

MODELAMIENTO COMPUTACIONAL DE LA CALLE DE VORTICES DE KARMAN POR DINAMICA DE VORTICIDAD

Omar D. López*

*Área de investigación en mecánica computacional
Magister en ingeniería mecánica
Universidad de los Andes
Cra. 1 #18-03, Bogota, Colombia
Email: oma-lope@uniandes.edu.co odlopez@hotmail.com

Key words: Vortices de Karman, dinámica de vorticidad, Métodos de vorticidad, Mecánica de fluidos computacional, Métodos sin enmallado.

Abstract. *Los métodos de vorticidad son una técnica numérica que permiten simular con una buena resolución problemas de flujos de fluidos viscosos e incompresibles. Una ventaja y diferencia importante de estos, en comparación con otros métodos numéricos de solución y visualización de flujos (como por ejemplo los métodos de CFD basados en los elementos finitos) es la independencia absoluta de enmalladores. Sin embargo debido a su simplicidad y a su independencia de enmallado no son triviales de implementar. En el siguiente trabajo se resume la implementación de un método de vorticidad utilizado en la simulación de un flujo abierto, viscoso, incompresible y bidimensional, alrededor de un cilindro circular con el fin de poder visualizar un fenómeno físico muy conocido en mecánica de fluidos llamado efecto Von Karman o la calle de vortices de Karman. Igualmente se muestran algunos resultados cualitativos y cuantitativos relacionados con diversas simulaciones del fenómeno realizadas a diferentes números de Reynolds.*

1. INTRODUCCIÓN

A pesar que el fenómeno ocasionado por un fluido al pasar alrededor de un obstáculo, ha sido objeto de estudio desde tiempos muy remotos, solo hasta principios del siglo pasado (1912) el investigador húngaro Teodoro Von Karman, planteó las bases del análisis de dicho fenómeno que lleva su nombre. Básicamente la idea planteada por Von Karman es que el fenómeno ocurre debido a la superposición de vortices irrotacionales que se forman al paso de un fluido alrededor de un obstáculo; los cuales viajan aguas abajo con el fluido de forma ordenada y similar a las huellas dejadas al caminar por una calle (de donde proviene su nombre¹). Debido a que este fenómeno es tan común en el estudio de la mecánica de los fluidos, ya que se presenta a números de Reynolds superiores a 34 y hasta números de Reynolds del orden de 1×10^7 ², se han desarrollado diversas investigaciones, encaminadas al entendimiento del problema. Algunos de los temas de interés relacionados con el efecto Von Karman son los siguientes:

- Cuando la frecuencia de generación de vortices se acerca a la frecuencia natural del objeto, entonces una vibración lateral apreciable se genera en el mismo. Por ejemplo, este fenómeno se presenta cuando el viento fluye alrededor de estructuras civiles como cables de puentes colgantes y cables estructurales de plataformas marinas.
- En diferentes fenómenos de la naturaleza como vientos alrededor de los picos de montañas, que permiten predecir algunos comportamientos ambientales y meteorológicos.
- A mediados de la década de 1970 se comenzaron a desarrollar los primeros medidores de flujo, que tienen como principio de funcionamiento este fenómeno, y que aun hoy en día son objeto de estudio.

La calle de vortices de Karman es uno de los patrones de vorticidad más estudiados y conocidos en el campo de la mecánica de los fluidos; Técnicamente hablando en el caso de un cilindro (como obstáculo en un flujo), a medida que una partícula fluye sobre la superficie del cilindro, su presión aumenta desde la presión del flujo libre hasta la presión de estancamiento. La alta presión alcanzada por el fluido cerca de la superficie del cilindro, impulsa al flujo sobre el mismo generando capas límites simétricas sobre la superficie del cilindro. Por otra parte, a altos números de Reynolds, la alta presión alcanzada no es suficiente para forzar el flujo sobre la parte trasera del cilindro. Cerca de la sección más ancha del cilindro, las capas límites generadas comienzan a separarse de la superficie del cilindro, debido a que la parte de la capa límite separada que esta en contacto con la superficie del cilindro se mueve mas lentamente que la parte que esta en contacto con el flujo libre, la capa límite separada se enrolla, generando una serie de vortices discretos y alternativos que viaja aguas abajo junto con el fluido y que finalmente dan forma a la estela conocida como la calle de vortices de Karman y que se puede observar en la siguiente figura.



Figura 1. Visualización de la calle de vortices de Karman.

El trabajo de investigación del fenómeno durante la década de 1950 y 1960 se enfocó sobre el estudio de la relación entre la generación de vortices de Karman y las oscilaciones o vibraciones asociadas al mismo (Flow-induced Vibrations). Durante estas investigaciones se encontró la importancia del número adimensional de Strouhal en el modelamiento del fenómeno, este número está determinado por la siguiente ecuación:

$$S = \frac{Fv h}{V} \quad (1)$$

Donde:

Fv : Frecuencia de generación de vortices.

h : Longitud característica de la geometría del obstáculo

V : Velocidad media del flujo.

Por otra parte, los métodos de vorticidad son aquellos que permiten realizar una simulación de la dinámica de la vorticidad cerca de una frontera, esto quiere decir que son métodos que permiten de una manera aproximada resolver la ecuación de Navier-Stokes (Para ser más específicos la ecuación de evolución de la vorticidad) en las vecindades de una superficie plana o curva con velocidad cero. “Vortex Methods” es el término utilizado en la literatura técnica para los métodos descritos y por supuesto existen muchas técnicas de simulación desarrolladas que se pueden clasificar de acuerdo a su dependencia de la generación de una malla para su solución. Para el desarrollo de esta investigación se escogió el método de caminatas al azar (Random Walks), desarrollado por Alexandre Joel Chorin en 1973 el cual han sido validado experimentalmente en diversas investigaciones realizadas a nivel mundial³

2. CONCEPTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS.

Con el fin de tener una idea sobre la forma como se modelan los problemas de dinámica de vorticidad en mecánica de fluidos, a continuación se describirá en forma rápida y concisa las ecuaciones gobernantes del fenómeno y el método numérico de solución de las mismas propuesto por Alexander Joel Chorin.

Inicialmente, se debe recordar que la ecuación de Navier-Stokes en dos dimensiones está dada por la siguiente expresión:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + [\nabla v]v \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + f \quad (2)$$

Tomando el rotacional de la ecuación (2), teniendo en cuenta que las fuerzas de volumen pueden ser expresadas como el gradiente de un campo escalar conservativo, entonces se obtiene la siguiente ecuación para flujos bidimensionales⁴.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + [\nabla \omega]v = \frac{\nabla^2 \omega}{\text{Re}} \quad (3)$$

Donde:

v: es el campo de velocidad del fluido

ω : es el rotacional del campo de velocidad

Re: es el número de Reynolds.

3. MÉTODO NUMÉRICO IMPLEMENTADO.

Básicamente el método propuesto por Chorin permite resolver la ecuación (3) en dos pasos, dividiendo dicha ecuación en una parte no viscosa (que esta relacionada con la convección de la vorticidad) y en una parte viscosa (que esta relacionada con la difusión de la vorticidad). Las ecuaciones que modelan cada una de estas partes se muestran a continuación⁵

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + [\nabla \omega]v = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nabla^2 \omega}{\text{Re}} \quad (5)$$

La solución numérica de dichas ecuaciones se logra gracias a la discretización del campo de vorticidad en una cantidad finita de elementos de vorticidad puntual, los cuales para la solución de la ecuación (4) presentan un desplazamiento desde un enfoque lagrangiano, y para la solución de la ecuación (5) es simulada estocásticamente por el desplazamiento por caminatas al azar de los mismos elementos de vorticidad puntua⁶.

Las ecuaciones (4) y (5) se cumplen cuando no existe ningún obstáculo en el fluido, pero en el caso de ser así se deben cumplir las siguientes condiciones de frontera, necesarias para una correcta solución del problema:

1. La velocidad normal en las fronteras físicas de los obstáculos debe ser cero. Esto se logra por diversas técnicas entre las que se encuentran el método de las imágenes y el método de las fuentes. En este modelo se utilizo el método de las fuentes.
2. La condición de no deslizamiento en las superficies físicas de los obstáculos. Esto se logra a través de la generación o creación de vorticidad en la superficie de los mismos. La generación de vorticidad a lo largo de la pared física del obstáculo se discretiza a través de elementos de vorticidad puntual, que pueden ser vortex sheets o vortex blobs, pero con el fin de mejorar la convergencia en la frontera del obstáculo, se recomienda la utilización de vortex sheets⁷.

3.1 Descripción del algoritmo.

Básicamente, el campo de vorticidad se divide en dos zonas, una zona que se denominara interior (Discretizada por vortex blobs) y otra zona denominada frontera que simulara la capa límite (Discretizada por vortex sheets), lo cual se muestra en la siguiente figura.

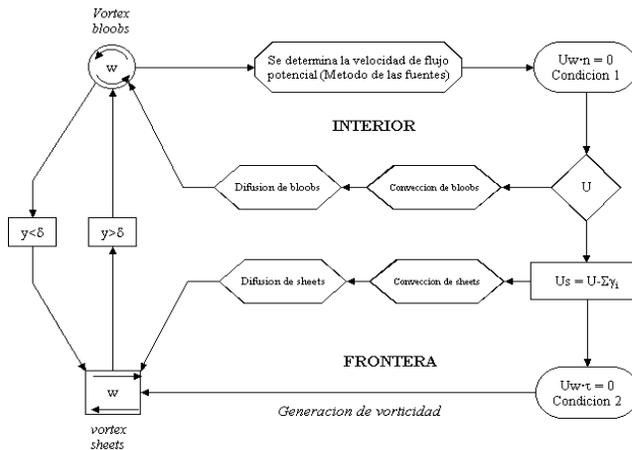


Figura 2. Esquema del algoritmo del método implementado.

Como se puede observar en la zona denominada frontera de la figura 2, se debe satisfacer la condición 2, para esto se debe determinar la velocidad tangencial (U_s) en la superficie del obstáculo gracias al campo de vorticidad y al flujo potencial, para luego determinar la intensidad y la cantidad de vortex sheets a generar en la superficie del obstáculo. También en esta parte del algoritmo se deben mover los vortex sheets dentro de la capa límite ($y < \delta$) de acuerdo a las ecuaciones descritas en la referencia ⁸.

Por otra parte en la zona denominada como interior, se deben mover los vortex blobs satisfaciendo la condición 1 y de acuerdo a las ecuaciones descritas en la referencia ⁶. Debido a que los vortex sheets y los blobs son dos representaciones diferentes de un mismo objeto entonces en el límite entre la zona interior y la de frontera debe ocurrir una interacción importante entre estos dos elementos. Esta interacción se muestra en la parte izquierda de la figura 2 y consiste en que aquellos vortex sheets que salgan de la capa límite numérica deben ser convertidos en blobs y viceversa. Si se desea conocer con mas detalle el funcionamiento del algoritmo así como las ecuaciones necesarias para la ejecución del mismo se recomienda mirar las referencias ⁶, ⁷, ⁸ y ¹⁰.

4. PROGRAMA IMPLEMENTADO Y RESULTADOS COMPUTACIONALES.

El problema modelado consiste en un cilindro de sección circular y de longitud infinita inmerso en un fluido de viscosidad conocida. Las condiciones iniciales del problema son: en

el tiempo $t = 0$ el fluido se encuentra en reposo y un incremento de tiempo después es súbitamente puesto en movimiento a una velocidad constante (U_∞).

4.1 Resultados cualitativos

Formación y desarrollo de las estructuras o regiones de vorticidad. Para un número de $Re = 1e4$ y un tiempo de simulación de $t=1$ seg. (Flujo desarrollado) se observaron las siguientes estructuras o regiones de vorticidad (Figura 3):

- **Vortice principal:** Corresponde a la región más grande. El centro de este gran vortice se va moviendo aguas abajo con el incremento del tiempo. Igualmente esta estructura es la que en forma microscópica, al separarse del obstáculo formara la calle de vortices de Karman.
- **Región de recirculación:** Esta zona esta ubicada debajo del vortice principal y se caracteriza por contener poca concentración de vorticidad.
- **Zona de separación:** Es una zona de alta concentración de vorticidad y se encuentra cercana al punto de separación. En esta zona se encuentran el flujo arrastrado por el vortice principal y el flujo que viene bordeando el obstáculo desde el punto de estancamiento frontal. En teoría esto crea un par de vortices que giran en sentidos contrarios (conocido como el fenómeno β)¹⁷, en la figura 3 se alcanzan a detallar dichos vortices y la gran concentración de vorticidad en dicha zona.

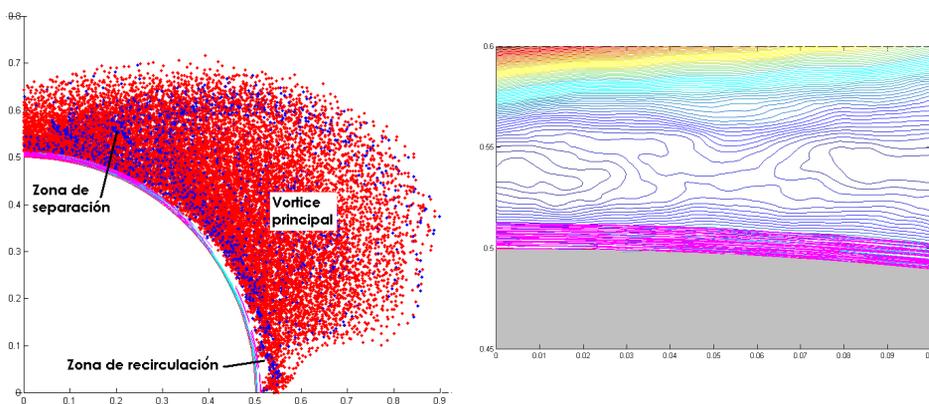


Figura 3. Estructuras o Regiones de vorticidad (izq) y detalle del fenómeno β en líneas de corriente (der.).

Forma de la calle de vortices de Karman a diferentes números de Reynolds. El algoritmo desarrollado puede simular con una buena aproximación, lo que sucede con la estela dejada por el obstáculo al variar el número de Reynolds.

Para un $Re=100$ no se observó separación de vortices libres de la superficie del obstáculo (figura 4.) Esta observación coincide con otros estudios teóricos⁹, Aunque experimentalmente

a través del uso de delicados aparatos se han detectado estelas periódicas hasta $Re=34$ ⁹. Además, la desviación estándar utilizada en la generación del número aleatorio es alta y esto conlleva a que la discretización del campo de vorticidad no sea muy buena.

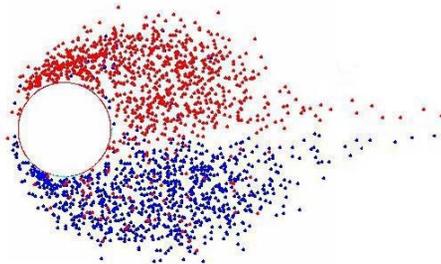


Figura 4. Estela dejada por un cilindro en un flujo a $Re=100$.

Para $Re = 200$, se aprecia la formación de una estela con separación de “vortices” periódicos, pero no son vortices libres sino que están unidos unos a otros, además la separación de dichos vortices no ocurre sobre la superficie del cilindro sino aproximadamente 2 diámetros aguas abajo, lo que coincide con algunos datos teóricos.¹ (Figura 5)

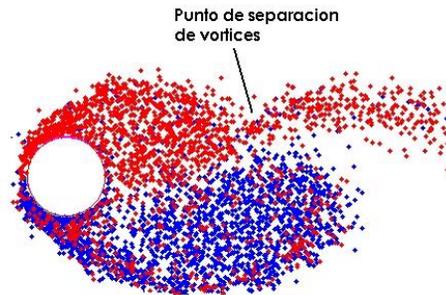


Figura 5. Estela dejada por un cilindro en un flujo a $Re=200$.

Para $Re = 1000$, se comienza a observar lo que se conoce como la inestabilidad de la calle de vortices, esto quiere decir que la calle de vortices se torna irregular e inclusive la forma de los vortices se distorsiona y su fluidez en ocasiones se vuelve caótica¹. Además, el punto de separación de los vortices libres se acerca más a la superficie del cilindro y finalmente la discretización del campo de vorticidad mejora substancialmente (figura 6).

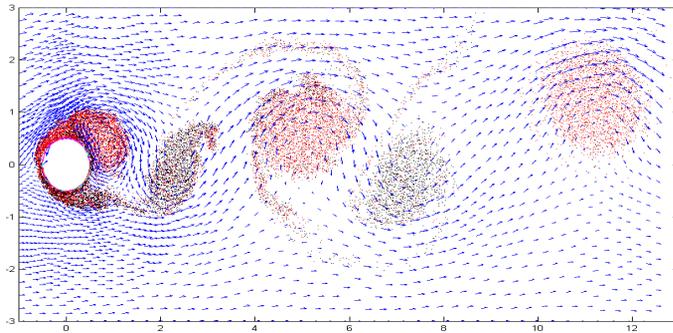


Figura 6. Estela dejada por un cilindro en un flujo a $Re=1000$.

A pesar que para un $Re = 10000$ la capa límite es aún laminar la estela es completamente turbulenta y la inestabilidad se hace aún mayor. Para este número de Re se pueden observar vórtices libres (figura 7) desprendiéndose alternativa y directamente desde la superficie del cilindro, viajando aguas abajo con el flujo a una velocidad inferior a la velocidad del fluido (Para este caso es de aproximadamente el 70% de la velocidad del fluido libre).

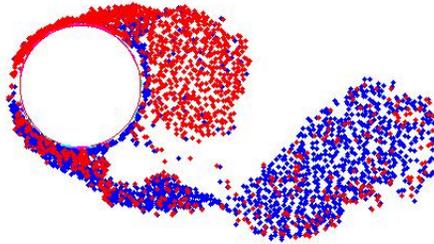


Figura 7. Estela dejada por un cilindro en un flujo a $Re=10000$.

4.2 Resultados cuantitativos

Angulo de separación. El punto de separación es aquel en el cual el fluido dentro de la capa límite comienza a cambiar su dirección de flujo debido a un gradiente de presión adverso (en otras palabras se invierte el sentido de flujo) ¹⁰. Debido a las condiciones iniciales del fluido (para $T=0$, $U=0$), en el algoritmo desarrollado, el fenómeno solo se puede observar después de varios incrementos de tiempo de simulación (aproximadamente a $t= 1$ seg). Este fenómeno se manifiesta como un punto en el cual hay una alta generación de vorticidad con sentido contrario al normal desarrollado por el flujo. (figura 8). La siguiente figura además de

mostrar el punto de separación, muestra con mas claridad como es la discretizacion de la capa limite numerica o zona conocida como frontera con vortex sheets y no con vortex blobs.

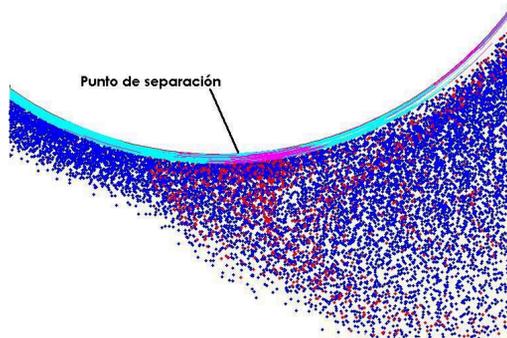


Figura 8. Punto de separación de la capa limite

Para estimar el valor del ángulo de separación se utilizó la escala en la que se realizó la simulación como se muestra en la siguiente figura.

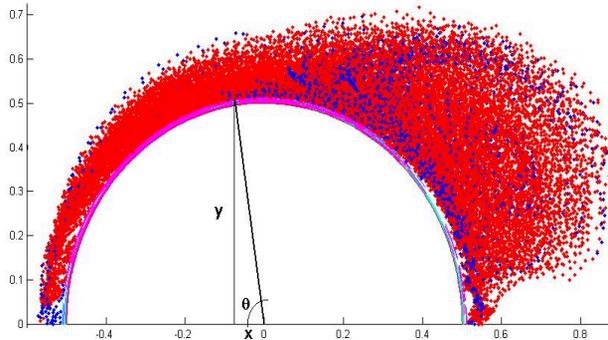


Figura 9. Angulo de separación de la capa limite. ($Re=1e4$ y $t=1$ seg)

Determinando las magnitudes de X y Y ($X=0.087$ m y $Y=0.493$ m) se obtuvo un valor de 80° para el ángulo mostrado como θ . En la teoría el ángulo de separación para números de Reynolds entre 200 y $3.2e5$ es de 82° medidos desde el punto de estancamiento delantero¹. El resultado de 90° obtenido por A. Y. Cheer⁷ utilizando el mismo método de vorticidad, corrobora los buenos resultados del algoritmo empleado.

Relación entre frecuencia de generación de vortices y el número de Reynolds. Como se había comentado anteriormente existe un número adimensional que involucra la frecuencia

con la que se generan los vortices en la estela del obstáculo, este es el número de Strouhal. (Ecuación 1). Con ayuda del algoritmo es posible determinar aproximadamente la frecuencia de generación de vortices, pero para ello es necesario un tiempo de simulación bastante alto, esto involucra un tiempo de CPU mucho mayor.

Re	St
100	0
200	0.148
1000	0.199
3160	0.18
10000	0.177
20000	0.2

Tabla 1. Resultados de la evaluación del número de Strouhal (St) a diferentes números de Reynolds (Re).

La relación entre el Número de Reynolds y el número de Strouhal obtenida se muestra en la siguiente figura.

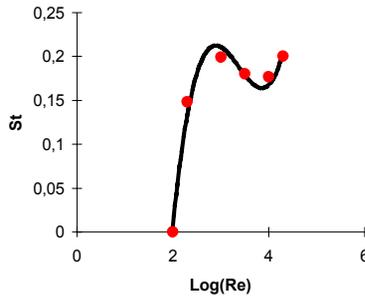


Figura 10. Relación entre el número de Re y el número de Strouhal.

Se realizó una regresión de los datos con un polinomio de grado 3, ya que la tendencia es que para $Re > 2e4$ Strouhal también aumente. La curva ajustada (Para esta regresión se obtuvo un factor de correlación $R^2=0.98$) corresponde a la siguiente ecuación:

$$S = 0.11 \cdot \log(\text{Re})^3 - 1.1 \cdot \log(\text{Re})^2 + 3.66 \cdot \log(\text{Re}) - 3.76 \quad (6)$$

Algunos estudios experimentales y teóricos ⁹ han encontrado para la primera parte ascendente de la curva para bajos números de Reynolds ecuaciones ajustadas de la siguiente forma:

$$S = 0.198(1-19.7/\text{Re}) \quad (7)$$

En la siguiente figura se muestra la comparación entre los datos teóricos obtenidos a partir de la ecuación 7 y los datos obtenidos de las simulaciones computacionales realizadas

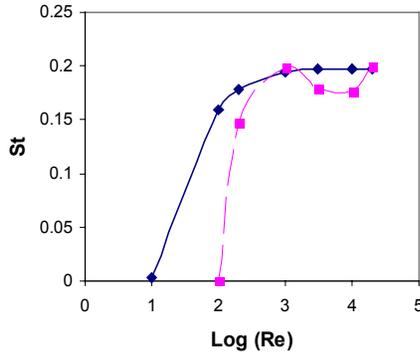


Figura 11. Comparación de los resultados obtenidos (línea a trazos) con la ecuación 7 (línea continua).

Sin embargo las ecuaciones teóricas no alcanzan a mostrar el real comportamiento de la curva es decir un ligero decaimiento en la misma para números de Reynolds entre $1e3$ y $1e4.5$ como se muestra en la siguiente figura obtenida experimentalmente ¹⁹.

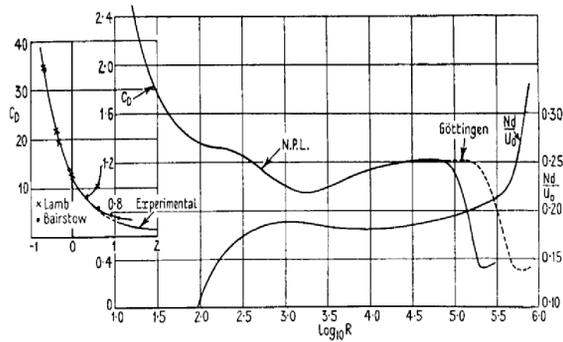


Figura 12. Curva experimental del número de Strouhal (St) en función del $\log_{10}(Re)$.

5. CONVERGENCIA DEL MÉTODO

Los parámetros numéricos involucrados en este método son:
 Re : El número de Reynolds

Γ_m : Unidad mínima de vorticidad. Es el valor único de vorticidad que puede tener un vortex sheet.

M : Número de fuentes o puntos de generación de vorticidad en la superficie del cilindro

K: Constante que determina la altura de la capa límite numérica.

Δt : Incremento del tiempo

Dominio computacional: Zona en la cual se analizara el flujo.

Antes de desarrollar una metodología para la convergencia hay que tener en cuenta ciertos factores que se enumeran a continuación:

1. La convergencia cualitativa básicamente depende de la unidad mínima de vorticidad (Γ_m). La cual determina si la vorticidad necesaria para discretizar el campo es la correcta.
2. La convergencia numérica se logra variando el resto de parámetros numéricos hasta lograr que una característica numérica del flujo en estudio alcance el valor esperado o teórico.
3. Para el modelo que se esta simulando la característica numérica seleccionada para verificar la convergencia numérica es el coeficiente de arrastre (Cd). Ya que la magnitud de esta variable se puede lograr en poco tiempo de simulación con lo cual se acorta el tiempo de CPU empleado para cada simulación. Por otra parte con la medición de esta variable se asegura el benchmarking del método por medio de la comparación de los resultados obtenidos con otras simulaciones e investigaciones realizadas en el mismo campo de estudio, ya que el coeficiente de arrastre es una buena medida de que tan bueno es el método numérico implementado¹¹.
4. Debido a que el Cd varía para cada Re diferente entonces la convergencia se lograra para un valor de Re fijo
5. En los métodos de vorticidad basados en partículas se ha podido demostrar que una buena convergencia se logra en la medida que un alto porcentaje de vortex blobs no penetre las paredes físicas de los obstáculos. Esto se asegura haciendo que la capa límite numérica (δ) sea mayor que el diámetro de corte (δ_c) utilizado en la ecuación para determinar la velocidad de los blobs. Por otra parte se sabe que un vortex sheet no se debe desplazar una distancia mayor a su longitud para lograr la estabilidad dinámica del método¹⁹.
6. El dominio computacional en el cual se realiza la simulación depende del flujo que se este analizando, para el caso de la calle de vortices de Karman es importante tener un dominio grande ya que fuera de dicho dominio el flujo se considera irrotacional y por consiguientes se eliminan todos los elementos de vorticidad que estén presentes. En el caso del efecto Von Karman la ubicación de la frontera de aguas abajo juega un papel muy importante ya que si esta se encuentra muy cerca del obstáculo puede inducir errores en el campo de velocidad simulado.

La metodología implementada en esta investigación, para lograr la convergencia del método se desarrollo de la siguiente manera:

1. Se fijan las fronteras o dominio del problema correctamente de acuerdo al flujo que se este modelando, para esta investigación se utilizo 20 diámetros aguas abajo, con el fin de observar completamente la calle de vortices y la alternación de la misma.
2. Se fija un número de Reynolds, es decir se fijan los valores de la velocidad del flujo libre (U), diámetro del cilindro (ϕ) y viscosidad del fluido (ν).
3. Se escoge un número de fuentes iniciales (M).
4. El diámetro de corte (δ_c) que da de una vez determinado ya que:

$$\delta_c = \frac{\phi}{M} \quad (8)$$

Esta magnitud del diámetro de corte se utiliza con el fin de asegurar la similitud entre el campo de velocidad inducido por un vortex sheet y un vortex blobs.

5. Se selecciona un valor para la constante k entre 1 y 5 ya que como se sabe teóricamente la capa limite laminar para una placa plana esta entre 1 y 5 veces la raíz cuadrada del número de Reynolds, es decir:

$$\delta = K \sqrt{2 \cdot \nu \cdot \Delta t} \quad (9)$$

6. Se determina la longitud de los vortex sheets que depende directamente del diámetro del cilindro y del número de fuentes, así:

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot \phi}{M} \quad (10)$$

7. Se determina la magnitud del incremento del tiempo gracias al ítem número 5 enumerado en los factores a tener en cuenta y utilizando las ecuaciones 8, 9 y 10, para finalmente obtener la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\delta_c}{K} \right)^2 \leq \Delta t \leq \frac{L}{2 \cdot U} \quad (11)$$

8. Para escoger la magnitud de la unidad mínima de vorticidad (Γ_m) correcta se debe lograr la convergencia cualitativa del método. Esto se logra variando el valor de Γ_m y teniendo fijos el resto de parámetros de acuerdo a las condiciones 3, 4, 5, 6 y 7 enumeradas anteriormente. Para cada variación del Γ_m se debe medir la circulación total presente en el dominio. A medida que se disminuye el valor de Γ_m el número de vortices parásitos debe disminuir de tal forma que la circulación total del sistema debe tender a un valor constante que depende del dominio en estudio. En el caso de flujo externos la circulación total tiende a una misma curva en el tiempo como se muestra en la figura 13. Se puede observar que a partir de un $\Gamma_m = 0.05$ m/s se logra una estabilidad tanto en el número de blobs presentes en el dominio como en la circulación y vorticidad del sistema.

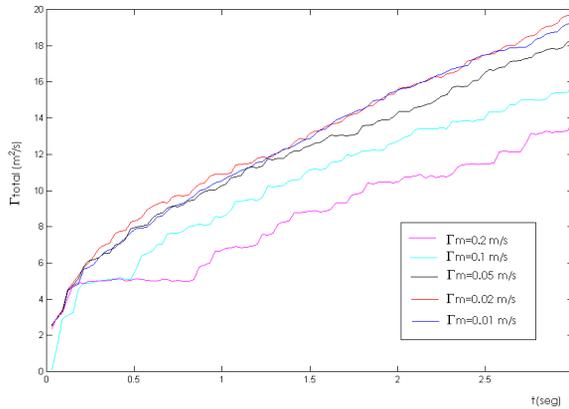


Figura 13. Circulación total para $Re=1000$, $M=40$, $K=3.3$ y $\Delta t=0.03$.

9. Una vez lograda la convergencia cualitativa se procede a lograr la convergencia cuantitativa. Esto se logra modificando el resto de los parámetros numéricos tal como se describe en los ítem 2, 3, 4, 5, 6 y 7; hasta llegar a un valor satisfactorio de la característica numérica seleccionada.. Este punto se discutirá con mas profundidad en el próximo ítem, ya que para calcular el C_d es necesario tener en cuenta otros conceptos teóricos que aun no se han discutido.
10. Se repite todo el proceso de convergencia para un número de Reynolds diferente.

5.1 Determinación de coeficiente de arrastre.

Debido a que el modelo numérico implementado se basa en las ecuaciones de evolución de la vorticidad, entonces se hace necesario poder determinar la fuerza de arrastre y de sustentación a la que esta siendo sometido el obstáculo basados en la información obtenido del campo de vorticidad. La forma de calcular el coeficiente de arrastre a partir del campo de vorticidad fue originalmente planteada por Prandtl en 1918 y fue extensivamente utilizada por Von Karman y Burgers en 1934 en flujos alrededor de alabes. Esta teoria se conoce con el nombre de momentum de vorticidad de un fluido¹²

Fuerza sobre el cilindro. Debido a que el campo de vorticidad esta discretizado en pequeños elementos de vorticidad puntual, entonces el momentum de vorticidad en un tiempo t se expresa como:

$$L = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \cdot r_i \times e_z \quad (12)$$

Donde:

Γ_i : es la circulación de cada blob

r_i : es el radio vector desde el centro del cilindro hasta la posición del blob

ez: es un vector unitario en la dirección perpendicular al plano donde se desarrolla el flujo.
 N: es el número de blobs totales utilizados para discretizar el campo de vorticidad

En cada incremento de tiempo se calcula I_x e I_y por medio de la ecuación 12 (figuras 14 y 15) se grafica esta función y se le hace un suavizado con el fin de eliminar el ruido producto del número aleatorio generado. Seguidamente se deriva esta curva numéricamente con ayuda de cualquier herramienta matemática, para obtener la fuerza de arrastre (F_x) y a la fuerza de sustentación (F_y).

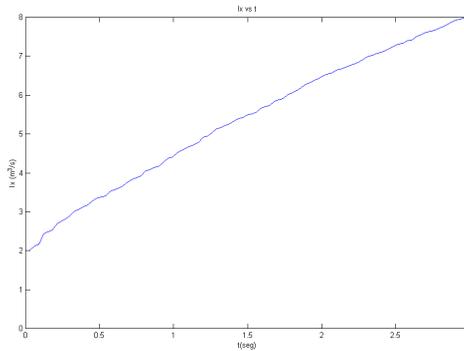


Figura 14. Curva característica de I_x en función del tiempo para $\Gamma_m = 0.05Re=1000$, $k=3$, $M=40$ y $\Delta t=0.036$.

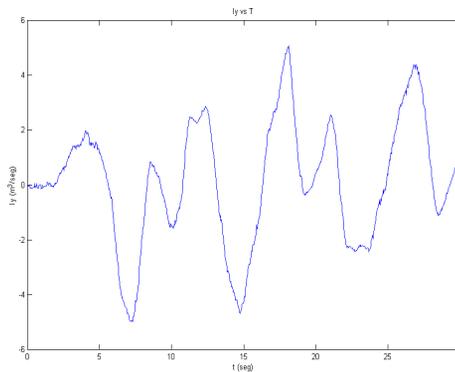


Figura 15. Curva característica de I_y en función del tiempo para $\Gamma_m = 0.1$, $Re=1000$, $k=3$, $M=40$ y $\Delta t=0.03$.

Esta curva muestra una oscilación de la componente del momentum en y aparentemente no periódica, pero debido a que I_y está relacionado con la fuerza de sustentación, entonces esta oscilación explica la forma como se induce vibraciones en cualquier cuerpo que se encuentre inmerso en un fluido. La información contenida en esta grafica es de suma importancia ya que su derivada corresponderá a la fuerza de sustentación y por otra parte si se hace un análisis

de Fourier a dichos datos se puede determinar la frecuencia de vibración del cilindro producto de la calle de vortices¹³.

Calculo del coeficiente de arrastre. Una vez conocidas las fuerzas ejercidas por el fluido sobre el cilindro entonces gracias a la definición del coeficiente de arrastre y de sustentación estos se pueden calcular por medio de las siguientes expresiones respectivamente:

$$C_d = \frac{2F_x}{\rho \cdot U^2 \cdot \phi} \quad (13)$$

$$C_l = \frac{2F_y}{\rho \cdot U^2 \cdot \phi}$$

Una vez obtenidas las curvas de fuerzas de arrastre entonces se proceden a graficar las curvas de C_d con ayuda de la ecuación 13 para los diferentes parámetros numéricos utilizados en la convergencia. Debido a que el coeficiente de arrastre es un número adimensional entonces es necesario adimensionalizar el tiempo por medio de la siguiente expresión.

$$T = \frac{Ut}{R} \quad (14)$$

Donde:

T: es el tiempo adimensionalizado

t: es el tiempo real

U: es la velocidad del flujo libre

R. es el radio del cilindro

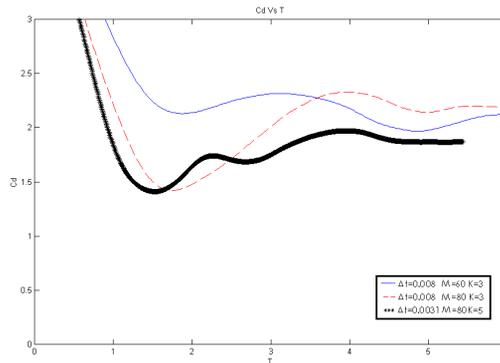


Figura 16. C_d en función del tiempo para tres combinaciones de parámetros diferentes

Una vez se inicia la simulación lo primero que aparece es el vortice principal el cual obliga a una caída inicial en el valor del coeficiente de arrastre, pero después de unos pocos

incrementos de tiempo la aparición y crecimiento del vortice secundario sobre la superficie del cilindro incrementa el coeficiente de arrastre debido a que la capa limite se corre un poco hacia la parte delantera del cilindro incrementando su espesor. Finalmente a medida que el vortice principal se va alejando y separando de la superficie del cilindro entonces el coeficiente de arrastre comienza a descender y a tender a un valor constante logrado cuando se estabiliza la frecuencia de generación de vortices. Esto explica la oscilación de la curva del coeficiente de arrastre en función del tiempo¹⁴.

En la figura 16 se pueden observar algunos detalles muy importantes, el primero es que a medida que se aumentan el número de fuentes o puntos de generación de vorticidad entonces la curva predice con mayor exactitud lo que ya se había explicado relacionado con la oscilación de la curva. Por otra parte a medida que se disminuye la magnitud del incremento del tiempo la pendiente de la curva en los primeros incrementos de tiempo tiende a ser grande esto es un fenómeno encontrado en otras simulaciones de flujos alrededor de un cilindro en las que se ha concluido que esta alta pendiente es producto de las condiciones iniciales del flujo es decir producto de que la velocidad del fluido súbitamente cambia de 0 a U lo que en el argot técnico se conoce como “impulsively started flow”. Finalmente se puede observar que el valor final del Cd esta disminuyendo y tendiendo hacia el valor teórico esperado de $C_d=1$ a medida que se refinan los parámetros numéricos involucrados en la simulación.

El siguiente paso para lograr la convergencia correspondería a disminuir el incremento del tiempo y aumentar el número de fuentes, manteniendo constante el valor de K en 5. Esta combinación de parámetros conlleva a requerir recursos computacionales muy altos y solo poder observar tiempos de simulación demasiado cortos, de esta forma se tomaron los siguientes parámetros numéricos: $\Delta t=0.001$, $M=150$, $K=5$, con los cuales se obtuvo la siguiente curva.

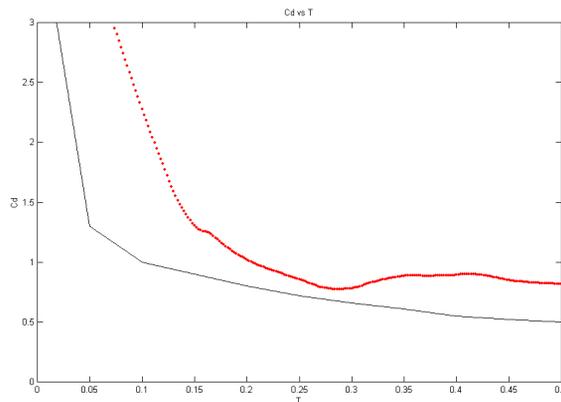


Figura 17. Cd en función del tiempo para $\Delta t=0.001$, $M=150$ y $K=5$ (puntos) comparado con resultados de P.Koumoutsakos & A. Leonard (línea continua).

En la figura 17, finalmente se puede observar que la tendencia de la curva se esta ajustando cada vez mas a los valores teóricos esperados así como a los resultados obtenidos en otras simulaciones. En la siguiente figura se muestran resultados obtenidos en otras simulaciones.

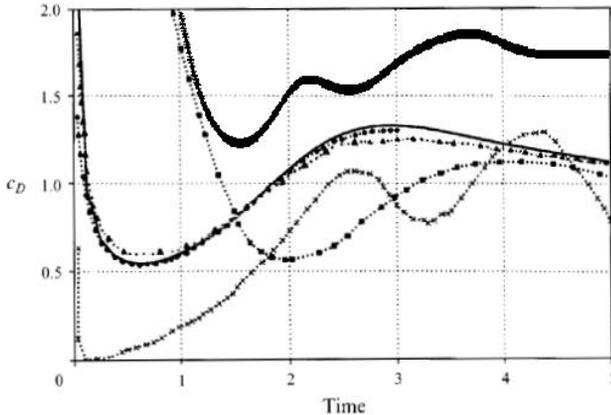


Figura 18. Comparación del C_d para un $Re=1000$ obtenido a través de distintos métodos numéricos¹⁴. La línea continua más gruesa representa este estudio

6. CONCLUSIONES

1. A través de este estudio se pudo comprobar que los métodos de vorticidad pueden ser muy útiles para una rápida comprensión, especialmente cualitativa, de cualquier problema de mecánica de fluidos
2. Se pudo comprender de manera precisa la dinámica de la generación y posterior evolución de la calle de vortices de Karman utilizando un método de vorticidad; De igual forma, gracias a la utilización de la teoría del momentum de vorticidad se pudo entender y explicar la manera en que operan las fuerzas de arrastre y sustentación de un obstáculo inmenso en un fluido en movimiento.
3. Se obtuvo una correlación entre la frecuencia de generación de vortices y la velocidad del fluido libre que pasa alrededor de un obstáculo. Estos resultados se muestran muy acorde con otros estudios teóricos y experimentales relacionados con el fenómeno de vortices de Karman.
4. Para poder hacer estudios y análisis cuantitativos de cuidado es necesario reevaluar el algoritmo ya que los cálculos realizados por el programa aumentan en orden cuadrático con el tiempo y por ende con el número de vortex blobs utilizados en la discretización del campo de vorticidad. Esto implica un consumo de tiempo de CPU aun mayor y por ende significa que para poder observar detalles numéricos más precisos sería necesario implementar un algoritmo que permitiera cambiar este crecimiento cuadrático por uno de tipo $N \cdot \log(N)$ o en su defecto uno lineal $O(N)$.

7. REFERENCIAS

- [1] P. K. Kundu, *Fluids Mechanics*, Academic Press, Inc. 1990
- [2] E. Naudascher, *Flow-Induced structural vibrations.*, Springer-Verlag. 1974
- [3] J. A. Sethian & A. F. Ghoniem. *Validation study of vortex methods*, Journal of Computational Physics. 1987..
- [4] F Sherman,. *Viscous Flow*. Editorial McGraw-Hill, 1990.
- [5] A. J Chorin, *Numerical study of slightly viscous flow*. Journal of Fluids Mechanics 1973
- [6] A.F Ghoniem & Y Cagnov. *Vortex simulation of laminar recirculation flow*. Journal of Computational Physics. 1986
- [7] A.Y Cheer,. *Unsteady separated wake behind an impulsively started cylinder in slightly viscous fluid*, Journal of Fluid Mechanics. 1988.
- [8] A. J Chorin *Vortex sheet approximation of boundary layers*, Journal of Fluids Mechanics, 1977.
- [9] S Godstein, *Modern developments in fluids dynamics*. Dover Publications, Inc. 1965
- [10] I. Shames, *Mecánica de Fluidos.* . Editorial Mc Graw Hill. 1995.
- [11] P Ramachandran, *Particle based flow solvers for incompressible flows in two dimensions*. Aeronautical society of India 2001.
- [12] P. G. Saffman. *Vortex Dynamics*. CAMBRIDGE University Press. 1992.
- [13] I Taylor & M. Vezza. *Calculation of the flow field around a square section cylinder undergoing forced transverse oscillations using a discrete vortex method*. Journal of Wind Engineering. 1999.
- [14], P. Koumoutsakos & A Leonard. *High-resolution simulation of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods*, Journal of Fluids Mechanics. 1995.