

## METODOS NUMERICOS PARA FLUJOS EN CAVIDADES CERRADAS

Jorge D'Elía<sup>†</sup>, Mario Storti<sup>†</sup> y Norberto Nigro<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)  
INTEC; Universidad Nacional del Litoral - CONICET  
Güemes 3450, 3000-Santa Fe, Argentina  
e-mail: cimec@ceride.gov.ar; <http://venus.ceride.gov.ar/cimec>

**Key Words:** flujos cerrados, flujos rotantes, ondas inerciales, ecuación de Poincaré, métodos numéricos, mecánica de fluidos

**Abstract.** *Consideramos algunos tópicos en flujos incompresibles en cavidades cerradas. Primero repasamos el problema de ondas inerciales dentro de cavidades rotantes cerradas y completamente llenas, cuya formulación diferencial es rederivada siguiendo la exposición de Kudlick/Greenspan, desde las ecuaciones de Navier-Stokes (caso viscoso) hasta la de Poincaré (caso invíscido). Luego reproducimos algunas soluciones semi-analíticas para esferoides (Kudlick) y, mediante el código numérico PETSC-FEM<sup>1</sup>, modelamos el caso de una esfera completamente llena con un líquido incompresible, relativamente poco viscoso, y que está rotando con velocidad angular promedio constante, pero perturbada con una pequeña componente periódica. A continuación, nos concentramos en un cómputo del flujo dentro un cilindro completamente lleno con un fluido incompresible muy viscoso, y que gira estacionariamente con un movimiento combinado de espín y de nutación. Este movimiento es típico del observado en propulsores rotantes estabilizados por un movimiento rápido de espín, cuando su eje de rotación instantáneo no coincide completamente con su eje de simetría axisimétrica. En este caso, las ecuaciones diferenciales de movimiento en el dominio del tiempo son expresadas en una terna de referencia no inercial que acompaña parcialmente los movimientos del cilindro (terna aerobalística) y luego son discretizadas. La solución numérica del patrón estacionario de flujo es también obtenida mediante el citado código numérico.*

## 1 INTRODUCCION

Una onda inercial es un cierto tipo de movimiento de respuesta frente a una perturbación introducida en un flujo rotante, en donde las fuerzas de Coriolis resultan predominantes. Tal movimiento de respuesta se relaciona con la conservación del momento angular del fluido y se presenta sólo bajo ciertas condiciones, e.g. ver Batchelor<sup>2</sup>. Específicamente, éstas pueden surgir en un contenedor completamente lleno con un líquido, el cual está rotando con una dada velocidad de espín, y simultáneamente es expuesto a una perturbación armónica en el tiempo de amplitud casi constante, cuya frecuencia de excitación  $\omega_e$  sea menor al duplo de la frecuencia de espín  $\Omega_s$  del flujo base, e.g. ver Manasseh<sup>3</sup>, Herbert<sup>4</sup>.

A un nivel mucho más simple, Stewartson<sup>5</sup> demostró que la rotación rápida de un trompo con líquido en su interior puede volverse inestable cuando la frecuencia de nutación del trompo y alguna de sus ondas inerciales son cercanamente resonantes, e.g. ver Henderson<sup>6</sup>. Ahí la nutación actúa como un término forzante para las ondas inerciales, por lo que son excitadas estacionariamente. Cuando el recipiente le transmite energía cinética al líquido, éste la devuelve en la forma de una cupla sobre el contenedor, acentuando los efectos de la nutación y dando lugar así a un proceso divergente.

Cuando se presentan condiciones propicias para su aparición, los modos inerciales de menor orden serán, en general, los más fáciles de excitar y pueden surgir en situaciones no previstas, e.g. en ingeniería aerospacial, cuando hay recipientes con líquidos de bajas viscosidades y que son estabilizados en su trayectoria mediante una rotación rápida de espín. Cuando en la dinámica del movimiento aparece alguna perturbación cercanamente periódica, podría hacer que el propulsor se salga de control, e.g. ver Herbert<sup>4</sup>, Vaughn<sup>7</sup> *et.al.* En tales casos, interesa un diseño de los tanques que reduzcan el riesgo de las oscilaciones inerciales. Típicamente, estas inestabilidades de vuelo suelen caracterizarse por un rápido crecimiento en el ángulo de desvío (yaw) y una pérdida simultánea en la velocidad de espín. Experimentos de laboratorio y ensayos de prueba muestran que se relaciona con el flujo interno confinado, e.g. ver Herbert,<sup>4</sup> Hall *et.al.*<sup>8</sup> Para recipientes cilíndricos y bajas viscosidades, esta inestabilidad puede estimarse con la teoría de Stewartson,<sup>5</sup> basada en aproximaciones de la capa límite, i.e. válida para números de Reynolds muy altos. Por otra parte, otros experimentos, e.g. ver D'Amico,<sup>9</sup> Miller<sup>10,11</sup> muestran que también puede presentarse una inestabilidad nutacional y frenado de espín equivalentes, aún con líquidos muy viscosos. En base a trabajos experimentales Herbert<sup>4</sup> hace dos observaciones. Primero, cuando el momento de frenado de espín y el aspecto de las fotografías en cilindros parcialmente llenos rotantes (Miller<sup>10</sup>), son correlacionados con el número de Reynolds, puede distinguirse al menos, tres regímenes:

- número de Reynolds bajos: el momento de frenado es proporcional al número de Reynolds, y la burbuja es prácticamente paralela al eje de espín, lo cual sugiere un movimiento del fluido simple que es prácticamente independiente de la coordenada axial, excepto en los entornos de las paredes;

- números de Reynolds intermedios: el momento de frenado alcanza un máximo, y la presencia de una distorsión ondulante de la burbuja parece indicar una estructura celular surgida de una inestabilidad hidrodinámica del flujo básico frente a perturbaciones periódicas axiales;
- números de Reynolds altos: el momento de frenado decrementa de un modo poco claro, pero las observaciones sugieren un movimiento turbulento.

Segundo, la presencia de un ángulo de nutación hace que las ecuaciones se desvíen de la rotación rígida, en donde la misma nutación es un término forzante. Cuando la frecuencia de espín es bastante mayor que la de nutación  $\omega_s \gg \omega_n$ , la burbuja queda muy cerca del eje del cilindro en donde: (i) con fluidos muy viscosos, la forma de la burbuja es la de un cilindro cuyo eje tiene el aspecto de una curva en forma de un S-suave, la cual permanece constante en aspecto y orientación con respecto al eje de nutación; (ii) mientras que con fluidos poco viscosos, la burbuja cilíndrica se distorsiona bastante. Estas observaciones experimentales respaldan la idea de que los fluidos viscosos tienen un campo de velocidad prácticamente estacionario en la terna aerobalística, esto es, aquella terna cuyos ejes nutan con el cilindro pero no lo acompañan en su movimiento de espín, ver Fig. 1, mientras que en la terna fija al recipiente el flujo será periódico, de periodo  $2\pi/\omega_s$ , donde  $\omega_s$  es la rapidez de espín medida desde la terna aerobalística. En base a estas observaciones Herbert propone un modelo simplificado en base a los parámetros: relación de aspecto, ángulo de nutación, frecuencia de nutación y número de Reynolds.

En este trabajo trataremos independientemente: (i) la excitación de ondas inerciales dentro de una esfera, llena con un fluido incompresible poco viscoso, y que está rotando alrededor de su eje vertical con velocidad angular variable  $\hat{\Omega}(t) = \Omega + \varepsilon\omega \cos(\omega t)$ , donde  $t$  es el tiempo,  $\Omega$  es constante y  $0 < \varepsilon \ll 1$ , caso basado en el trabajo experimental y analítico de Aldridge y Toomre<sup>12</sup>; y (ii) el flujo dentro de un cilindro completamente lleno con un fluido incompresible muy viscoso, y que está girando estacionariamente con un movimiento combinado de espín y de nutación, caso tratado por Vaughn *et.al.*<sup>7</sup> En este caso, las condiciones de borde y los términos impulsores son estacionarios (desde la terna aerobalística), por lo que el régimen de flujo resultante también es estacionario.

## 2 ONDAS INERCIALES EN FLUJOS ROTANTES

### 2.1 Modos inerciales invíscidos

Consideramos un contenedor completamente lleno (i.e. sin superficie libre) con un fluido viscoso e incompresible, rotando con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  uniforme alrededor del eje vertical  $\mathbf{z}$ . El dominio de flujo cerrado es  $V$  y su borde es  $A$ . En la terna solidaria al contenedor rotante, la ecuación viscosa linealizada y adimensional, para el balance en la cantidad de movimiento, la escribimos en la forma

$$(\partial_t + 2\hat{\mathbf{z}} \times -Re^{-1}\nabla^2) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}; \quad (1)$$

donde  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  es la velocidad,  $p = p(\mathbf{r}, t)$  es la presión reducida (e incluye la presión centrífuga),  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$  es la velocidad angular,  $Re$  es el número de Reynolds,  $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$  es el operador de Laplace, y  $\times$  denota producto vectorial. En la aproximación invíscida, con  $Re \rightarrow \infty$ , las soluciones para la velocidad  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  y la presión  $p = p(\mathbf{r}, t)$ , las representamos como una superposición de sus respectivos modos naturales, e.g. ver Greenspan<sup>13</sup>, Roberts/Soward<sup>14</sup>,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_m \mathbf{U}_m e^{i\lambda_m t}; \\ p &= \sum_m P_m e^{i\lambda_m t}; \end{aligned} \tag{2}$$

donde  $(U_m, P_m, \lambda_m)$  es el modo invíscido inercial  $m$  e  $i$  es la unidad imaginaria. Introduciendo la representación (2) en la Ec. 1 e incluyendo las condiciones de borde obtenemos, para cada modo inercial  $m$  en el dominio de la frecuencia, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} i\lambda \mathbf{U}_m + 2\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{U} + \mathbf{F} = \mathbf{0} & \text{en } V; \\ \nabla \cdot \mathbf{U}_m = 0 & \text{en } V; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_m = 0 & \text{en } A; \end{cases} \tag{3}$$

donde  $\mathbf{n}$  es el versor normal de la superficie, las cuales expresan, respectivamente, el balance de la cantidad de movimiento, incompresibilidad del fluido y flujo deslizante en las paredes sólidas.

## 2.2 Velocidad invíscida en función de la presión

Para obtener una ecuación de los modos inerciales y sus condiciones de contorno, Kudlick<sup>15</sup> primero expresa la velocidad como una función explícita de la presión. Para tal fin, consideremos la ecuación para cada modo  $U \equiv U_m$ ,

$$i\lambda \mathbf{U} + 2\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{U} + \mathbf{F} = \mathbf{0}; \tag{4}$$

en donde  $\mathbf{F} \equiv \nabla p$ . Entonces,

$$i\lambda \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 2 \\ U_x & U_y & U_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{5}$$

y tendremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} i\lambda U_x - 2U_y &= -F_x \\ i\lambda U_y + 2U_x &= -F_y \\ i\lambda U_z &= -F_z \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

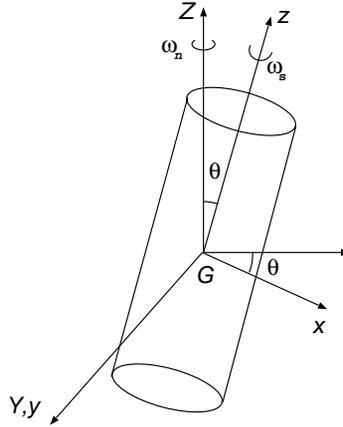


Figura 1: Terna inercial  $X, Y, Z$  y aerobalística  $(x, y, z)$  (acompaña al cilindro solo en la nutación).

El determinante del sistema  $D = i\lambda(4 - \lambda^2)$  es regular siempre que  $|\lambda| \neq 2$ . Resolviendo por determinantes, tendremos

$$\begin{cases} U_x = \alpha [F_x - (2i/\lambda) F_y] ; \\ U_y = \alpha [F_y - (2i/\lambda) F_x] ; \\ U_z = \alpha [F_z - (2i/\lambda) F_z] ; \end{cases} \quad (7)$$

donde

$$\alpha = \frac{-i\lambda}{4 - \lambda^2} . \quad (8)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\frac{-2}{i\lambda} (\mathbf{z} \times \mathbf{F}) = \frac{-2}{i\lambda} \begin{bmatrix} F_y \\ -F_x \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad (9)$$

obtendremos una expresión estándar, e.g. ver Zhang<sup>16</sup>, Henderson<sup>6</sup>, para la velocidad como una función explícita de la presión

$$\mathbf{U}_m = \frac{-i\lambda_m}{4 - \lambda_m^2} \left[ \nabla P_m - \frac{2}{i\lambda_m} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla P_m) - \frac{4}{\lambda_m^2} (\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla P_m) \hat{\mathbf{z}} \right] . \quad (10)$$

### 2.3 Ecuación para los modos de presión invíscidos

Para obtener la ecuación de los modos de presión inerciales y sus condiciones de borde, nos bastan las dos condiciones estándar correspondientes en los flujos incompresibles invíscidos, esto es, la de incompresibilidad del fluido y que el flujo es deslizante sobre las paredes sólidas. De la primera,

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_m = \partial_x U_x + \partial_y U_y + \partial_z U_z = 0 ; \quad (11)$$

e introduciendo la Ec. 10,

$$\partial_x U_x = \frac{-i\lambda}{4 - \lambda^2} \left( \partial_x F_x + \frac{2}{i\lambda} \partial_x F_y \right) ; \quad (12)$$

$$\partial_y U_y = \frac{-i\lambda}{4 - \lambda^2} \left( \partial_y F_y - \frac{2}{i\lambda} \partial_y F_x \right) ; \quad (13)$$

$$\partial_z U_z = \frac{-i\lambda}{4 - \lambda^2} \left( \partial_z F_z + \frac{2}{i\lambda} \partial_z F_z \right) ; \quad (14)$$

pero  $(F_x, F_y, F_z) = (P_{,x}, P_{,y}, P_{,z})$ , reemplazando y sumando,

$$\nabla \mathbf{U}_m = \frac{-i\lambda}{4 - \lambda^2} \left( P_{,xx} + P_{,yy} + P_{,zz} - \frac{4}{\lambda^2} F_z \right) = 0 ; \quad (15)$$

y así resulta la ecuación de Poincaré para los  $m$  modos invíscidos de presión, i.e.,

$$\nabla^2 P_m - \frac{4}{\lambda_m^2} (\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 P_m = 0 \quad ; \quad \text{en } V; \quad (16)$$

Ahora, introduciendo la Ec. 10 en la condición de flujo deslizante  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_m = 0$ , i.e. velocidad normal nula en las paredes sólidas, nos conduce a su condición de borde

$$\mathbf{n} \cdot \left[ \nabla P_m - \frac{2}{i\lambda_m} (\mathbf{z} \times \nabla P_m) - \frac{4}{\lambda_m^2} (\mathbf{z} \cdot \nabla P_m) \mathbf{z} \right] = 0 . \quad (17)$$

Observaciones sobre la ecuación de Poincaré:

- Una dificultad distintiva del sistema dado por las Ecs. (16-17) es que el autovalor  $\lambda_m$  aparece tanto en la ecuación diferencial como en la condición de borde;
- La ecuación será elíptica cuando  $\lambda_m > 4$  e hiperbólica cuando  $\lambda_m < 4$ , por lo que las ondas inerciales no existirán en el primer caso y sí las habrá en el segundo, i.e. sólo serán posibles cuando la perturbación sea  $|\lambda_m/\Omega| < 2$ . Este hecho es bien conocido en geofísica y en oceanografía, e.g. ver Roberts/Soward<sup>14</sup>;
- Cierta teorema, basado en principios de conservación, establece que los autovalores  $\lambda_m$  son reales y con módulo  $|\lambda_m| < 2$ , e.g. ver Kudlick.

| $L_{mk}$ | $\lambda_{mk1}$ | $\lambda_{mk2}$ |
|----------|-----------------|-----------------|
| $L_{21}$ | 1.00000         |                 |
| $L_{30}$ | 0.89443         |                 |
| $L_{31}$ | 1.38180         |                 |
| $L_{32}$ | 0.66666         |                 |
| $L_{40}$ | 1.30930         |                 |
| $L_{41}$ | 0.61198         |                 |
| $L_{42}$ | 1.23190         |                 |
| $L_{43}$ | 0.50000         |                 |
| $L_{50}$ | 0.57046         | 1.5301          |
| $L_{51}$ | 1.32970         | 1.7404          |
| $L_{52}$ | 0.46690         | 1.4964          |
| $L_{53}$ | 1.05320         |                 |
| $L_{54}$ | 0.38970         |                 |

Tabla 1: Autovalores  $\lambda_{mkl}$  por resolución numérica de la Ec. 27 en la esfera unitaria, para los polinomios asociados de Legendre  $L_{mk}$  indicados. Se excluyen las raíces 0 y 2.

| modo $(m, n)$ | $\Omega/\omega$ | $\omega/\Omega$ |
|---------------|-----------------|-----------------|
| 11            | 0.764           | 1.30890         |
| 21            | 1.066           | 0.93809         |
| 31            | 1.377           | 0.72622         |
| 41            | 1.691           | 0.59137         |

Tabla 2: Picos de resonancia experimentales/análiticos según Aldrige/Toomre [AT] en las oscilaciones inerciales dentro de una esfera llena con un líquido viscoso, rotando alrededor del eje vertical con velocidad angular variable  $\Omega = \Omega + \varepsilon\omega \cos(\omega t)$ , donde  $\varepsilon = 8^0$ . Los picos de presión fueron medidos en el centro de la esfera.

### 2.4 Solución semi-analítica para esferoides

La ecuación de la superficie de una esfera unitaria está dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  en coordenadas cartesianas, y por  $r^2 + z^2 = 1$  en coordenadas cilíndricas, donde  $r^2 = x^2 + y^2$ . La correspondiente a un esferoide la podemos poner como  $r^2 + z^2/b^2 = 1$ , donde  $b > 0$ , pero también puede emplearse un sistema de coordenadas no-ortogonal  $\zeta, \mu$  de Greenspan, relacionado con el cilíndrico  $r, \phi, z$  mediante la transformación

$$\begin{cases} r = \alpha(1 - \zeta^2)^{1/2}(1 - \mu^2)^{1/2} \\ z = \alpha\beta\zeta\mu \end{cases} \quad (18)$$

donde  $\alpha, \beta$  son constantes a determinar, y la ecuación del esferoide se reduce a

$$\zeta = \frac{b}{\alpha\beta} = \begin{cases} b < 1 \text{ esferoide } \textit{oblato} \text{ (achatado en los polos)}; \\ b > 1 \text{ esferoide } \textit{prolato} \text{ (alargado en los polos)}. \end{cases} \quad (19)$$

La ventaja de este sistema de coordenadas no-ortogonal es que facilita la resolución de la ecuación de Poincaré. Efectivamente, puede demostrarse que en tal sistema, e.g. ver Zhang<sup>16</sup>, Kudlick<sup>15</sup> o Lyttleton<sup>17</sup>, las soluciones modales para la onda de presión inercial estarán dadas por

$$P_m(\zeta, \mu) = L_{mk}(\zeta)L_{mk}(\mu)e^{ik\omega} ; \quad (20)$$

siempre que

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{4}{\xi^2} - 1 ; \\ \alpha^2 &= \frac{1 + \varepsilon(1 - \xi^2)}{(1 + \varepsilon)(1 - \xi^2)} ; \end{aligned} \quad (21)$$

en donde

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda/2 ; \\ \varepsilon &= (1 - b^2)/b^2 ; \end{aligned} \quad (22)$$

mientras que  $L_{mk}$  son los polinomios asociados de Legendre, e.g. ver Gray/Gubbins<sup>18</sup>,

$$L_{mk} = (1 - u^2)^{k/2} \frac{d^k L_m}{du^k} ; \quad (23)$$

que se calculan a partir de los polinomios de Legendre

$$L_m = \frac{1}{2^m m!} \frac{d}{du} (u^2 - 1)^m . \quad (24)$$

Los autovalores  $\xi$  los obtenemos a partir de la condición de borde dada por la Ec. 17, y que se reduce al problema de autovalores

$$(1 - u^2) \frac{dL_{mk}}{du} = k \left( \frac{1 + \varepsilon u^2}{1 + \varepsilon} \right) L_{mk} ; \quad (25)$$

el cual tendrá en general  $l$  raíces, excluyendo el 0 y el 1, y en donde

$$u = \frac{\xi}{[1 + \varepsilon(1 - \xi^2)]^{1/2}} . \quad (26)$$

Para la esfera unitaria tendremos  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = 1$ , y los autovalores  $\lambda = \lambda_{mkl} = 2\xi$  serán las raíces de

$$(1 - u^2) \frac{dL_{mk}}{du} = kL_{mk} . \quad (27)$$

En la Tabla 1 se muestran los autovalores  $\lambda$  obtenidos por resolución numérica de la Ec. 27 en la esfera unitaria mediante Octave, para los polinomios asociados de Legendre  $L_{mk}$  indicados, los cuales están, en general, en buen acuerdo con los de Kudlick<sup>15</sup>. En la Tabla 2 se incluyen los resultados experimentales de Aldridge y Toomre<sup>12</sup>.

| variable                    |                    | valor              |
|-----------------------------|--------------------|--------------------|
| rapidez angular base        | $\Omega$           | 1.00               |
| amplitud de la perturbación | $\varepsilon_{om}$ | 0.15               |
| paso de tiempo              | $\Delta t$         | $2\pi/\omega/32.0$ |
| número de pasos de tiempo   | $n_{step}$         | 320                |
| número de Reynolds          | Re                 | 5000               |

Tabla 3: Parámetros en los ejemplos numéricos por elementos finitos del flujo dentro de una esfera rotante, perturbada armónicamente en su velocidad angular.

| ejemplo | $\omega$ | $\Omega/\omega$ | número de vórtices    |
|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| 1       | 1.75000  | 0.5714          | $> 1$                 |
| 2       | 1.30890  | 0.7640          | 1 vórtice dominante   |
| 3       | 0.93810  | 1.0660          | 2 vórtices dominantes |
| 4       | 0.72622  | 1.3770          | 3 vórtices dominantes |
| 5       | 0.59137  | 1.6910          | 4 vórtices dominantes |

Tabla 4: Número de vórtices observados en las simulaciones numéricas de la esfera rotante oscilante.

## 2.5 Solución numérica para una esfera oscilante

Consideremos ahora las oscilaciones inerciales que se producen dentro de una esfera de radio  $R$  unitario, la cual está completamente llena con un líquido poco viscoso, y que está rotando alrededor del eje vertical con la velocidad angular variable  $\hat{\Omega} = \Omega + \varepsilon\omega \cos(\omega t)$ , donde  $\varepsilon = 8^0$ . Para este caso hemos empleado el código numérico PETSC-FEM.<sup>19</sup>

Se llevaron a cabo 5 corridas, denominadas aquí como ejemplos 1 a 5. Lo que se fue variando fue el valor de la frecuencia de la perturbación  $\omega$ , siendo el valor de la velocidad de rotación base (constante)  $\Omega = 1$  [rad/s]. Usamos pasos de tiempo variables según la intensidad de la perturbación  $\omega$ , de forma de tener en cada corrida 32 puntos por período de la perturbación y se simularon unos 5 períodos. En algunos casos la corrida se dio por finalizada un poco antes, cuando ya estaba prácticamente definido el patrón de flujo resultante. Esto no altera, prácticamente, los resultados obtenidos.

La malla consta de 4332 hexaedros y 8894 nodos asumiendo para la corrida una geometría axisimétrica que para nuestro código equivale a una malla 3D que tiene una sola fila de elementos en la dirección circunferencial. La malla posee un refinamiento hacia las paredes ya que el fenómeno físico es gobernado por la interacción a través de la capa límite que se forma entre el movimiento de la pared de la esfera y el fluido contenido. Esta capa límite es muy delgada, ya que se pretendió emular resultados teóricos inviscidos, con lo cual se adoptó el número de Reynolds

$$Re = \frac{RU_e}{\nu} = 5000 \quad (28)$$

donde el radio de la esfera  $R$  es elegido como su longitud característica,  $U_e$  es la velocidad de rotación de la pared de la esfera en el *ecuador*, por lo que la viscosidad cinemática  $\nu$  se

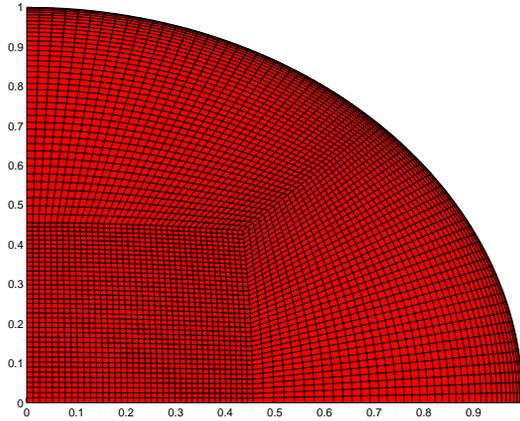


Figura 2: Vista  $xy$  de la malla por elementos finitos en la esfera rotante perturbada.

la obtiene como un resultado en la Ec. 28. La corrida fue planteada primero en la terna inercial, o sea el observador está fuera del sistema móvil. Las condiciones de contorno fueron las de rotación rígida, de amplitud variable en el tiempo sobre la pared exterior del contenedor esférico y, para evitar modos rígidos de presión, fijamos a ésta un valor de referencia en un solo nodo arbitrario, en este caso se eligió el origen de la esfera. El régimen de flujo asumido fue laminar.

A continuación se detallan los valores de  $\omega$  tomados, que en los ejemplos 2 a 5 se corresponden con las frecuencias naturales observadas experimentalmente y analíticamente por Aldridge y Toomre<sup>12</sup>, mientras que en el primero fue tomado para un valor de perturbación  $\omega$  tal que  $\Omega/\omega$  fuera inferior a la primera frecuencia de resonancia de la onda inercial. Hay que tener en cuenta que el barrido se hizo en el parámetro  $\Omega/\omega$ . Observaciones: (i) en el ejemplo 1 se presentaron varias celdas de vórtices, y no se forma un patrón con un único vórtice, el cual también debería aparecer, según datos experimentales. Suponemos que eso pasará cuando logremos poner la perturbación  $\omega$  en el primer modo; (ii) en el ejemplo 2, al invertirse la velocidad, hace que se formen momentáneamente algunos otros que luego se disipan. En la figura 2 se muestra una vista  $xy$  de la malla por elementos finitos empleada. En la figura 3 se muestra la respuesta temporal de la presión en el nodo vecino al origen por el eje de revolución. Están las 5 corridas incluidas. Se observa un decrecimiento de la amplitud a medida que aumentamos la relación  $\Omega/\omega$ , o sea a medida que disminuimos la perturbación  $\omega$ . Notemos como la onda periódica se va deformando a medida que  $\omega$  disminuye. En la figura 4 se muestra las isocurvas de módulo de la velocidad (descontada la rotación rígida).

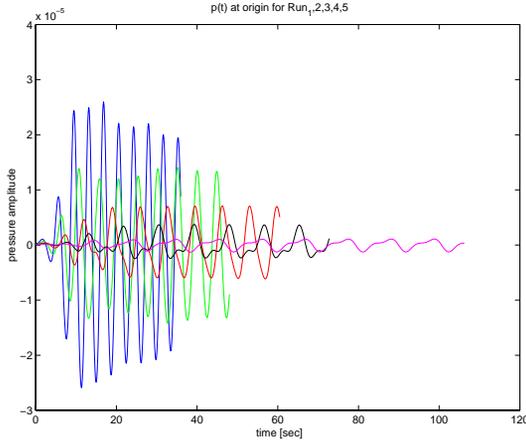


Figura 3: Respuesta temporal de la presión en el nodo vecino al origen por el eje de revolución.

### 3 FLUJO EN UN CILINDRO BAJO ESPÍN Y NUTACION

#### 3.1 Flujo rotante pseudo-compresible

Como ternas de referencia, en la literatura, se plantean: (i) la terna solidaria al cuerpo, por lo cual tiene el mismo movimiento de espín y de nutación con respecto al espacio inercial; y (ii) la terna aerobalística, cuyos ejes nutan con el cilindro pero no lo acompañan en su movimiento de espín, ver Fig. 1. Ambas ternas de referencia son no-inerciales y para la resolución numérica se elige la segunda.

Denotemos con  $\mathbf{V}' = (v'_r, v'_\phi, v'_z)$  la velocidad, relativa a la terna aerobalística, del flujo en las coordenadas cilíndricas  $r, \phi, z$ . Las condiciones de borde de un flujo viscoso en las paredes del recipiente son la de adherencia y flujo normal nulo

$$\begin{cases} v'_r = 0 \\ v'_\phi = r\omega_s \\ v'_z = 0 \end{cases} \quad (29)$$

donde  $\omega_s$  es el espín con respecto a la terna aerobalística. La condicion de borde para  $v'_\phi$  se debe a que el cilindro está rotando con respecto a dicha terna.

Para fluidos muy viscosos bajo rotación rápida, el flujo será bastante parecido a la rotación rígida del fluido, i.e.  $v'_\phi \approx r\omega_s$ . Para resaltar la desviación en el campo de velocidades con respecto a esta última, se elimina la rotación rígida mediante el cambio

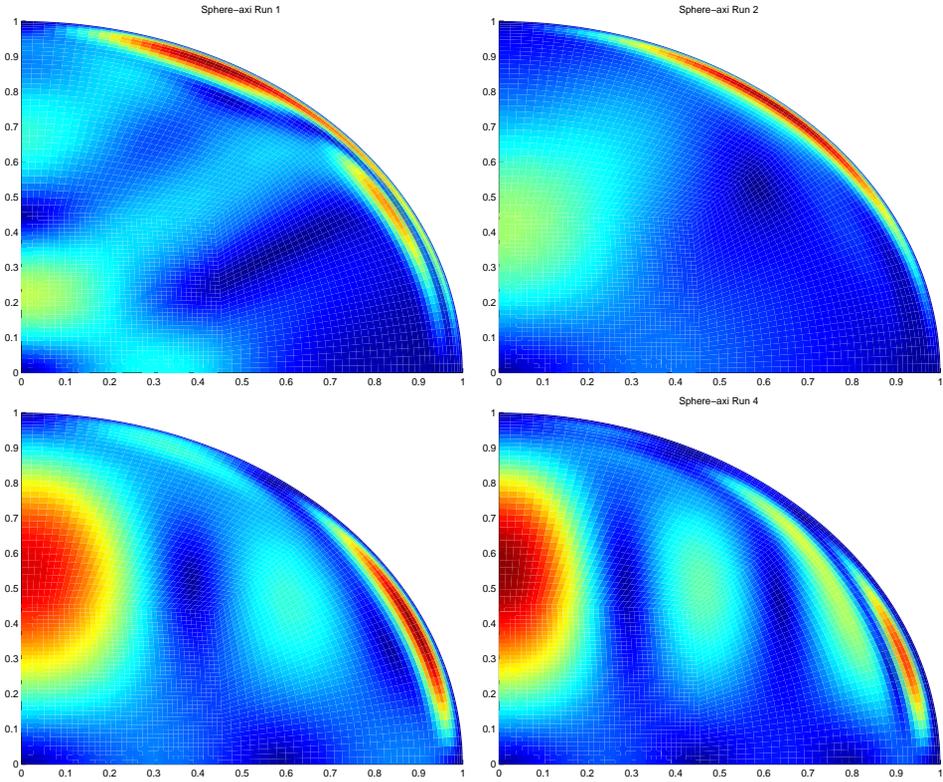


Figura 4: Isocurvas del módulo de la velocidad (descontada la rotación rígida) en la esfera oscilante.

de variables

$$\begin{cases} v'_r = v_r \\ v'_\phi = v_\phi + r\omega_s \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad (30)$$

sustituyendo en las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad, escritas en la terna aerobalística, Vaughn *et.al*<sup>7</sup> obtienen:

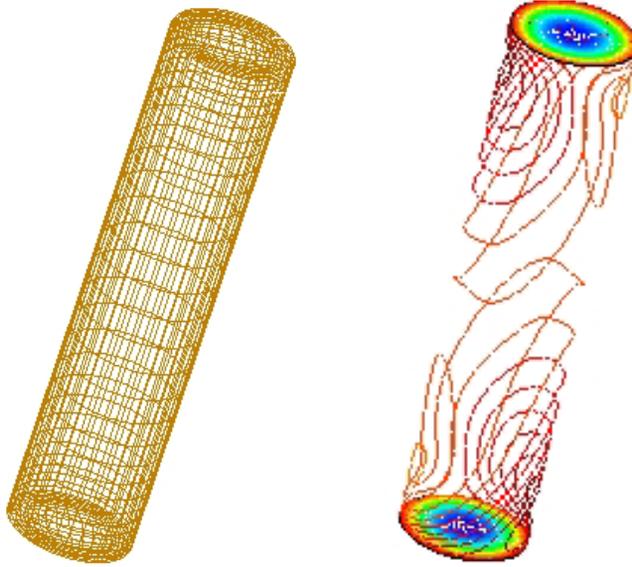


Figura 5: Flujo en un cilindro bajo espín y nutación. Izq.: vista parcial de la malla de elementos finitos. Der.: líneas de contorno de presión.

i) balance de momento radial  $r$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} = & -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{v_\phi^2}{r} - \omega_s \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + 2v_\phi \omega_p \\ & + 2v_z \omega_x \sin \phi + r\omega_p^2 + r\omega_x^2 \sin^2 \phi - z\omega_x \omega_z \cos \phi \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]; \end{aligned} \quad (31)$$

ii) balance de momento circunferencial  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} = & -v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} - \frac{v_r v_\phi}{r} - \omega_s \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - 2v_r \omega_p \\ & + 2v_z \omega_x \cos \phi + z\omega_x \omega_z \sin \phi + r\omega_x^2 \sin \phi \cos \phi \\ & - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} \right]; \end{aligned} \quad (32)$$

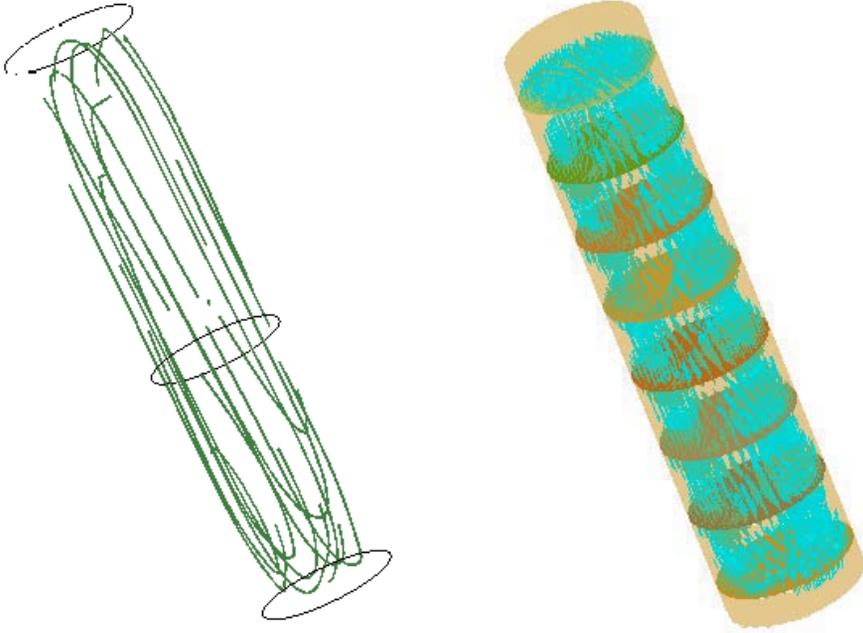


Figura 6: Flujo en un cilindro bajo espín y nutación. Izq.: vista en perspectiva de las líneas de corriente. Der.: vista en perspectiva del campo de velocidades.

iii) balance de momento axial  $z$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} = & -v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \omega_s \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - 2v_\phi \omega_x \\ & - 2v_r \omega_x \sin \phi - 2r\omega_s \omega_x \cos \phi - r\omega_x \omega_z \cos \phi + z\omega_x^2 \\ & - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]; \end{aligned} \quad (33)$$

iv) conservación de masa,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\rho}{\delta} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]. \quad (34)$$

### 3.2 Condiciones iniciales y de borde

Las condiciones iniciales del fluido no afectan al patrón de flujo estacionario. Se elige el estado de rotación rígida. Las condiciones de borde para las velocidades relativas son

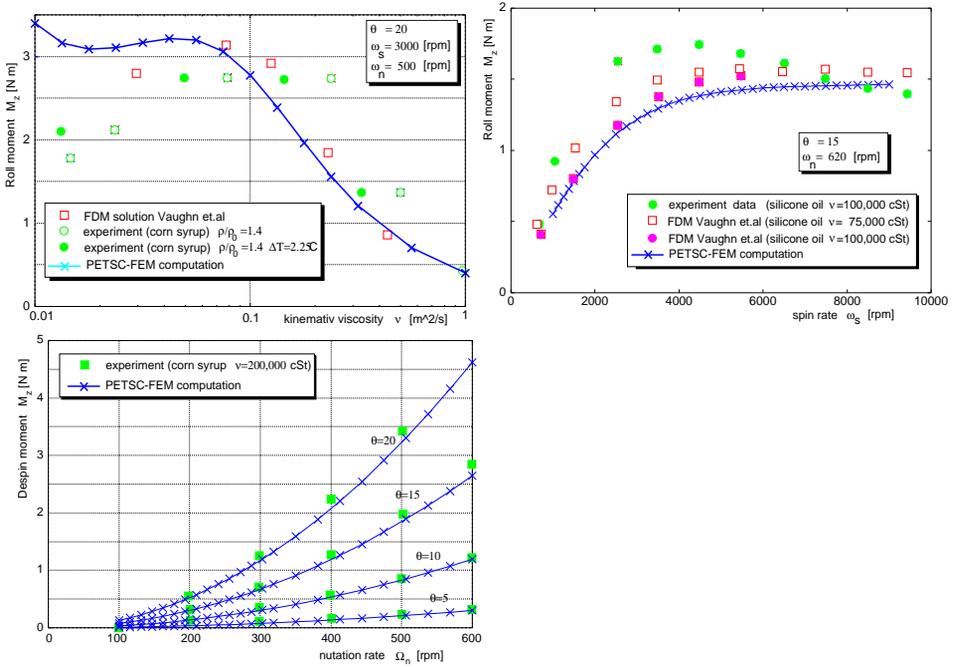


Figura 7: Flujo en un cilindro bajo espín y nutación. Momento de rolido  $M_z$  en función de: (i) la viscosidad cinemática  $\nu$ , arriba a la izquierda; (ii) la velocidad de espín  $\omega_s$  arriba a la derecha; y (iii) la velocidad y ángulo de nutación  $\theta$  y  $\omega_n$ , respectivamente, con velocidad de espín  $\omega_s = 3000$  [rpm], abajo a la izquierda. Se incluyen resultados experimentales de Miller y los numéricos por FDM de Vaughn *et al.*

$v_r = v_\phi = v_z = 0$ , mientras que para la presión hacemos cero todos los términos de velocidad en las Ec. de balance de momento. De las Ecs. 31 a 33 resultan

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho [r\omega_p^2 + r\omega_x^2 \sin^2 \phi - z\omega_x\omega_z \cos \phi] ; \quad (35)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} = \rho [+r\omega_x^2 \sin \phi \cos \phi + z\omega_x\omega_z \sin \phi] ; \quad (36)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho [-r\omega_x\omega_z \cos \phi + z\omega_x^2] ; \quad (37)$$

integrando estas ecuaciones

$$p = \rho \left[ \frac{1}{2} r^2 \omega_p^2 - r z \omega_x \omega_z \cos \phi + \frac{1}{2} r^2 \omega_x^2 \sin^2 \phi + \frac{1}{2} z^2 \omega_x^2 \right] + p_0 ; \quad (38)$$

en donde la constante de integración  $p_0$  es la presión hidrostática sin rotación. Se adopta  $p_0 = 0$ . Las condiciones de borde para la velocidad son idénticas a las de continuo, mientras que para la presión se adapta la ecuación de continuidad auxiliar, esto es, en las superficies laterales tendremos

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_R = -\frac{\rho}{\delta} \left. \frac{\partial v_r}{\partial r} \right|_R. \quad (39)$$

con  $R = R_{ext}, R_{int}$ , mientras que en las tapas inferior y superior

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{0,L} = -\frac{\rho}{\delta} \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_{0,L}. \quad (40)$$

### 3.3 Solución numérica del flujo en un cilindro bajo espín y nutación

Se adoptaron las mismas situaciones de cálculo consideradas en el trabajo de Vaughn *et. al.*, a efectos de validar los resultados obtenidos con el código PETSC-FEM y para los cuales se disponen resultados experimentales, e.g. los de D'Amico o Miller. Específicamente, las Figs. 9-11 del citado trabajo en donde, emplearon un cilindro de radio  $R = 2.375$  in  $\approx 144$  mm y de altura  $H = 20.75$  in  $\approx 1252$  mm.

En la Fig. 5: a la Izq. vemos una vista de la malla de elementos finitos empleada, donde los elementos son hexaedros, con  $n_{xy} \approx 430$  nodos en los planos perpendiculares al eje del cilindro, con  $n_z = 6$  capas de nodos a lo largo del eje axisimétrico, dando un total de  $N \approx 2600$  nodos; mientras que a la Der. mostramos las líneas de contorno de presión.

En la Fig. 6 (izq.) vemos una vista en perspectiva de las líneas de corriente, mientras que a la Der. graficamos la correspondiente al campo de velocidades.

En la Fig. 7 se muestra el momento de rolido  $M_z$  en función de: (i) la viscosidad cinemática  $\nu$ , arriba a la izquierda; (ii) la velocidad de espín  $\omega_s$ , arriba a la derecha; y (iii) la velocidad y ángulo de nutación  $\theta$  y  $\omega_n$ , respectivamente, con velocidad de espín  $\omega_s = 3000$  [rpm], abajo a la izquierda. Se incluyen resultados experimentales de Miller y los numéricos por FDM de Vaughn *et. al.*

En la Fig. 8 se muestra los campos de velocidades según los planos axi-simétricos  $yz$  (izq.) y  $xz$  (der.).

Finalmente, en la Fig. 9 se muestra una perspectiva de las líneas de contorno de velocidad en planos perpendiculares al eje axi-simétrico.

## 4 CONCLUSIONES

Hemos considerado dos problemas de flujos en cavidades cerradas bajo rotación con fluidos incompresibles: (i) la excitación de ondas inerciales de presión dentro de una esfera, completamente llena con un fluido incompresible viscoso, rotando alrededor de su eje vertical con velocidad angular variable  $\hat{\Omega}(t) = \Omega + \varepsilon\omega \cos(\omega t)$ , donde  $\Omega$  es su componente constante y  $0 < \varepsilon \ll 1$ . El número de vórtices observados en las simulaciones numéricas

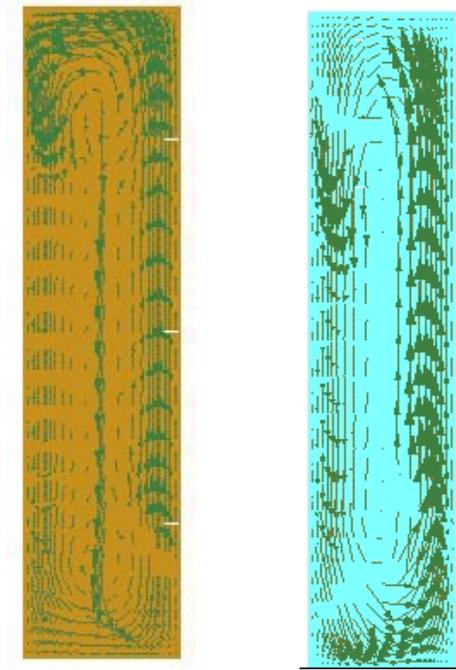


Figura 8: Flujo en un cilindro bajo espín y nutación. Campo de velocidades según: plano axi-simétrico  $yz$  (izq.); plano axi-simétrico  $xz$  (der.).

concuerdan, en general, con los reportados en el trabajo experimental/analítico de Aldridge y Toomre<sup>12</sup>, según lo resumido en la Tabla 4; y (ii) el flujo dentro de un cilindro cerrado, completamente lleno con un fluido muy viscoso, bajo un movimiento combinado de espín y de nutación, en donde las ecuaciones tridimensionales de Navier-Stokes escritas desde la terna aerobalística, estos es, aquella terna que acompaña sólo la nutación del cilindro pero no sigue su movimiento de espín, han sido resueltas en forma numérica también mediante una técnica de elementos finitos. Hay acuerdo general con los resultados de Vaughn *et al.*<sup>7</sup>, es decir, visto desde la terna aerobalística, el flujo es estacionario y dominado por la fuerza de Coriolis, además hay un razonable acuerdo con los resultados experimentales de Miller y los numéricos por FDM de Vaughn *et. al.*, en lo que respecta a la dependencia del momento de rolo  $M_z$  con: la viscosidad cinemática  $\nu$ ; la velocidad de espín  $\omega_s$ ; y la velocidad y ángulo de nutación  $\theta$  y  $\omega_n$ , respectivamente, dependencias resumidas en la Fig. 7.

**Agradecimientos** Este trabajo fue desarrollado gracias a subsidios de CONICET, ANPCyT y UNL a través de los proyectos CONICET-PIP-198/98 *Germen-CFD*, SECyT-

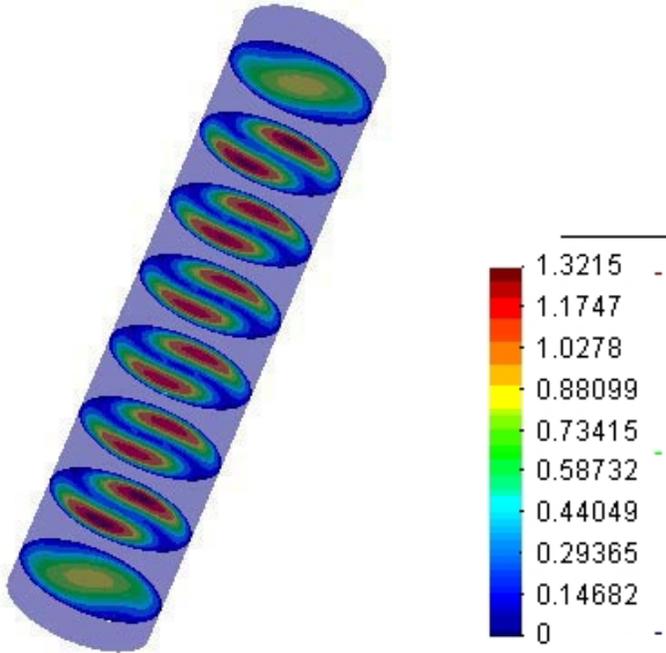


Figura 9: Flujo en un cilindro bajo espín y nutación: perspectiva de las líneas de contorno de velocidad.

FONCyT-PICT-6973 *PROA*, SECyT-PID-99/74 *FLAGS* y CAI+D-UNL-PIP-02552-2000. Se ha hecho uso intensivo de *Software Libre* como las librerías *MPI*, *SO GNU/Linux*, *Octave*, *Xfig*, *Tgif*, *GMV* y muchos otros, así como del procesador gráfico interactivo *GiD*<sup>20</sup>. A Gerardo Franck por su revisión del trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] PETSc-FEM: A general purpose, parallel, multi-physics FEM program. GNU General Public License (GPL), <http://minerva.arcrude.edu.ar/petscfem>.
- [2] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, (1970).
- [3] R. Manasseh. Breakdown regimes of inertia waves in precessing cylinder. *J. Fluid Mech.*, **243**, 261–296 (1992).
- [4] T. Herbert. Viscous fluid motion in a spinning and nutating cylinder. *J. Fluid Mech.*, **167**, 181–198 (1986).
- [5] K. Stewartson. On the stability of a spinning top containing liquid. *J. Fluid Mech.*, **5**, 577–592 (1959).

- [6] G.A. Henderson and K.D. Aldridge. A finite-element method for inertial waves in a frustum. *J. Fluid Mech.*, **234**, 317–327 (1992).
- [7] H.R. Vaughn, W.L. Oberkampf, and W.P. Wolfe. Fluid motion inside a spinning nutating cylinder. *J. Fluid Mech.*, **150**, 121–138 (1985).
- [8] P. Hall, R. Sedney, and N. Gerber. High reynolds number flows in rotating and nutating cylinders: spatial eigenvalue approach. *AIIA Journal*, pages 423–430 (February 1992).
- [9] W.P D’Amico. . Technical report, US Army Ballistics Res. Lab. Memo Rep. 02806, (1978).
- [10] M.C. Miller. . *J. Spacecraft and Rockets*, **18**, 286–288 (1981).
- [11] M.C. Miller. . *J. Guidance and Control*, **5**, 151–157 (1982).
- [12] K.D. Aldridge and A. Toomre. Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container. *J. Fluid Mech.*, **37**, 307–323 (1969).
- [13] Greenspan. *The theory of rotating flows*. Cambridge University Press, (1968).
- [14] P.H. Roberts and A.M. Soward, editors. *Rotating Fluids in Geophysics*. Academic Press, London, (1978).
- [15] M.D. Kudlick. *On transient motions in a contained rotating fluid*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, (1966).
- [16] K. Zhang. On equatorially trapped boundary inertial waves. *J. Fluid Mech.*, **248**, 203–217 (1993).
- [17] R.A. Lyttleton. *The Stability of Rotating Liquid Masses*. Cambridge University Press, (1953).
- [18] C.G. Gray and K.E. Gubbins. *Theory of Molecular Fluids*. Clarendon Press, Oxford, (1984).
- [19] V.E. Sonzogni, A. Yommi, N.M. Nigro, and M. Storti. Cfd finite element parallel computations on a beowulf cluster. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000*, (11-14 September 2000).
- [20] GiD. *International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE, Barcelona)*. Universidad Politécnic de Catalunya, (2000).