térmicos, etc., la cáscara pasa del estado previo a deformación, C, al estado final deformado C^*. Más aún, puesto que bajo esta acción cambia también la seudo-métrica podemos suponer que la acción de estas fuerzas produce un cambio: del espacio seudo-Riemanniano (C, G), i.e., la cáscara C junto con la estructura seudo-Riemanniana G, definida en el parágrafo anterior, al espacio seudo-Riemanniano deformado (C^*, G^*). Entonces, por aplicación del Principio de Tensión de Cauchy, adaptado de su formulación clásica euclidiana al presente caso de un cuerpo dotado de una seudo-métrica, podemos suponer definido un tensor de tensión que denotaremos

$$t = \sum_{i,j} t^{ij} \frac{\partial}{\partial U^i} \otimes \frac{\partial}{\partial U^j} . \tag{20}$$

El análisis infinitesimal del comportamiento de este tipo de tensores permite establecer la propiedad de simetría, i.e., se cumple que

$$t^{ij} = t^{ji} , \tag{21}$$

y las correspondientes componentes mixtas se construyen usando la seudo-métrica no deformada G , i.e.,

$$t_i^{\,j} = t^{jh} G_{hi} , \tag{22}$$

ecuaciones en las que usamos la convención de que cuando aparecen índices repetidos, en una ecuación, debe entenderse que se suman. En lo que sigue haremos un uso extensivo y permanente de tal convención sin necesidad de nuevas aclaraciones, salvo indicación en contrario.

A seguir, a través del análisis de las ecuaciones de movimiento de la cáscara, al pasar del estado original $(\mathcal{C}, G)$ al estado deformado $(\mathcal{C}^{*}, G^{*})$, y puesto que en este último caso se supone que ya no hay fuerzas actuando (estado de equilibrio), se obtienen, en forma totalmente análoga al caso clásico euclidiano, las *ecuaciones de equilibrio*, que en su forma más simple pueden representarse por la ecuación:

$$t^{ij}{}_{,,j} + C^i_{hj} t^{hj} + C^h_{hj} t^{ij} = 0 , \tag{23}$$

donde la doble coma ,, indica derivación covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita de $(\mathcal{C}, G)$, y hemos usado también el Lema 1 de nuestro trabajo anterior, [iv], para obtener la ecuación puesto que, en función de tal resultado, la relación entre las conexiones de Levi-Civita de $(\mathcal{C}, G)$ y $(\mathcal{C}^{*}, G^{*})$ está determinada por la ecuación

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}^{*i}_{jk} = \tilde{\tilde{\Gamma}}^{i}_{jk} + C^i_{jk} , \text{ con } C^i_{jk} = \tfrac{1}{2} \overline{G}^{*ir} \left(G^{*}_{rj,,k} + G^{*}_{rk,,j} - G^{*}_{jk,,r} \right) , \tag{24}$$

siendo $\overline{G}^{*\,ir}$ la matriz inversa de G^{*}_{ir} , $\tilde{\tilde{\Gamma}}^{i}_{jk}$ son las componentes de la conexión de Levi-Civita de G y $\tilde{\tilde{\Gamma}}^{*i}_{jk}$ las correspondientes a G^{*} .

Supondremos también a seguir que el material de la cáscara es homogéneo, isotrópico, perfectamente elástico, lo que permite introducir la función *densidad de energía de deformación*, que representaremos como

$$W = W(s_1, s_2, s_3) \tag{25}$$

donde los símbolos s_i denotan a las funciones simétricas de los autovalores de la matriz de deformación, definida por $e^i_k := G^{is} e_{sk}$, i.e.,

$$s_1 = e^i_i \,, \qquad s_2 = e^i_j e^j_i \,; \qquad s_3 = e^i_j e^j_k e^k_i \,. \tag{26}$$

Entonces, las relaciones de tensión-deformación pueden escribirse en términos de las componentes mixtas del tensor de tensión por medio de la ecuación:

$$t^m_i = \sqrt{\frac{G}{G^*}} \frac{\partial W}{\partial e^i_m} \tag{27}$$

siendo:

$$G = \det(G_{ik}) \qquad ; \qquad G^* = \det(G^*_{ik})\,. \tag{28}$$

Esto permite expresar en forma aún más abreviada y conveniente las ecuaciones de equilibrio (23). En efecto, si introducimos el tensor de *seudo-tensión*:

$$T^m_i := \sqrt{\frac{G^*}{G}} t^m_r G^{*r}_{\ i} - W d^m_i = G^{*r}_{\ i} \frac{\partial W}{\partial e^r_m} - W d^m_i \,, \tag{29}$$

las ecuaciones (23) se escriben en esta notación como

$$T^m_{i,,m} = 0\,. \tag{30}$$

Además, y por otra parte, la *condición de contorno* que prescribe la ausencia de fuerzas actuando en las caras de la cáscara, i.e., $t^{i3} = 0$, para $t = \pm h$, se escribe equivalentemente en términos del tensor de seudo-tensión como

$$T^3_a = 0 \,, \quad T^3_3 = -W \,, \qquad \text{para } \ t = \pm h\,. \tag{31}$$

3. ECUACIONES BIDIMENSIONALES DE EQUILIBRIO

En esta sección vamos a obtener las ecuaciones de equilibrio bidimensionales, a partir de las ecuaciones tridimensionales en su última expresión, (30), usando también las condiciones de contorno (31). Para alcanzar este objetivo procederemos, de forma similar al desarrollo clásico de la Teoría de Cáscaras Euclidianas, integrando las mencionadas ecuaciones a lo largo de las fibras normales afines. Primeramente, usando también propiedades de la función determinante, establecemos la relación entre los elementos de volumen de la cáscara (C, G):

$$dV_G := \sqrt{|G|}\, dU^1 \wedge dU^2 \wedge dU^3 = \left|[\partial_1 X, \partial_2 X, \partial_3 X]\right| dU^1 \wedge dU^2 \wedge dU^3 \qquad (32)$$

y el elemento de área de la superficie media (M_0, g) :

$$dA_g := \sqrt{|g|}\, dU^1 \wedge dU^2 = \left|[\partial_1 X_0, \partial_2 X_0, N_{ua}]\right| dU^1 \wedge dU^2 , \qquad (33)$$

que es, por lo demás y obviamente, una subvariedad seudo-Riemanniana de la primera, en términos de invariantes geométricos de tal superficie. En efecto, empleando las ecuaciones (2) y (12) podemos escribir:

$$\begin{aligned}
[\partial_1 X, \partial_2 X, \partial_3 X] &= [\partial_1 X_0 + t\partial_1 N_{ua}, \partial_2 X_0 + t\partial_2 N_{ua}, N_{ua}] \\
&= \left[\left(1 - tB_1^1\right)\partial_1 X_0 - tB_1^2 \partial_2 X_0, -tB_2^1 \partial_1 X_0 + \left(1 - tB_2^2\right)\partial_2 X_0, N_{ua}\right], \qquad (34) \\
&= \left(1 - 2tH_{ua} + t^2 K_{ua}\right)[\partial_1 X_0, \partial_2 X_0, N_{ua}]
\end{aligned}$$

donde $H_{ua} := \frac{1}{2}\left(B_1^1 + B_2^2\right)$ y $K_{ua} := B_1^1 B_2^2 - B_1^2 B_2^1$ son respectivamente la *curvatura media afín* y la *curvatura de Gauss afín*, de la superficie media no-deformada M_0. En consecuencia, podemos escribir también la relación:

$$\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} = \left|1 - 2tH_{ua} + t^2 K_{ua}\right| . \qquad (35)$$

Corresponde aclarar que el primer miembro de la última ecuación aparecerá repetidamente en lo que sigue, usado en esa notación por razones de brevedad. Sin embargo, siempre se deberá interpretar con el significado que conlleva el miembro derecho.

A seguir, escribimos la ecuación de equilibrio (30) en la forma

$$t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\; T^k_{m,,k} = 0 , \qquad (36)$$

que, por definición de derivada covariante, también podemos expresar como

$$
\begin{aligned}
t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}T^k_{i,,r} &= t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\left(\partial_r T_i^k + T_i^m\tilde{\Gamma}^k_{mk} - T_p^k\tilde{\Gamma}^p_{ik}\right)\\
&= t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\partial_r T_i^k + t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}T_i^m\tilde{\Gamma}^k_{mk} - t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}T_p^k\tilde{\Gamma}^p_{ik} = 0.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Además, por la regla de Leibnitz, también podemos expresar

$$
\partial_r\left(t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}T_i^k\right) = nt^{n-1}d_r^3\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}T_i^k + t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\left(\partial_r\left(\log\sqrt{|G|}\right) - \partial_r\left(\log\sqrt{|g|}\right)\right)T_i^k + t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\partial_r T_i^k\ . \tag{38}
$$

Por otra parte, podemos reducir la expresión del último término en (37), primeramente a:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^p_{ik}T_p^k &= T^{kr}G_{rp}\tilde{\Gamma}^p_{ik}\\
&= T^{kr}G_{rp}\left(\tfrac{1}{2}G^{pl}\left(\partial_k G_{il} + \partial_i G_{lk} - \partial_l G_{ik}\right)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}T^{kr}\left(\partial_k G_{ir} + \partial_i G_{rk} - \partial_r G_{ik}\right)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

y luego, usando las ecuaciones (17) y (18), y también la simetría del tensor de seudo-tensión, obtenemos

$$
\tilde{\Gamma}^p_{ik}T_p^k = \tfrac{1}{2}T^{bg}\partial_i G_{gb}\ . \tag{40}
$$

Entonces, usando (37), (38) y (40), podemos expresar las ecuaciones de equilibrio por

$$
t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\ T^k_{i,,k} = \partial_k\left(t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}T_i^k\right) - t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\left(\frac{n}{t}T_i^3 - \partial_b\left(\log\sqrt{|g|}\right)T_i^b + \tfrac{1}{2}\ T^{bg}\ \partial_i G_{gb}\right) = 0 \tag{41}
$$

A seguir, por integración de la última ecuación a lo largo de las fibras normales afines, obtenemos:

$$
\int_{-h}^{h}\partial_k\left(t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}T_i^k\right)dt = \int_{-h}^{h}t^n\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\left(\frac{n}{t}T_i^3 - \partial_b\left(\log\sqrt{|g|}\right)T_i^b + \tfrac{1}{2}\ T^{bg}\ \partial_i G_{gb}\right)dt \tag{42}
$$

Lo expresado representa un conjunto de tres ecuaciones, por variación del índice libre i. Para reducir estas ecuaciones en términos de invariantes geométricos de la superficie media procederemos a separar dos casos posibles para tal índice libre, i.e., $i = a$ ó $i = 3$.

Además observamos que, usando también en forma apropiada las condiciones de contorno (31), podemos expresar las siguientes igualdades:

$$\int_{-h}^{h} \partial_k \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_i^k \right) dt = \int_{-h}^{h} \partial_b \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_i^b \right) dt + \int_{-h}^{h} \partial_3 \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_i^3 \right) dt =$$
$$= \int_{-h}^{h} \partial_b \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_i^b \right) dt + \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_i^3 \right)(h) - \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_i^3 \right)(-h) , \quad (43)$$

$$\left(\int_{-h}^{h} \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_a^b \right) dt \right)_{,,b} = \partial_b \left(\int_{-h}^{h} \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_a^b \right) dt \right) + \int_{-h}^{h} \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_a^g \tilde{\Gamma}_{bg}^b \right) dt -$$
$$- \int_{-h}^{h} \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_r^b \tilde{\Gamma}_{ab}^r \right) dt , \quad (44)$$

$$\partial_g \left(\log \sqrt{|g|} \right) = \tilde{\Gamma}_{bg}^b , \quad (45)$$

$$\int_{-h}^{h} \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_r^b \right) dt = \int_{-h}^{h} \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T^{bg} \left(g_{rg} - 2tB_{rg} + t^2 \sum_l B_r^s B_{gs} \right) \right) dt \quad (46)$$

$$\int_{-h}^{h} t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} \left(\tfrac{1}{2} T^{bg} \ \partial_a G_{gb} \right) dt = \int_{-h}^{h} t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} \left(\tfrac{1}{2} T^{bg} \ \partial_a \left(g_{gb} - 2tB_{gb} + t^2 \sum_l B_g^s B_{bs} \right) \right) dt \quad (47)$$

$$\left(\int_{-h}^{h} \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_3^b \right) dt \right)_{,,b} = \partial_b \left(\int_{-h}^{h} \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_3^b \right) dt \right) + \int_{-h}^{h} \left(t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} T_3^g \tilde{\Gamma}_{bg}^b \right) dt \quad (48)$$

$$\int_{-h}^{h} t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} \left(\tfrac{1}{2} T^{bg} \ \partial_3 G_{gb} \right) dt = \int_{-h}^{h} t^n \sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|} \left(\tfrac{1}{2} T^{bg} \left(-B_{gb} + tB_g^s B_{bs} \right) \right) dt \quad (49)$$

Entonces, usando también las propiedades de simetría del tensor de seudo-tensión, podemos representar, finalmente, las *ecuaciones bidimensionales de equilibrio* expresadas totalmente en términos de invariantes geométrico-físicos de la superficie media:

Para $i = a$ obtenemos las dos ecuaciones

$$\left(\int_{-h}^{h}\left(t^{n}\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}T_{a}^{b}\right)dt\right)_{,,\,b} = \int_{-h}^{h}\left(t^{n}\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\left(\frac{n}{t}T_{a}^{3} - tB_{bg\;,,\,a}T^{bg} + \frac{1}{2}t^{2}\left(B_{g}^{s}B_{bs}\right)_{,,\,a}T^{bg}\right)\right)dt$$

y, para $i = 3$ la ecuación

$$\left(\int_{-h}^{h}\left(t^{n}\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}T_{3}^{b}\right)dt\right)_{,,\,b} = \int_{-h}^{h}\left(t^{n}\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}\left(\frac{n}{t}T_{3}^{3} - B_{bg}T^{bg} + tB_{g}^{s}B_{bs}T^{bg}\right)\right)dt +$$

$$+\left(t^{n}\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}W\right)(h) - \left(t^{n}\sqrt{\left|\frac{G}{g}\right|}W\right)(-h)$$

Estas son las ecuaciones procuradas como objetivo del presente trabajo.

REFERENCIAS

[i] Gigena, S. *Constant Affine Mean Curvature Hypersurfaces of Decomposable Type,* Proc. of Symp. in Pure Math., American Math. Society, Vol. 54, (1993), Part 3, 289-316

[ii] Gigena, S. *Hypersurface Geometry and Related Invariants in a Real Vector Space,* libro en 4 capítulos, pp. 1-127, (Introduction i-vii), Octubre/1996.

[iii] Gigena, S. *Ordinary Differential Equations in Affine Geometry*, Le Matematiche, Vol. LI, (1996), Fasc.I, 119-151.

[iv] Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D.; *Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines*, Mecánica Computacional, Vol. XXI, (2002), 1862-1881.

[v] Godoy, L.A., Prato, C.A., Flores, F.G., *Introducción a la Teoría de Elasticidad*, 2ª. Edición, Universitas, Editorial Científica Universitaria, Córdoba, 2000.

[vi] John, F. *Refined Interior Equations for Thin Elastic Shells*, Comm. Pure Appl. Math. Nº 24, (1971), 583-615.

[vii] Koiter, W.T. *On the mathematical foundation of shell theory*, ´Proc. Int. Congr. of Mathematics, Nice, 1970, Vol. 3, Paris, (1971), 123-130.

[viii] Love, A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th. edition, Dover, 1944.

[ix] Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, New Jersey, 1969

[x] Mollmann, H. *Introduction to the Theory of Thin Shells*, J. Wiley Sons,1981.

[xi] Nomizu, K.; Sasaki, T.; *Affine Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1994.