

AJUSTE DE PERFILES DE VELOCIDAD PARA FLUJO EN TUBERÍAS

Ricardo A. Prado* y Axel E. Larreteguy†

* Departamento de Mecánica Aplicada,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue
calle Buenos Aires 1400, Q8300BCX Neuquén, Argentina
e-mail: prado@uncoma.edu.ar

† Departamento de Matemática y Métodos Cuantitativos,
Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas, Universidad Argentina de la Empresa
Lima 717, (1073) Buenos Aires, Argentina
e-mail: alarreteguy@uade.edu.ar

Keywords: Tubería, Funciones aproximantes, Perfil de velocidad, Fricción transitoria.

Resumen. *Se presenta un modelo de ajuste para el perfil radial de velocidades axiales en una tubería, basado en el desarrollo en una serie finita de funciones polinómicas e hiperbólicas en la coordenada radial. Este modelo ha sido contrastado con resultados experimentales y analíticos. Los ajustes resultan satisfactorios para modelar tanto flujos transitorios como estacionarios, ya sean en régimen laminar como en régimen turbulento, y particularmente para evaluar la tensión de corte instantánea en la pared, y por lo tanto la fricción, bajo condiciones no estacionarias. Además del valor intrínseco que este ajuste propuesto pudiera tener, el objetivo principal de su desarrollo es continuar el perfeccionamiento de un esquema numérico general para transitorios en tuberías presentado por los autores en trabajos anteriores^{2,3}.*

Abstract. *A finite series composed of polynomic and hiperbolic terms is proposed as a fit for the radial profiles of axial velocities in pipe flows. Comparisons against experimental and numerical results from other authors prove the proposed fit to be a more-than-reasonable approximation for steady or transient and for laminar or turbulent flows. It is particularly adequate for evaluating transient wall shear stresses, and consequently, for evaluating transient friction losses. Besides the value these results may have on its own, the proposed fit is mainly intended to further improve a general numerical scheme for pressure transients in pipe flows presented by the authors in previous papers^{2,3}.*

1 INTRODUCCIÓN

Si bien la resolución de problemas fluidodinámicos admite en muchas oportunidades el empleo de modelos muy simplificados, una sobresimplificación puede conducir a pobres resultados, e inclusive a resultados totalmente reñidos con los observados experimentalmente.

Un ejemplo conocido es el caso de la deficiente representación de los perfiles radiales de velocidad axial de fluido durante transitorios de ondas de presión en tuberías. La modelización inadecuada del alejamiento de estos perfiles con respecto a los correspondientes al flujo estacionario (alejamiento conocido como efecto Richardson) generado por los gradientes alternados de presión, conduce a importantes discrepancias en el cálculo de la tensión viscosa sobre la pared interna de la tubería, tanto en el régimen laminar como en el turbulento.

En un trabajo anterior, fue presentado un modelo de ajuste de perfiles radiales de velocidades axiales para flujo laminar transitorio en conductos basado en una serie de potencias en la coordenada radial. En el presente trabajo, se pretende extender este modelo para poder representar adecuadamente estos perfiles tanto en flujos tubulares estacionarios turbulentos como en flujos inicialmente en reposo y que se ponen en movimiento debido a la llegada de ondas de presión generadas en otro sector de la tubería.

La adecuada representación de los perfiles de velocidad no resulta solamente de interés en los regímenes transitorios, sino que también puede resultar de utilidad bajo condiciones estacionarias, en particular en el régimen turbulento. Mas específicamente, un modelo simple pero más preciso que la típica ley de la potencia $1/n(\text{Re})$ de Nikuradse¹ es necesario para una adecuada representación de las condiciones estacionarias iniciales para un problema de golpe de ariete en régimen turbulento, dado que el modelo de potencias realiza una muy mala representación de la tensión viscosa sobre la pared.

La idea general detrás del modelo propuesto es mantener la posibilidad de simular este tipo de problemas fluidodinámicos como si fueran unidimensionales, pero incorporando mayor información sobre la forma del perfil (supuesto bidimensional y con simetría de revolución), y por ende, acerca de las tensiones actuantes. Esto se lleva a cabo con la inclusión de incógnitas adicionales (velocidades de mayor orden a la denominada velocidad media del flujo) para las cuales se requiere de la aplicación de ecuaciones de gobierno adicionales, las cuales afortunadamente son fácilmente obtenibles y resolubles, como se demuestra en^{2,3}.

Se compararán en este trabajo los resultados obtenidos para los perfiles de velocidad y la tensión de corte en la pared, según sean los casos, con resultados analíticos (flujo tubular con gradientes alternativos senoidales), con aproximaciones numéricas, con resultados provenientes de otros ajustes (como por ejemplo, para la representación instantánea de la tensión en la pared), como así también a resultados experimentales referidos a problemas de golpe de ariete, tanto en régimen laminar como en régimen turbulento, y a perfiles de velocidades medias turbulentas también obtenidos empíricamente.

2 CONSIDERACIONES GENERALES

2.1 Aproximación del perfil de velocidades

En trabajos anteriores^{2,3}, y con la finalidad de lograr una mejor representación de la tensión de corte sobre la pared interna de la tubería bajo condiciones no estacionarias se recurrió a una representación más realista del perfil radial instantáneo de velocidades axiales, el cual variaba, en el caso más general, con la coordenada radial r , la posición longitudinal a lo largo del eje de la tubería, z , y eventualmente, con el tiempo, t .

Para aproximar la variación radial del perfil de velocidad axial en una tubería de radio interno constante, R , se propusieron en ^{2,3} diferentes alternativas de ajuste mediante funciones en la coordenada radial adimensional $\hat{r} = r/R$ tal que presenten pendiente nula (es decir, tensión cortante nula) en el eje de la tubería, o sea en $\hat{r} = 0$, y que verifiquen la condición de no deslizamiento (velocidad relativa nula) sobre la pared interna de la tubería, que corresponde a $\hat{r} = 1$.

Una de dichas propuestas fue la aproximación exclusivamente polinómica, donde el perfil de velocidades aproximado, $\tilde{v}(\hat{r}, z, t)$, presentaba el siguiente desarrollo,

$$v(\hat{r}, z, t) \cong \tilde{v}(\hat{r}, z, t) = \sum_{j \in J} a_j(z, t) f_j(\hat{r}) \quad (1)$$

$$f_j(\hat{r}) = (1 - \hat{r}^j) \quad \forall j \geq 2 \quad (2)$$

siendo $\{J\}$ un conjunto discreto -y en general reducido- de números naturales, representativo de las potencias propuestas para la serie, $\{J\} = \{j | j \in N\}$, donde $j = 2$ siempre se encuentra presente dado que representa la contribución del término $(1 - \hat{r}^2)$ proveniente del perfil de velocidad estacionario en régimen laminar (flujo de Hagen-Poiseuille). Nótese que las funciones f_j son adimensionales, siendo $0 \leq f_j \leq 1$, y que es necesario determinar los coeficientes a_j en cada posición axial e instante de tiempo para la determinación del perfil local de velocidades.

Este tipo de representación ha mostrado ser de utilidad en problemas tipo golpe de ariete en régimen laminar². Sin embargo, tanto para la representación de perfiles turbulentos estacionarios como en problemas de golpe de ariete en régimen turbulento, las características propias del perfil (más plano hacia el centro de la tubería y de gran pendiente hacia la pared del tubo), hacían infructuosa la aproximación puramente polinómica dado que resultaba un perfil *aproximado* con demasiadas ondulaciones no-realistas en la dirección radial y con una subvaluada tensión de corte en la pared.

Por esta razón fue necesario adicionar al desarrollo en serie (1) una función adimensional que se ajuste al comportamiento -en régimen turbulento- del perfil de velocidades medias temporales y de su pendiente en la pared (por estar asociada a la tensión de corte), tanto para la condición de régimen permanente como durante los transitorios.

Así, la aproximación del perfil de velocidades (instantáneas para régimen laminar y medias temporales en régimen turbulento) continuaba teniendo el mismo desarrollo en serie representado en (1), pero incorporaba la función adimensional de tipo exponencial³

$$f_1(\hat{r}) = \left(1 - e^{-(1-\hat{r}^2)/d}\right) / \left(1 - e^{-1/d}\right) \tag{3}$$

con lo cual el conjunto {J} adicionaba el elemento $j = 1$.

Análogamente a las funciones f_j , se cumple para esta función adicional que $0 \leq f_1 \leq 1$, que $f_1(1) = 0$ y que $(df_1 / d\hat{r})_{\hat{r}=0} = f_1'(0) = 0$. Por otra parte, $\lim_{d \rightarrow \infty} f_1(\hat{r}) = f_2(\hat{r}) = (1 - \hat{r}^2)$. Con esta aproximación, se incorporó una nueva incógnita, el parámetro d , a las $\dim\{J\}$ incógnitas $a_j(z,t)$.

2.2 Determinación de los coeficientes a_j y d

Con la finalidad de calcular las incógnitas presentes en la expansión del perfil aproximado de velocidades, previamente se definen las siguientes velocidades de orden i

$$V_i = V_i(z, t) = \int_A \tilde{v}(r, z, t) r^i dA / \int_A r^i dA = \int_0^1 \tilde{v} \hat{r}^{i+1} d\hat{r} / \int_0^1 \hat{r}^{i+1} d\hat{r} = (i + 2) \int_0^1 \tilde{v}(\hat{r}, z, t) \hat{r}^{i+1} d\hat{r} \tag{4}$$

donde $i = 0, 1, 2, \dots, \dim\{J\}-1$. Para $i = 0$, $V_0(z,t) \equiv \bar{V}(z,t)$, de modo que la "velocidad de orden 0" resulta, dentro de la precisión de la aproximación propuesta (1), coincidente con la definición de la velocidad media local del flujo.

Definido el conjunto {J}, los coeficientes $a_j(z,t)$ se determinan, como funciones de las velocidades V_i , mediante el reemplazo de la ecuación (1) en la expresión (4), resultando

$$V_i(z, t) = (i + 2) \int_0^1 \tilde{v}(\hat{r}, z, t) \hat{r}^{i+1} d\hat{r} = \sum_{j \in J} G_{ij} a_j(z, t) \tag{5}$$

donde la matriz G_{ij} se define como

$$G_{ij} = (i + 2) \int_0^1 f_j(\hat{r}) \hat{r}^{i+1} d\hat{r} \quad j \in \{J\} \tag{6}$$

El parámetro d se determina mediante la condición por la cual se verifica adicionalmente el valor de la tensión de corte en la pared (o, análogamente, el correspondiente coeficiente de fricción) para la condición de régimen estacionario, el cual -en el caso de una tubería lisa- resulta solamente función del número de $Re_0 = 2\bar{V}R / \nu$, con lo cual $d = d(Re_0)$.

Como siguiente paso, los coeficientes a_j pueden ser evaluados mediante el conocimiento de las velocidades V_i ,

$$a_j(z, t) = \sum_{i=0}^{\dim(J)-1} G_{ji}^{-1} V_i(z, t) \tag{7}$$

y finalmente la expresión aproximada del perfil de velocidades resulta

$$\tilde{v}(\hat{r}, z, t) = \sum_{i=0}^{\dim(J)-1} \left[\sum_{j \in J} G_{ij}^{-1} f_j(\hat{r}) \right] V_i(z, t) \quad (8)$$

A partir de la expresión (8), y considerando que el fluido circulante es newtoniano, se puede determinar la expresión de la tensión de corte sobre la pared, τ_w , resultando

$$\tau_w(z, t) = -\frac{\mu}{R} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \hat{r}} \Big|_{\hat{r}=1} = -\frac{\mu}{R} \sum_{i=0}^{\dim(J)-1} \left[\sum_{j \in J} G_{ji}^{-1} f_j'(1) \right] V_i(z, t) \quad (9)$$

donde μ es la viscosidad absoluta del fluido. Según (9), τ_w no sólo resulta una función de la velocidad media del flujo (como lo considera el modelo denominado cuasiestacionario), sino también de velocidades de orden $i > 0$.

2.3 Funciones aproximantes adicionales

Con el objeto de continuar la mejora en la representación del perfil de velocidades, se ensayaron nuevas funciones. Las funciones que mejores resultados mostraron fueron las que incorporaban funciones hiperbólicas, proponiéndose las siguientes

$$\begin{aligned} f_0(\hat{r}) &= \operatorname{sech}[C(1-\hat{r})/\hat{r}] \cdot \operatorname{tgh}[C(1-\hat{r})/\hat{r}] & 0 \leq \hat{r} \leq 1 & \quad (j=0) \\ f_1(\hat{r}) &= \operatorname{tgh}[d(1-\hat{r}^2)] \cdot \operatorname{tgh}[d] & 0 \leq \hat{r} \leq 1 & \quad (j=1) \end{aligned} \quad (10)$$

Así, $\{J\} = \{0, 1, 2, n_1, n_2, n_3, \dots\}$, siendo $\{n_i | n_i \in \mathbb{N} \wedge n_i > 2\}$.

La Figura 1(a) muestra el comportamiento de las funciones $\operatorname{tgh}(x)$ y $\operatorname{sech}(x) \cdot \operatorname{tgh}(x)$, la primera de las cuales se caracteriza por un comportamiento uniforme para $x > 4$, presentando una pendiente positiva para $x = 0$. Por otra parte, la función f_0 tiene un comportamiento asimilable al visualizado en el efecto Richardson, razón por la cual sería útil para la modelación de transitorios con presencia de gradientes de presión alternativos. En este caso, el parámetro C definirá la posición del máximo local de la función f_0 , y su cálculo se definirá en la sección 4 (CASO 2).

En particular, la Figura 1(b) muestra el comportamiento de la función f_1 para diversos valores del parámetro d . Ahora, $\lim_{d \rightarrow 0} f_1(\hat{r}) = f_2(\hat{r}) = (1-\hat{r}^2)$. Nuevamente, resulta $d = d(\operatorname{Re}_0)$ a través de la definición de las pendientes de las funciones aproximantes en la pared, de manera de verificar un determinado coeficiente de fricción de Darcy, $f = f(\operatorname{Re}_0)$, para un flujo en condición estacionaria.

$$\begin{aligned} f_0'(1) &= -C & f_1'(1) &= -2d/\operatorname{tgh}(d) & f_j'(1) &= -j \quad \forall j \geq 2 \\ f &\approx f_{\text{aprox}} = \left(-\frac{16}{\operatorname{Re}_0} \right) \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} \right)_{\hat{r}=1} & \text{siendo} & \quad \hat{v} = \frac{\tilde{v}}{V_0} \cong \frac{\tilde{v}}{V} \end{aligned} \quad (11)$$

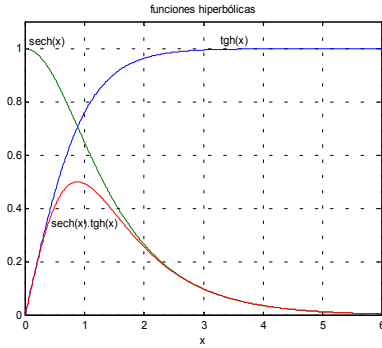


Figura 1(a): Funciones hiperbólicas

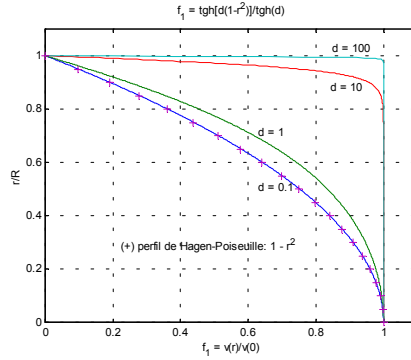


Figura 1(b): $f_i = f_i(r/R, d)$

Las ventajas de la utilización de estas dos últimas funciones (10) -ya sea sumadas o individualmente-, conjuntamente con las expresiones polinómicas (2), se mostrará en las secciones siguientes, donde se analizarán los siguientes casos:

- Caso 1: ajuste de perfiles estacionarios turbulentos
- Caso 2: ajuste de perfiles oscilatorios laminares
- Caso 3: problemas de golpe de ariete (para regímenes laminar y turbulento)

3 CASO 1: FLUJO TURBULENTO ESTACIONARIO

3.1 Determinación de las velocidades V_i y del parámetro d

A partir de la integración numérica de los perfiles de velocidades medias temporales $v(r)$, en régimen permanente, obtenidos numéricamente mediante la aplicación de la longitud de mezcla de Prandtl y la corrección de van Driest en proximidad de la pared⁴, la cual incorpora la información del valor de la tensión de corte en la pared, $\tau_w = \tau_w(Re)$, se determinan, mediante la siguiente ecuación

$$V_i = (i + 2) \int_0^1 v(\hat{r}) \hat{r}^{i+1} d\hat{r} \quad (12)$$

los valores de las relaciones (V_i/V_0) como funciones del número de Reynolds, $Re = 2V_0R/\nu$, donde V_0 representa la velocidad media del flujo (en la sección), $V_0 \equiv \bar{V}$, y ν es la viscosidad cinemática del fluido newtoniano. Las Figuras 2(a) y 2(b) muestran dichas variaciones, así como los ajustes obtenidos mediante polinomios de orden 6, funciones del tipo

$$V_i / V_0 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 \quad x = \log_{10}(Re) \quad (13)$$

cuyos coeficientes se presentan en la Tabla 1 para $1 \leq i \leq 4$.

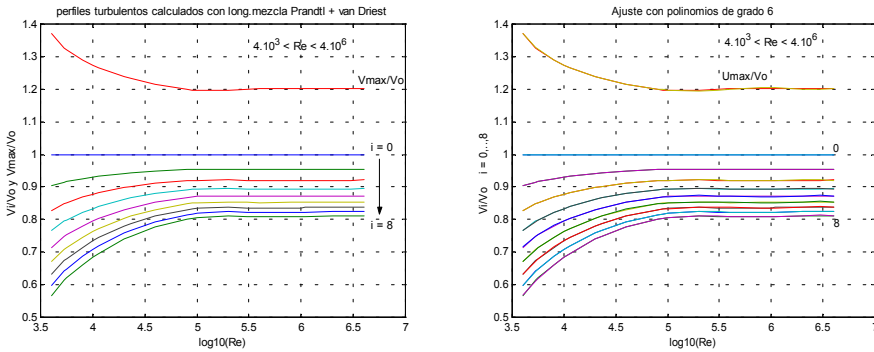


Figura 2(a): V_i/V_0 y $U_{m\acute{a}x}/V_0$ como funciones del número de Reynolds - 2(b) Ajustes polinómicos

Tabla 1: coeficientes de las funciones $V_i/V_0(Re)$, $1 \leq i \leq 4$

Ec.(13)	$b_6 \times 10^3$	$b_5 \times 10$	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
V_1/V_0	-1,900206	0,5860546	-0,748062	5,063206	-19,19564	38,74080	-31,67184
V_2/V_0	-3,148069	0,9699282	-1,235101	8,345871	-31,59600	63,70874	-52,73110
V_3/V_0	-4,003141	1,230144	-1,564295	10,54877	-39,86137	80,26081	-66,65901
V_4/V_0	-4,609692	1,413523	-1,793413	12,06576	-45,49288	91,43241	-76,00527

Para el cculo del parámetro $d = d(Re)$ de la función $f_1 = \frac{\text{tgh}[d(1 - \hat{r}^2)]}{\text{tgh}(d)}$, se adoptó un modelo (denominado B) correspondiente al conjunto $\{J\} = \{1,2,3,4,5\}$, donde se verificaron, para $Re > 4.000$, los valores de V_i/V_0 ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) y del coeficiente de fricción de Darcy, $f = f(Re, \epsilon/D)$. Este coeficiente fue aproximado, para el presente régimen turbulento, mediante la ley de ajuste propuesta por Haaland⁷ (1983), la cual es de carácter explícito

$$f^{-1/2} = -1,8 \log_{10} \left[6,9 / Re + (\epsilon / 3,7D)^{1,11} \right] \tag{14}$$

y dado que en estos ejemplos se han considerado tuberías lisas, entonces $\epsilon = 0$.

Planteado el sistema de 6 ecuaciones para las 5 incógnitas a_j y para la incógnita d , el cual fue resuelto iterativamente mediante la aplicación del método de la regla falsi, se estableció una ley de ajuste para la relación d vs. Re , de la forma

$$\log_{10}(d) \approx \log_{10}(d_{\text{aprox}}) = 0.83154 \cdot \log_{10}(Re) - 2.20949 \tag{15}$$

La relación funcional $d(Re)$ que fuera obtenida mediante el proceso iterativo anteriormente indicado y su correlato $d_{\text{aprox}}(Re)$, así como también estas mismas relaciones en escala logarítmica, se grafican en las Figuras 3(a) y 3(b), respectivamente, mostrando ambas un ajuste satisfactorio, dado que prácticamente se superponen.

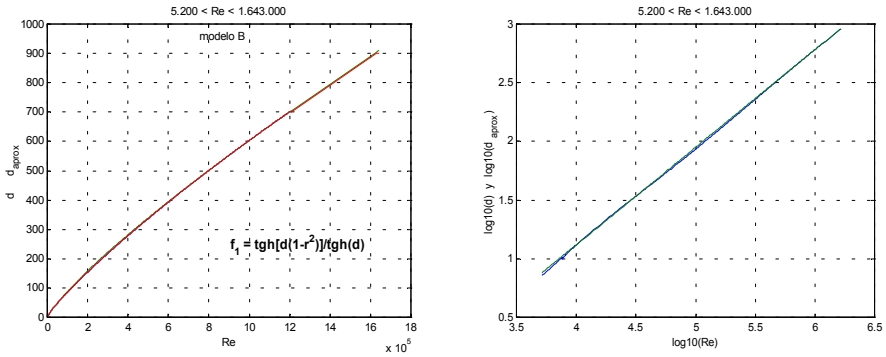


Figure 3: $d(\text{Re})$ and ley de ajuste $d_{\text{aprox}}(\text{Re})$, (escalas normal y logarítmica) según modelo B, $\{J\}=\{1,2,3,4,5\}$

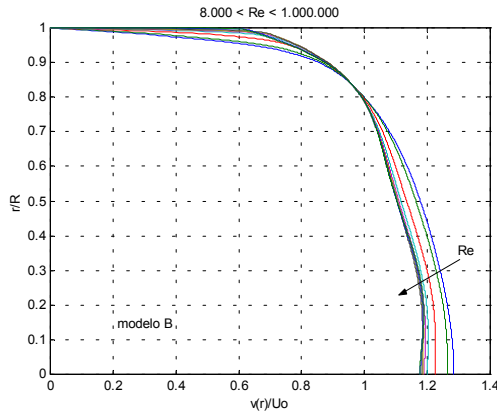
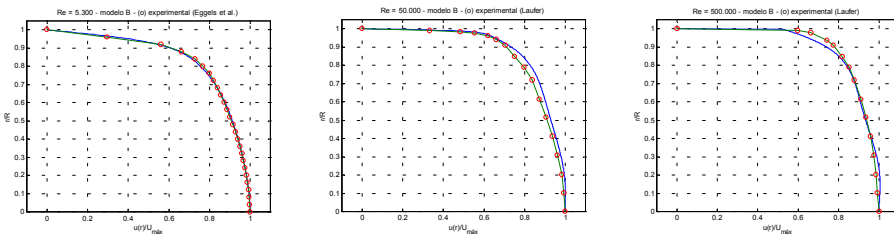


Figure 4: Perfiles turbulentos estacionarios obtenidos mediante el modelo B, $\{J\}=\{1,2,3,4,5\}$



Figuras 5: Comparación con experimentos, $\text{Re} = 5.300$ (Eggels *et al.*)⁵, $\text{Re} = 50.000$ y 500.000 (Lauer)⁶

En la Figura 4 se representan varios perfiles de velocidades adimensionalizados con la velocidad media V_0 , ($8.000 \leq Re \leq 1.000.000$) originados mediante el modelo B. Por otra parte, y con el objeto de mostrar la bondad de los ajustes, en las Figuras 5 se comparan los resultados numéricos obtenidos para tres números de Reynolds (5.300, 50.000 y 500.000) con los perfiles de velocidad obtenidos experimentalmente, presentados por Eggels *et al.*⁵ y Laufer⁶. En esta última figura, los perfiles de velocidad están adimensionalizados con los respectivos valores de máxima velocidad en el centro de la tubería. Los resultados observados de estos ajustes pueden calificarse como satisfactorios.

4 CASO 2: FLUJO LAMINAR OSCILANTE

4.1 Ecuaciones de gobierno

Considerando la solución de la ecuación de Navier-Stokes para el flujo laminar axial de un fluido newtoniano de densidad ρ y viscosidad absoluta μ constantes, en una tubería horizontal de radio R uniforme, debido a la presencia de variaciones periódicas de presión del tipo

$$\frac{dp}{dx} = -\rho K e^{i\omega t} \quad i = \sqrt{-1} \quad (16)$$

resulta la siguiente expresión del perfil de velocidades oscilatorio⁷,

$$u(r, t) = \frac{K}{i\omega} e^{i\omega t} \left[1 - \frac{J_0\left(r\sqrt{-i\omega/\nu}\right)}{J_0\left(R\sqrt{-i\omega/\nu}\right)} \right] \quad (17)$$

donde J_0 es la función de Bessel de primer tipo de orden 0 y ν es la viscosidad cinemática del fluido, $\nu = \mu/\rho$.

Introduciendo la relación adimensional, denominada número de Reynolds cinético⁷,

$$\omega^* = \omega R^2 / \nu \quad (18)$$

se verifica que para elevados valores de ω^* , la expresión (17) puede aproximarse mediante⁸

$$u(r, t) \approx \frac{K}{\nu} \left[\text{sen}(\omega t) - \sqrt{\frac{R}{r}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(R-r)\right) \text{sen}\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(R-r)\right) \right] \quad (19)$$

ecuación que, mediante el empleo de las variables adimensionales,

$$\hat{r} = r/R \quad \hat{u} = u/(KR/4\nu) \quad (20)$$

se escribe en la forma⁷

$$\hat{u}(\hat{r}, t) \approx \frac{4}{\omega} \left[\text{sen}(\omega t) - \frac{e^{-B}}{\sqrt{\hat{r}}} \text{sen}(\omega t - B) \right] \quad (21)$$

donde

$$B = B(\hat{r}, \omega^*) = (1 - \hat{r})\sqrt{\omega^*/2} \quad (22)$$

El perfil de velocidades resultante muestra una zona donde la velocidad se incrementa con respecto al valor de la velocidad en el eje de la tubería, característica denominada *efecto Richardson*, correspondiendo un incremento máximo cuando $B \approx 2,284^7$.

Dado que la función

$$f_0(x) = \operatorname{sech}(x) \operatorname{tgh}(x) \quad \text{con } x = C(1 - \hat{r})/\hat{r} \quad 0 \leq \hat{r} \leq 1 \quad (23)$$

presenta un máximo cuando $x = x^* = 0,8813736$, siendo $f_0(x^*) = 1/2$, y sabiendo que

$$\hat{r} = 1 - B\sqrt{2/\omega^*} \quad (24)$$

entonces, si $B = B^* = 2,284$, resulta

$$x^* = C(1 - \hat{r}^*)/\hat{r}^* = 0,8813736 \quad \text{y} \quad \hat{r}^* = 1 - 2,284\sqrt{2/\omega^*} \Rightarrow C = C(\omega^*) \quad (25)$$

De este modo, la función

$$f_0(\hat{r}) = \operatorname{sech}\left[C\left(\frac{1 - \hat{r}}{\hat{r}}\right)\right] \operatorname{tgh}\left[C\left(\frac{1 - \hat{r}}{\hat{r}}\right)\right] \quad 0 \leq \hat{r} \leq 1 \quad C = \frac{0,8813736\hat{r}^*}{(1 - \hat{r}^*)} \quad (26)$$

representa un término adicional que intenta contribuir al ajuste del perfil de velocidades, y en particular a la representación del efecto Richardson originado por la presencia de un gradiente de presiones oscilatorio.

4.2 Ejemplo

Considerando un fluido newtoniano que oscila con un elevado número de Reynolds cinético ($\omega^* > 50$), se propone entonces la aproximación del tipo

$$\tilde{v}(\hat{r}, z, t) = \sum_{i=0}^{\dim(J)-1} \left[\sum_{j \in J} G_{ij}^{-1} f_j(\hat{r}) \right] V_i(z, t) \quad \{J\} = \{0, 2, \dots\} \quad (27)$$

A manera de ejemplo de comprobación de la bondad del ajuste, se propone el conjunto $\{J\} = \{0, 2, 3, 4, 5\}$ y se lo compara con aproximaciones puramente polinómicas y con los resultados analíticos aproximados (19), determinando las velocidades de orden i a partir de

$$V_i = (i + 2) \int_0^1 \hat{u}(\hat{r}) \hat{r}^{i+1} d\hat{r} \quad (28)$$

El conjunto de figuras incluidas bajo la denominación genérica de Figuras 6, muestra las representaciones de los perfiles $v(\hat{r}, t)/U_{\max}(\hat{r} = 0)$; $\tau \leq t \leq \tau + T$ (durante un período de oscilación, T) siendo $\omega^* = 235$, $r^* = 0,79$ y $C = 3,3$. La figura 6(a) representa la solución analítica aproximada (19), la 6(b) corresponde a un ajuste exclusivamente polinómico de un número reducido de bajas potencias: $\{J\} = \{2, 3, 4, 5\}$, asimismo para 6(c), si bien incluye

potencias más elevadas: $\{J\} = \{2,6,10,12\}$, y también para 6(d), donde el conjunto de potencias incorpora los valores de 2 a 11 inclusive. Como se observa, y dada la configuración particular de los perfiles -con una porción uniforme- la mejor representación de los perfiles transitorios corresponde al modelo "3", el cual incluye muchas potencias y en particular varias elevadas, y la más deficiente al modelo "1". Sin embargo, la incorporación de una gran cantidad de potencias altas es un procedimiento riesgoso, dado que también puede dar lugar a perfiles con importantes oscilaciones locales como las mostradas por el modelo "1". Alternativamente, la sola incorporación de la función f_0 al conjunto del modelo "1" mejora notablemente la representación de los perfiles de velocidad, como se observa en la figura 6(d) que representa los resultados del modelo "4", el cual está definido *solamente* por el conjunto $\{J\} = \{0,2,3,4,5\}$.

Por otra parte, también pueden compararse los resultados de la variación de la tensión cortante en la pared del tubo durante un ciclo completo. A tal efecto, se incluyen dos modelos adicionales, uno es el denominado modelo cuasiestacionario, el cual considera que la tensión de corte en la pared solamente es función de la velocidad media instantánea del flujo, y que para un régimen laminar se expresa como

$$\tau_w(t) = 4\mu\bar{V}(t)/R, \quad (29)$$

siendo la otra propuesta la adoptada por Schaaf y Abbrecht⁹, representada por

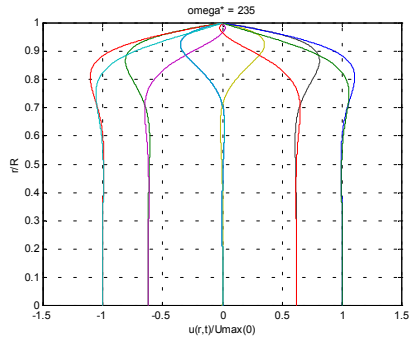
$$\tau_w(t) = \frac{4\mu}{R}\bar{V}(t) + \frac{\rho R}{2}(\beta - 1)\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}, \quad (30)$$

donde se establece que la tensión en la pared depende asimismo de la variación temporal de la velocidad media. La expresión (30) está restringida a variaciones de baja frecuencia, y el coeficiente β es asumido igual a $4/3$ ⁹.

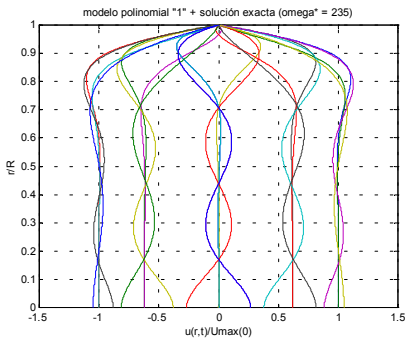
En la Figura 7 se muestran los resultados provenientes de los diferentes modelos de ajuste y los resultados analíticos para la variación de la tensión de corte sobre la pared interna de la tubería, durante un ciclo completo, siendo $\omega^* = 235$. Dicha variación temporal se ha adimensionalizado con el máximo valor positivo (analítico) alcanzado por la tensión. En estos gráficos se observa la gran discrepancia presentada por el modelo cuasiestacionario (tanto en módulo de la tensión como en su fase).

Lo mismo puede argumentarse del modelo utilizado por Schaaf y Abbrecht, si bien, en este caso, las discrepancias en los valores del módulo de la tensión cortante -pero no en la fase de los mismos- podrían reducirse con un adecuado ajuste del coeficiente β .

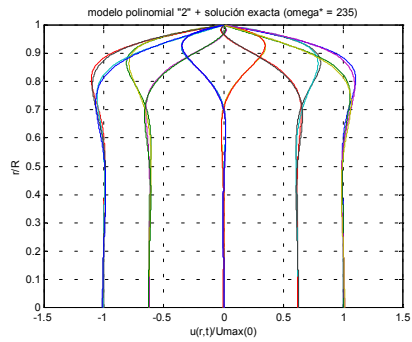
Por otra parte, son justamente los modelos "2", "3" y "4" los que mejor se ajustan a los resultados analíticos aproximados, si bien en el caso del modelo "4" la representación del perfil no resultó tan satisfactorio como las correspondientes a los modelos "2" y "3". En particular, y para este ejemplo, el modelo exclusivamente polinómico "3" representa un ajuste prácticamente coincidente con los analíticos, tanto en módulo como en fase.



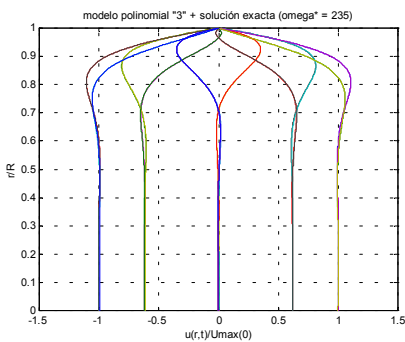
(a) solución analítica



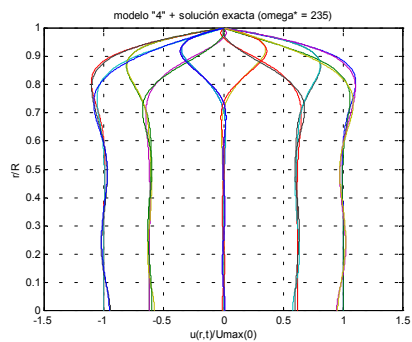
(b) $\{J\} = \{2,3,4,5\}$



(c) $\{J\} = \{2,6,10,12\}$



(d) $\{J\} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$



(e) $\{J\} = \{0,2,3,4,5\}$

Figuras 6: Solución analítica y aproximaciones, número de Reynolds cinético $\omega^* = 235$

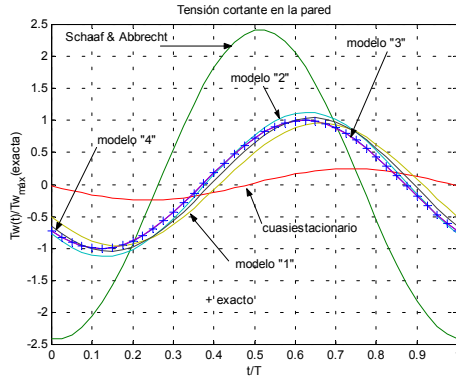


Figura 7: Comparación entre modelos y resultados analíticos⁽⁴⁾ para la variación de la tensión de corte sobre la pared interna de la tubería, adimensionalizada, durante un ciclo completo, siendo $\omega^* = 235$.

5 CASO 3: GOLPE DE ARIETE

5.1 Variables y parámetros adimensionales

Siguiendo el análisis presentado en un trabajo anterior³, las ecuaciones adimensionales para el golpe de ariete dependen de los siguientes grupos adimensionales,

$$Re_0 = 2\bar{V}_0 R / \nu; \quad Ma_0 = \bar{V}_0 / a; \quad Fr_0 = \bar{V}_0 / \sqrt{gR}; \quad \hat{L} = L / R \quad (31)$$

representando, respectivamente a los números de Reynolds, Mach y Froude basados en la velocidad media del flujo en régimen permanente, \bar{V}_0 , y a la razón entre la longitud y el radio de la tubería. A su vez, ν representa la viscosidad cinemática del fluido, a la velocidad del sonido en la tubería y g la aceleración de la gravedad.

Por otra parte, se definen las siguientes variables adimensionales, tanto las independientes,

$$\hat{r} = r / R; \quad \hat{z} = z / L; \quad \hat{t} = t / (L / a) \quad (32)$$

como las dependientes

$$\hat{v} = \frac{v}{\bar{V}_0}; \quad \hat{a}_j = \frac{a_j}{\bar{V}_0}; \quad \hat{h} = \frac{h}{R}; \quad \hat{p} = \frac{p}{\rho a \bar{V}_0}; \quad \hat{\tau} = \frac{\tau}{\rho a \bar{V}_0}; \quad \hat{\mu}_{ef} = \frac{\mu_{ef}}{\rho a R}; \quad \hat{S} = \frac{S}{a \bar{V}_0 / L} \quad (33)$$

para la velocidad, los coeficientes de la aproximación del perfil de velocidad, la altura del fluido en el tanque, la presión estática, la tensión viscosa, la viscosidad efectiva (molecular + de torbellino) y los términos fuente (viscosos), respectivamente.

Los términos fuente adimensionales resultan³, siendo $i = 0, 1, 2, \dots, \dim\{J\} - 1$,

$$\hat{S}_i = \hat{L} \int_A \frac{\partial \hat{r} \hat{\tau}_z}{\partial \hat{r}} \hat{r}^{i-1} dA \Big/ \int_A \hat{r}^i dA = \hat{L} \int_0^1 \frac{\partial \hat{r} \hat{\tau}_z}{\partial \hat{r}} \hat{r}^i d\hat{r} \Big/ \int_0^1 \hat{r}^{i+1} d\hat{r} = (i+2) \hat{L} \int_0^1 \frac{\partial \hat{r} \hat{\tau}_z}{\partial \hat{r}} \hat{r}^i d\hat{r} \quad (34)$$

5.2 Ecuaciones de gobierno

Asumiendo válidos los siguientes supuestos: a) tubería rígida, de radio constante y dispuesta horizontalmente, b) flujo puramente axial, c) presión constante sobre la sección de tubería, d) velocidad del flujo despreciable frente a la velocidad del sonido en el medio, y e) tensiones viscosas normales despreciables, las ecuaciones de gobierno se reducen al siguiente sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales para la presión estática $p(z,t)$, y velocidades $V_i(z,t)$, las cuales, adimensionalizadas, se expresan a lo largo de las direcciones características

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\hat{V}_0}{dt} + \frac{d\hat{p}}{dt} = \hat{S}_0 & \frac{dz}{dt} = +1 \\ \frac{d\hat{V}_0}{dt} - \frac{d\hat{p}}{dt} = \hat{S}_0 & \frac{dz}{dt} = -1 \\ \frac{d\hat{V}_i}{dt} + \frac{d\hat{V}_0}{dt} = \hat{S}_i - \hat{S}_0 & \frac{dz}{dt} = +0 \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, \dim\{J\}-1 \quad (35)$$

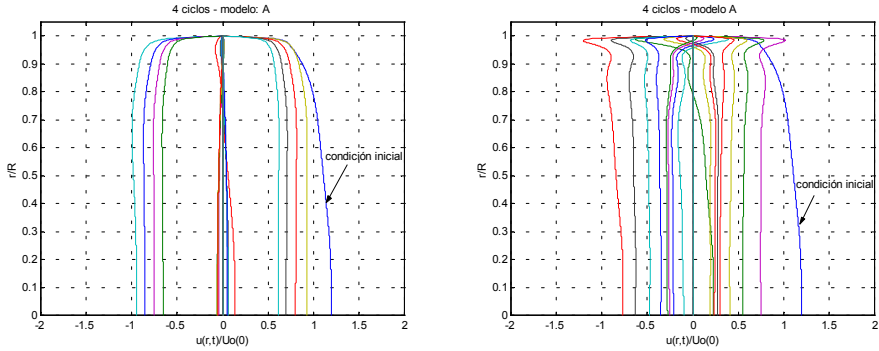
Además de las habituales condiciones iniciales y de contorno para la presión y la velocidad media en un problema de golpe de ariete con un modelo de fricción cuasiestacionaria para la representación del término viscoso, se adicionan en los presentes modelos condiciones iniciales sobre las velocidades V_i , cuyos valores dependen del régimen del flujo. Si el régimen estacionario inicial es *laminar*, el perfil de velocidad está representado por el perfil parabólico de Hagen-Poiseuille, $\hat{v} = 2(1 - \hat{r}^2)$, y $V_i / V_0 = 4/(4+i)$ para $i \geq 0$, independientemente del Re_0 . Si el régimen estacionario establecido previo al cierre de la válvula es *turbulento*, las condiciones iniciales para V_i / V_0 resultan funciones del Re_0 , y en tal caso se utilizan las aproximaciones establecidas en la sección 3.1.

5.3 Análisis de resultados

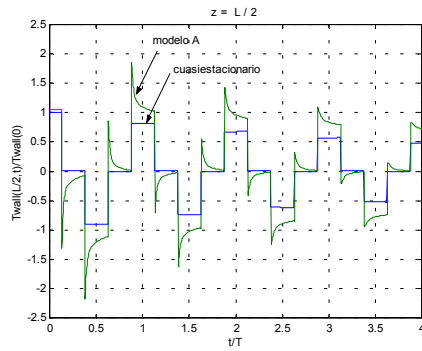
Para la resolución del sistema (35) se ha considerado una configuración tanque-tubería-válvula de cierre instantáneo. Resultados para diferentes números de Reynolds son presentados en las Figuras 8 a 11. En todos los casos se presentan los perfiles de velocidad aproximados, para un instante Δt previo al pasaje de la onda de presión, y en el instante Δt posterior a dicho pasaje, ambos en la estación $z = L/2$ de la tubería. Asimismo, se muestran las distribuciones de la tensión de corte en la pared en $z = L/2$ (adimensionalizadas con el valor correspondiente al régimen estacionario inicial), tanto para el modelo cuasiestacionario

$$\hat{\tau}_{w0} = \tau_{w0} / \rho a \bar{V}_0 = f(Re, \varepsilon / D) Ma_0 / 8 \quad (36)$$

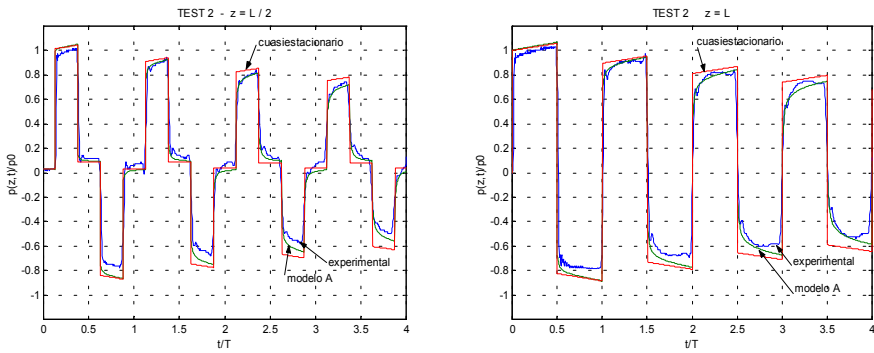
como para las distribuciones resultantes de la aplicación de un modelo de ajuste determinado.



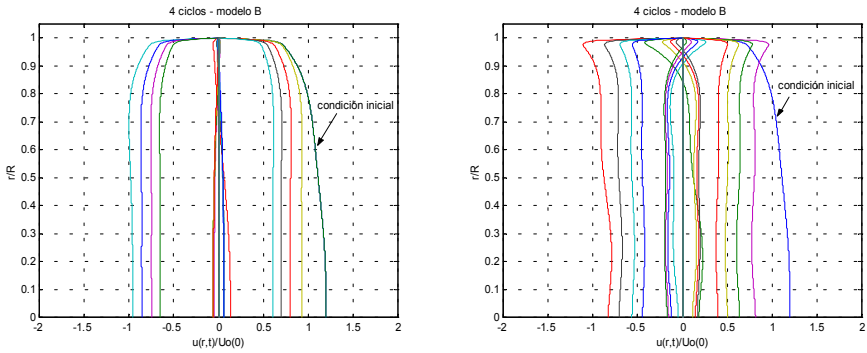
(a) perfiles de velocidad aproximados, con anterioridad y posterioridad al pasaje del frente de onda de presión



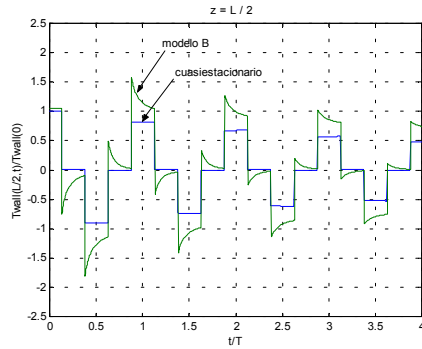
(b) evolución temporal de τ_w en L/2 y de presiones en L/2 y en la válvula



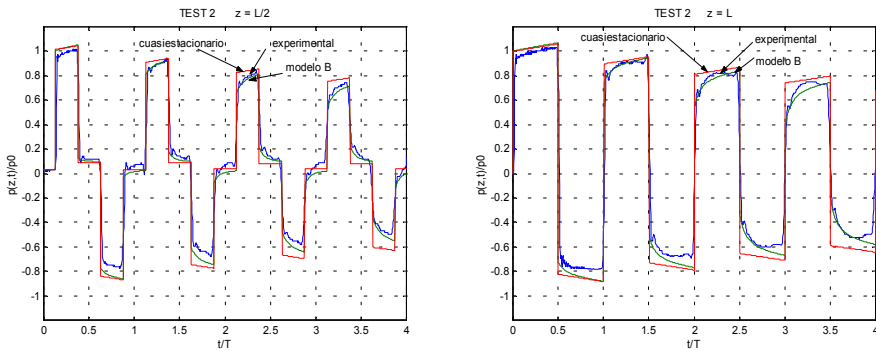
Figuras 8: $Re = 61.409$ - Modelo A - $\{J\} = \{0,1,2,3,4,5\}$



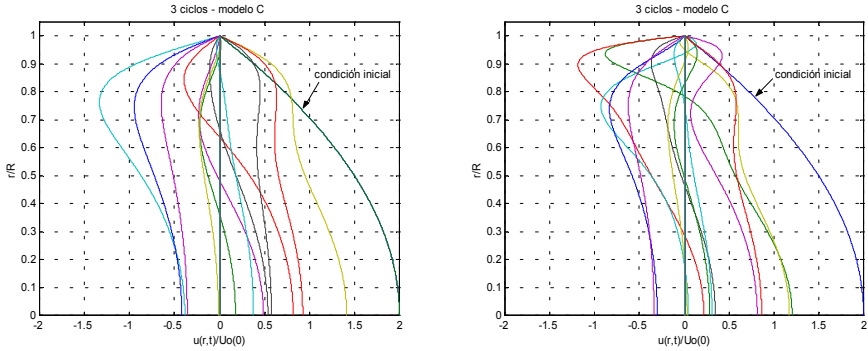
(a) perfiles de velocidad aproximados, con anterioridad y posterioridad al pasaje del frente de onda de presión



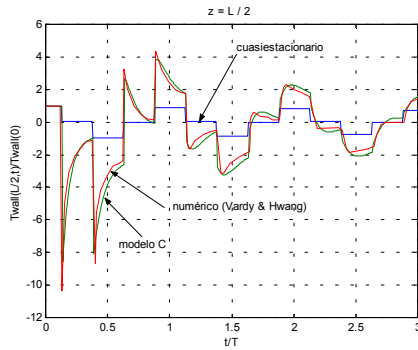
(b) evolución temporal de τ_w en $L/2$ y de presiones en $L/2$ y en la válvula



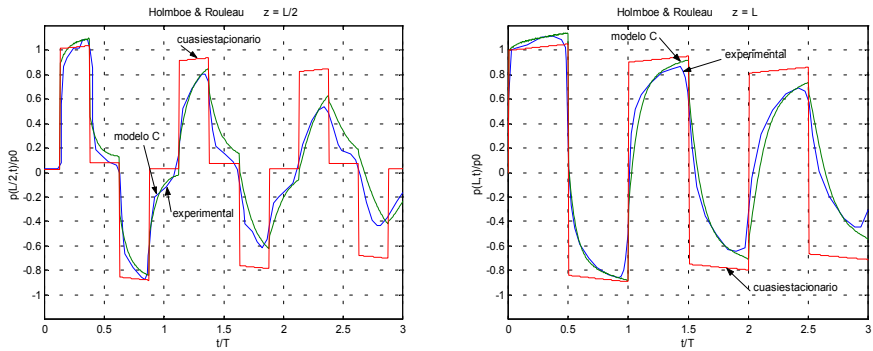
Figuras 9: $Re = 61.409$ - Modelo B - $\{J\} = \{1,2,3,4,5\}$



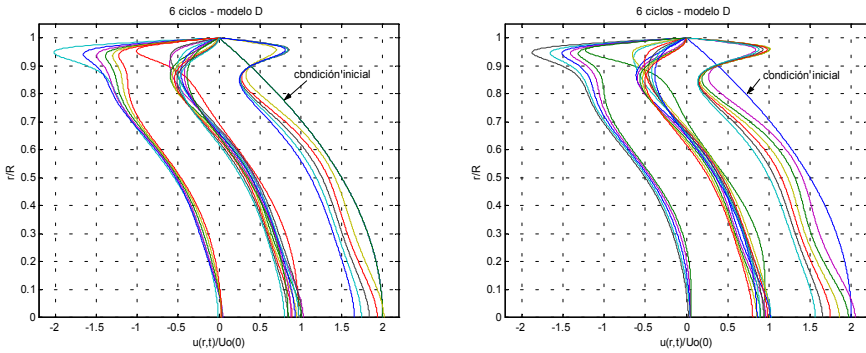
(a) perfiles de velocidad aproximados, con anterioridad y posterioridad al pasaje del frente de onda de presión



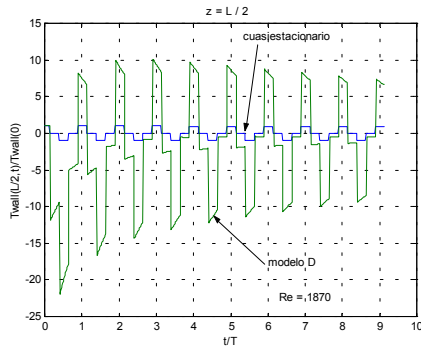
(b) evolución temporal de τ_w en $L/2$ y de presiones en $L/2$ y en la válvula



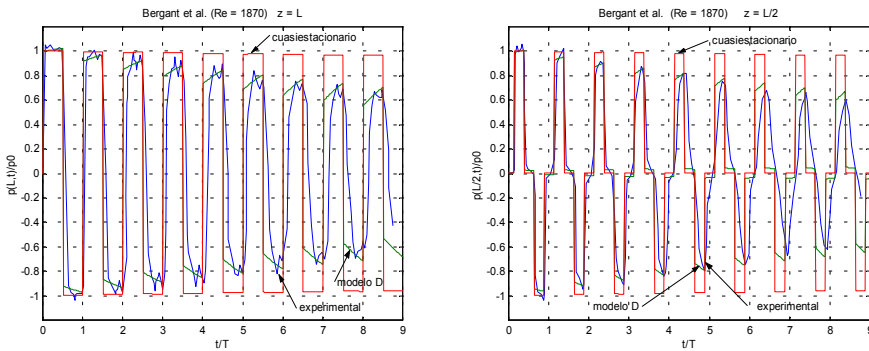
Figuras 10: $Re = 128$ - Modelo C - $\{J\} = \{2,6,10,12\}$



(a) perfiles de velocidad aproximados, con anterioridad y posterioridad al pasaje del frente de onda de presión



(b) evolución temporal de τ_w en $L/2$ y de presiones en $L/2$ y en la válvula



Figuras 11: $Re = 1870$ - Modelo D - $\{J\} = \{0,1,2,3,4\}$

Las figuras se completan con las historias de la presión adimensional, tanto en la mitad de la tubería como en proximidad de la válvula. Estas representaciones numéricas corresponden a los modelos cuasiestacionario y de ajuste, y son comparadas con resultados experimentales.

Los resultados correspondientes a las Figuras 8 y 9 lo son para $Re_0 = 61.409$, pero para dos aproximaciones diferentes: los modelos A ($\{J\} = \{0,1,2,3,4,5\}$) y B ($\{J\} = \{0,1,2,3,4,5\}$). Si bien los resultados de la variación temporal de la presión resultan muy semejantes en ambos modelos, las diferencias estriban en la representación del efecto Richardson en proximidad de la pared para los perfiles de velocidad generados luego del paso de la onda de presión. El modelo A, al introducir la función f_0 con el parámetro C,

$$C = 0,8813736 \hat{r}^* / (1 - \hat{r}^*) \quad \hat{r}^* = 1 - 2,284 \sqrt{8 \hat{L} Ma_0 / (\pi Re_0)} \quad (36)$$

representa de manera más pronunciada dicho efecto, con lo cual la variación temporal de la tensión de corte sobre la pared resulta también más pronunciada. Los resultados experimentales corresponden a los del denominado *test 2*¹⁰, observándose un mejor ajuste de los modelos A y B en comparación a los del modelo cuasiestacionario.

Los resultados del flujo laminar a bajo número de Reynolds (experiencia de Holmboe y Rouleau, $Re_0 = 128$)¹¹ fueron determinados a partir de un modelo de ajuste exclusivamente polinómico (modelo C, $\{J\} = \{2,6,10,12\}$). En este caso, la historia de la tensión de corte en la pared es también comparada con la obtenida numéricamente por Vardy y Hwang mediante una discretización con volúmenes finitos¹¹. Nuevamente, resultan satisfactorias las aproximaciones del presente modelo de ajuste, particularmente cuando se las compara con las pobres performances del modelo cuasiestacionario.

Los últimos resultados presentados corresponden a un número de Reynolds laminar elevado, $Re_0 = 1.870$, por lo cual fue conveniente utilizar un modelo que incorpore las funciones de ajuste f_0 y f_1 , optándose por el conjunto $\{J\} = \{0,1,2,3,4\}$ como modelo D. Si bien en este caso las historias de la presión obtenidas no se ajustan tan bien como anteriormente a las empíricas obtenidas por Bergant *et al.*¹³, representan un comportamiento más aproximado al experimental que el mostrado por el modelo cuasiestacionario.

6 CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo de ajuste para el perfil de velocidades axiales en una tubería, basado en el desarrollo de una serie finita de funciones polinómicas e hiperbólicas en la coordenada radial, generalizando un modelo desarrollado previamente para flujo laminar no estacionario. Este modelo ha sido contrastado con resultados experimentales y analíticos.

Los ajustes resultan satisfactorios para modelar tanto flujos transitorios como estacionarios, ya sean en régimen laminar como en régimen turbulento, compartiéndose las ventajas de los modelos 1D (simplicidad) y 2D (mejor representación del fenómeno fluidodinámico).

La presente propuesta está especialmente diseñada para evaluar la fricción bajo condiciones no estacionarias, reemplazando así a los modelos cuasiestacionarios de generalmente pobre desempeño.

Asimismo, el modelo propuesto podría ser generalizado para simular flujo en canales bidimensionales, o para la representación de problemas hemodinámicos, en donde la complejidad del sistema sanguíneo conllevaría la necesidad de simplificar al flujo considerándolo unidimensional. En particular, en este campo se abre la posibilidad de acoplar simulaciones 1D del sistema circulatorio con modelos 2D o 3D de, por ejemplo, una región con estenosis u otra situación no modelable como unidimensional.

7 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración prestada por los Dres. Sánchez y Carmona (Instituto de Ingeniería, Universidad Autónoma de México) quienes facilitaron los datos experimentales correspondientes a problemas de golpe de ariete en régimen turbulento (Tests 1, 2 y 3).

8 REFERENCIAS

- [1] H. Schlichting, *Teoría de la capa límite*, Ediciones URMO, Bilbao, España (1972).
- [2] R.A. Prado and A.E. Larreteguy, "A transient shear stress model for the analysis of laminar water-hammer problems", *J. of Hydraulic Research* (IAHR), **40**, No.1, 45-53 (2002).
- [3] R.A. Prado and A.E. Larreteguy, "Unsteady wall shear stress model for pressure transient problems in laminar and turbulent pipe flows", *Mecánica Computacional*, **20**, 46-53 (2001).
- [4] R.B. Bird, W.E. Stewart y E.N. Lightfoot, *Fenómenos de transporte*, Editorial Reverté S.A., Buenos Aires (1976).
- [5] J.G. Eggels, F. Unger, M.H. Weiss, J. Westerwell, R.J. Adrian, R. Friedrich and F.T.M. Nieuwstadt, "Fully developed turbulent pipe flow: a comparison between direct numerical simulation and experiment", *J. Fluid Mech.*, **268**, 175-209 (1994).
- [6] J. Laufer, "The structure of turbulence in fully developed pipe flow", *N.A.C.A. Report 1174*, 417-434 (1954).
- [7] F.M. White, *Viscous Fluid Flow*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc. (1991).
- [8] H.K. Versteeg and W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*. Longman Group Ltd. (1995).
- [9] B.W. Schaaf and P.H. Abbrecht, "Digital computer simulation of human systemic arterial pulse wave transmission", *J. Biomechanics*, **5**, 345-364 (1972).
- [10] R. Carmona Paredes, A. Sánchez Huerta and J.L. Sánchez Bribiesca "Experimental relation between the highest transient pressure and the severity of water column separation", *8th International Round Table on Hydraulic Transients in Power Stations*, (IAHR), Madeira, Portugal, 1-21 (1987).
- [11] A.E. Vardy and K-L. Hwang, "A characteristics model of transient friction in pipes", *Journal of Hydraulic Research* (IAHR), **29**, No.5, 669-684 (1991).
- [12] A. Bergant, A.R. Simpson and Vitkovský J., "Developments in unsteady pipe friction modelling", *J. of Hydraulic Research* (IAHR), **39**, No.3, 249-257 (2001).