

MODELO DE DAÑO DIRECCIONADO PARA MATERIALES ANISÓTROPAS

Bibiana Luccioni^{*} and Sergio Oller[†]

^{*} Instituto de Estructuras
Universidad Nacional de Tucumán, CONICET
Av. Roca 1800, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina
e-mail: bluccioni@herrera.unt.edu.ar,

[†] Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña,
Campus Norte UPC, Gran Capitán S/N, 08034 Barcelona, España
e-mail: sergio.oller@upc.es

Key words: daño, direccionamiento, anisotropía, transformación de espacios.

Abstract. *El estudio del problema del daño con direcciones preferentes, normalmente denominado daño anisótropo, ha sido materia de estudio de los últimos años. Los modelos desarrollados se aplican a la representación del comportamiento tanto de materiales inicialmente isotropos como de materiales inicialmente anisotropos como la mayoría de los materiales compuestos.*

Existe una gran cantidad de trabajos que intentan describir este complejo comportamiento desde distintos puntos de vista. En este trabajo se presenta el problema desde una óptica basada en la formulación de la teoría de grandes deformaciones. Aunque físicamente no hay ninguna relación entre estos dos fenómenos, matemáticamente puede establecerse una comparación al nivel de formulaciones. Esta manera de interpretar el problema hace más simple la consideración de la anisotropía inicial y la implementación en códigos ya existentes que están orientados al estudio del problema de grandes deformaciones.

Se presenta en el trabajo la formulación del “daño direccionado anisótropo basado en la teoría de transformación de espacios” y su interpretación física. Se establecen además las bases termodinámicas del modelo. El trabajo se completa con la descripción de la implementación numérica de la formulación y ejemplos simples que muestran la capacidad de la misma para simular el comportamiento de materiales que presentan direccionalidad en el daño bajo historias de carga no proporcionales.

1 INTRODUCCIÓN

Los materiales cuasi-frágiles presentan una respuesta tensión-deformación no lineal debida principalmente a la microfisuración. En la mayoría de los casos estas microfisuras están orientadas siguiendo la historia de tensiones y producen un deterioro progresivo de la rigidez elástica del material. Si el material es inicialmente isótropo, se va tornando progresivamente anisótropo. En materiales con anisotropía inicial, el daño resulta orientado no sólo por la historia de tensiones sino también por la propia anisotropía del material que se modifica gradualmente a lo largo de la historia de carga.

El problema del daño con direcciones preferentes, normalmente llamado daño anisótropo o anisotropía inducida por el daño, ha sido estudiado en los últimos años debido a su aplicación a la representación del comportamiento de metales y geomateriales en general. También se ha hecho un esfuerzo significativo para describir la degradación de rigidez de materiales inicialmente anisótropos como los materiales compuestos. En este trabajo se trata el problema de la combinación de ambos efectos de direccionamiento del daño.

La capacidad de los modelos de daño continuo para predecir adecuadamente la degradación de rigidez depende fundamentalmente de la particular elección de la variable de daño utilizada para describir macroscópicamente el proceso micro-mecánico subyacente¹. La variable de daño escalar definida por Kachanov² no es capaz de representar el fenómeno de daño direccionado. Se han desarrollado numerosos modelos basados en vectores de daño³, tensores de daño de segundo orden^{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,8,17,18,19,20} y tensores de daño de cuarto orden^{8,17,18,19,20} para describir el direccionamiento del daño o anisotropía inducida en materiales cuasi-frágiles. Algunos de estos modelos tienen en cuenta, además, el efecto de la anisotropía inicial del material^{14,21} a través de la definición de un criterio de daño anisótropo.

Por otro lado, los modelos de daño continuo existentes en la bibliografía están basados en diferentes hipótesis para interpretar la el daño¹⁴: la *hipótesis de equivalencia de deformaciones*^{22,23} y la *hipótesis de equivalencia de energía*^{6,23}.

En este trabajo se presenta el problema desde una óptica conocida^{12,14,15}, basada en la formulación de la teoría de grandes deformaciones. Aunque no existe ninguna vinculación física entre ambos fenómenos se puede establecer una analogía al nivel de formulación matemática que conduce a resultados coincidentes con los de la hipótesis de equivalencia de energía. El tipo de enfoque propuesto presenta ventajas tanto para la incorporación del efecto de la anisotropía inicial como para la implementación en programas orientados al estudio de deformaciones finitas.

2 INTERPRETACIÓN DEL DAÑO

El daño puede ser interpretado como una transformación cinemática entre dos espacios^{12,14,15} (ver Figura 1): un *espacio dañado real* y un *espacio ficticio no dañado* que puede ser obtenido del real si se remueve el daño. En este espacio ficticio no dañado se supone que el material se comporta como si fuera virgen.

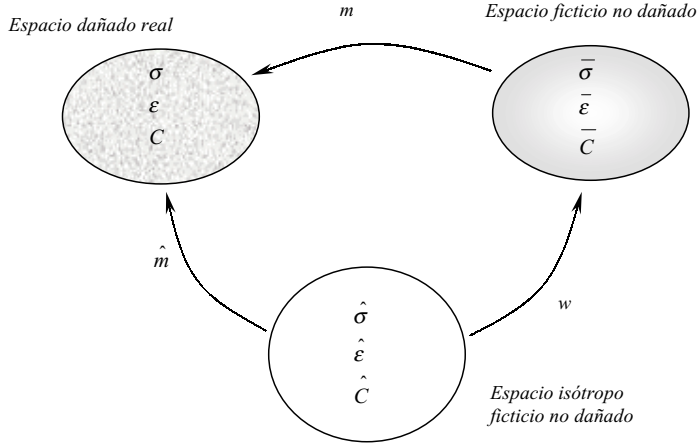


Figura 1: Correspondencia entre el *espacio dañado real*, el *espacio ficticio no-dañado*, y el *espacio isotrópico ficticio no dañado*.

Se acepta que existe una relación biunívoca entre los dos espacios que permite transformar una variable del espacio ficticio no dañado al espacio dañado real. Esta relación está basada en un cambio geométrico debido al daño y puede ser expresada como una transformación de tipo pull-back de los tensores de tensión y deformación desde la configuración no dañada a la dañada. Esto es,

$$\sigma_{ij} = m_{ik} m_{jl}^T \bar{\sigma}_{kl} = M_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = m_{ik}^{-T} m_{jl}^{-1} \bar{\epsilon}_{kl} = M_{ijkl}^{-1} \bar{\epsilon}_{kl} \quad (2)$$

Donde $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\epsilon}_{ij}$ y σ_{ij} , ϵ_{ij} son los tensores de tensión y deformación en los espacios no dañado y real respectivamente y m_{ij} es un tensor de transformación de segundo orden, similar al *tensor gradiente de deformación* utilizado en la teoría de grandes deformaciones. Al igual que el tensor gradiente de deformación, el *tensor de daño de segundo orden* m_{ij} es un tensor bipuntual que relaciona ambos espacios previamente definidos²⁴.

La ecuación constitutiva en el espacio ficticio no dañado puede ser escrita como,

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \quad (3)$$

Donde \bar{C}_{ijkl} es el tensor de rigidez elástica correspondiente al material virgen.

La ecuación constitutiva secante en el espacio real se expresa como,

$$\sigma_{ij} = C_{ijtu} \varepsilon_{tu} \quad (4)$$

Donde \bar{C}_{ijrs} es el tensor constitutivo secante en el espacio dañado. De acuerdo a las ecuaciones (1) a (4), este tensor puede ser expresado como una transformación de espacios de tipo pull-back del tensor constitutivo de cuarto orden desde la configuración ficticia no dañada a la dañada.

$$C_{ijrs} = M_{ijkl} \bar{C}_{klmn} M_{mnpq} = m_{ik} m_{jl}^T \bar{C}_{klmn} m_{mr} m_{ns}^T \quad (5)$$

Si el tensor m_{ij} es simétrico, el tensor constitutivo secante C_{ijrs} resulta simétrico pero generalmente no-isótropo.

La energía de deformación puede ser escrita en ambos espacios como,

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} M_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} M_{ijrs}^{-1} \bar{\varepsilon}_{rs} = \frac{1}{2} I_{klrs} \bar{\sigma}_{kl} \bar{\varepsilon}_{rs} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{kl} \bar{\varepsilon}_{kl} = \bar{W} \quad (6)$$

De donde queda claro que la energía es invariante respecto a los cambios de espacio, como se esperaba.

3 ANISOTROPÍA INICIAL

Para tener en cuenta la anisotropía inicial se introduce una nueva transformación de espacios (ver Figura 1)^{21,2526}. Se supone que existe un tercer espacio llamado *espacio isótropo ficticio no dañado* tal que la ley de daño referida a ese espacio es similar a la de un material inicialmente isótropo. Se pueden escribir entonces las siguientes relaciones,

$$\bar{\sigma}_{ij} = w_{ik} w_{jl}^T \hat{\sigma}_{kl} = W_{ijkl} \hat{\sigma}_{kl} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= m_{ik} m_{jl}^T \bar{\sigma}_{kl} = \hat{m}_{ir} \hat{m}_{js}^T \hat{\sigma}_{rs} = \hat{M}_{ijrs} \hat{\sigma}_{rs} \\ \varepsilon_{ij} &= \hat{M}_{ijrs}^{-1} \hat{\varepsilon}_{rs} \end{aligned} \quad (8)$$

Donde $\hat{\sigma}_{ij}$ y $\hat{\varepsilon}_{ij}$ son los tensores de tensión y deformación en el espacio isótropo ficticio no dañado y \hat{m}_{ij} es un tensor de transformación de segundo orden definido como,

$$\hat{m}_{ir} = m_{ik} w_{kr} \quad ; \quad \hat{M}_{ijrs} = \hat{m}_{ir} \hat{m}_{js}^T = m_{ik} w_{kr} m_{jl}^T w_{ls}^T \quad (9)$$

w_{kr} es un tensor de transformación constante que contiene información relacionada con la anisotropía inicial. Referido a los ejes principales de anisotropía, este tensor puede ser expresado como sigue,

$$w = \begin{bmatrix} (\sigma_{d1}/\sigma_d)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{d2}/\sigma_d)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{d3}/\sigma_d)^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Donde σ_{di} es el umbral de daño en compresión uniaxial en la dirección i y σ_d es el umbral de daño de referencia.

El tensor secante puede escribirse también como,

$$C_{ijrs} = \hat{M}_{ijkl} \hat{C}_{klmn} \hat{M}_{mnr} = \hat{m}_{ik} \hat{m}_{jl}^T \hat{C}_{klmn} \hat{m}_{mr} \hat{m}_{ns}^T \quad (11)$$

Donde,

$$\hat{C}_{klmn} = W_{ijkl}^{-1} \bar{C}_{ijrs} W_{mnr}^{-1} = w_{ik}^{-T} w_{jl}^{-1} \bar{C}_{ijrs} w_{mr}^{-T} w_{ns}^{-1} \quad (12)$$

4 BASES TERMODINÁMICAS Y DEFINICIÓN DEL MODELO DE DAÑO DIRECCIONAL

4.1 Energía libre y variables termodinámicas

La densidad de energía libre por unidad de volumen puede escribirse como,

$$\Psi(\varepsilon_{ij}, \chi_i) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl}(\hat{m}_{rs}) \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \alpha_i K_{ij}(\hat{m}_{rs}) \alpha_j \quad (13)$$

Donde ε_{ij} es el tensor de deformaciones y constituye la variable libre del problema. $\chi_i = \{\hat{m}_{ij}, \alpha_i\}$ representa el conjunto de variables internas necesarias para controlar el comportamiento del material con daño. Estas variables internas están compuestas por el tensor de daño de segundo orden \hat{m}_{ij} y las variables internas de endurecimiento α_j .

4.2 Disipación mecánica

De acuerdo a la segunda ley de la termodinámica²⁷ y teniendo en cuenta la expresión propuesta para la densidad de energía libre, la disipación mecánica por unidad de volumen resulta,

$$\Xi_m = -\dot{\Psi} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i \geq 0 \quad (14)$$

Después de establecer las condiciones de Coleman que son condiciones suficientes para asegurar una disipación no negativa $\Xi_m \geq 0$ (ver Lubliner²⁸), las ecuaciones constitutivas para el sólido resultan,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{Ecuación constitutiva}$$

$$Y_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial \chi_i} \quad \text{Variables internas conjugadas} \quad (15)$$

Las variables internas conjugadas pueden obtenerse y agruparse como sigue,

$$\mathbf{Y} = Y_i = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Donde $\hat{\mathbf{y}}$ es la variable interna conjugada de la variable de daño interna \hat{m} y \mathbf{q}^α representa las variables internas conjugadas de las variables internas de endurecimiento $\boldsymbol{\alpha}$.

Las expresiones de las variables internas conjugadas pueden ser obtenidas de las definiciones de ecuación (15),

$$\hat{y}^m = \hat{y}_{ij} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{m}_{ij}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kl} \frac{\partial C_{klpq}}{\partial \hat{m}_{pq}} \varepsilon_{pq} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kl} \frac{\partial (\hat{m}_{kr} \hat{m}'_{ls} \hat{C}_{rsmn} \hat{m}_{mp} \hat{m}'_{nq})}{\partial \hat{m}_{ij}} \varepsilon_{pq} \quad (17)$$

Y la variable de endurecimiento conjugada resulta,

$$\mathbf{q}^\alpha = q_i^\alpha = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = -K_{ij}(\hat{m}_{rs}) \alpha_j \quad (18)$$

4.3 Relación constitutiva secante

La relación constitutiva secante puede ser obtenida de ecuaciones (13) y (15),

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijrs} \varepsilon_{rs} \quad C_{ijkl} = M_{ijmn} \overline{C}_{mnpq} M_{pqkl} \quad M_{ijmn} = m_{ik} m'_{jn} \quad (19)$$

4.4 Función umbral de daño

Se proponen en este trabajo las siguientes expresiones para definir la función umbral de daño $\hat{F}(\hat{\mathbf{y}})$,

$$\hat{F} = \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{y}_{ij} \tilde{y}_{ij}} - 1 = 0 \quad (20)$$

Donde las fuerzas termodinámicas mapeadas \tilde{y}_{ij} se definen como,

$$\tilde{y}_{ij} = \tilde{A}_{ijkl} \bar{y}_{kl} = \tilde{A}_{ijkl} A_{klrs} \hat{y}_{rs} \quad (21)$$

\tilde{A}_{ijkl} es un tensor de transformación diagonal que contiene información sobre el endurecimiento direccional. Referido a las direcciones principales de daño puede escribirse como,

$$\tilde{A}_{ijkl} = B_{ik} C_{jl} \quad ; \quad B_{ik} = \frac{E_o}{\sqrt{2}} \delta_{is} \delta_{ks} \hat{m}_s^5 \quad ; \quad (22)$$

$$C_{ij} = \delta_{ir} \delta_{jr} \left[\sigma \left[(1 - \beta) \hat{m}_r + \beta 1_r, \det(\hat{m}_{kl}) \right] \right]^2 \quad (23)$$

Donde E_o es el módulo de elasticidad del material no dañado, \hat{m}_s son los autovalores del tensor de daño \hat{m}_{ij} y $\sigma_d(\hat{m}_r)$ es la resistencia a compresión de comparación en la dirección “r” obtenida a partir de una curva tensión-deformación uniaxial experimental, $0 \leq \beta \leq 1$ define el grado de acoplamiento direccional y toma el valor $\beta = 0$ cuando no hay acoplamiento, 1_r representa un vector columna de 1.

Se introduce el tensor \bar{A}_{ijkl} para preservar la convexidad de la función umbral de daño tanto en el espacio de tensiones como en el de las fuerzas termodinámicas. Referido a las direcciones principales de daño este tensor puede escribirse como,

$$\bar{A}_{ijkl} = (n^2 - 1) \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kn} \delta_{lm} r_m + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kn} \delta_{ln} \delta_{mm} \quad (24)$$

$$r_m = \begin{cases} \langle \sigma_m \rangle & \text{si } \sigma_m > 0 \\ |\sigma_m| & \text{si } \sigma_m < 0 \end{cases} \quad , \quad \text{no suma sobre "m"}$$

El factor n representa la relación entre resistencias correspondientes a los umbrales de daño en compresión uniaxial y tracción uniaxial y σ_m son los valores de las tensiones normales en las direcciones principales de daño.

En Figura 2 se presenta la superficie umbral de daño en el espacio de fuerzas termodinámicas y en el espacio de fuerzas termodinámicas isotropo ficticio para para $n=5$ y $(\sigma_{d1}/\sigma_d)^2 = 0.5$; $(\sigma_{d2}/\sigma_d)^2 = (\sigma_{d3}/\sigma_d)^2 = 1$. Las cuatro curvas dibujadas en cada caso corresponden a diferentes combinaciones de signos de las tensiones principales. Es claro que $F(\hat{y}_{ij}^m) = 0$ resulta convexa para $n \neq 1$.

En Figura 3 se representa la misma superficie de daño en los espacios de tensiones real e isotropo ficticio. Esta figura muestra claramente el papel que juega la transformación introducida en ecuación (8) cuando $m_{ij} = \delta_{ij}$ (umbral de daño inicial).

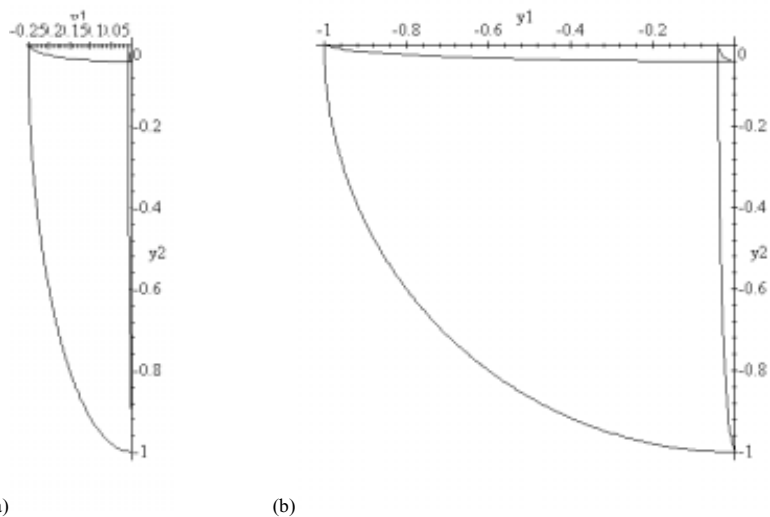


Figura 2. a) Superficie umbral de daño en el espacio de las fuerzas termodinámicas ($n=5$).
 b) Superficie umbral de daño en el espacio de fuerzas termodinámicas isotrópico ficticio ($n=5$).

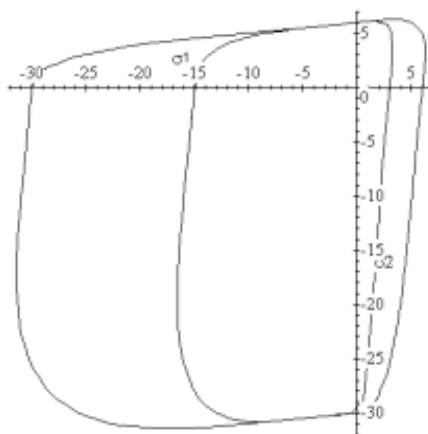


Figura 3 Superficie umbral inicial de daño en el espacio de tensiones principales (interna) y en el espacio de tensiones principales isotrópico ficticio (externa) ($n=5$)

4.5 Regla de flujo de daño

Las leyes de flujo de daño se expresan como sigue,

$$\dot{\hat{m}}_{ij} \begin{cases} = \dot{\lambda} \frac{\partial \hat{G}(\hat{\mathbf{y}})}{\partial \hat{v}_{ij}} & \text{if } \hat{F}(\hat{\mathbf{y}}) = 0 \\ = 0 & \text{if } \hat{F}(\hat{\mathbf{y}}) < 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\dot{\alpha}_i \begin{cases} = \dot{\lambda} \frac{\partial \hat{G}(\hat{\mathbf{y}})}{\partial q_i^\alpha} & \text{if } \hat{F}(\hat{\mathbf{y}}) = 0 \\ = 0 & \text{if } \hat{F}(\hat{\mathbf{y}}) < 0 \end{cases} \quad (26)$$

Donde \hat{G} representa el umbral de daño isótropo.

De la ecuación (9) se puede obtener la siguiente regla de evolución para el tensor de daño de segundo orden,

$$\dot{\hat{m}}_{ij} = \dot{\hat{m}}_{ik} w_{jk}^{-1} \begin{cases} = \dot{\lambda} \frac{\partial \hat{G}(\hat{\mathbf{y}})}{\partial \hat{y}_{ik}} w_{jk}^{-1} & \text{if } \hat{F}(\hat{\mathbf{y}}) = 0 \\ = 0 & \text{if } \hat{F}(\hat{\mathbf{y}}) < 0 \end{cases} \quad (27)$$

La ecuación (27) muestra que la direccionalidad en el daño es causada no sólo por la carga sino también por la anisotropía inicial.

4.6 Ecuación tangente

Para determinar el factor de consistencia de daño $\dot{\lambda}$ que define la evolución de la variable interna de daño (ecuaciones 25, 26) se utiliza la condición de consistencia de daño,

$$\dot{\hat{F}}(\hat{\mathbf{y}}^m) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{y}_{ij}^m} \left[\frac{\partial \hat{y}_{ij}^m}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial \hat{y}_{ij}^m}{\partial \hat{m}_{kl}} \dot{\hat{m}}_{kl} \right] = 0 \quad (28)$$

Reemplazando la regla de flujo de daño (ecuación (25)) en ecuación (28), se puede obtener el factor de consistencia de daño que resulta,

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{y}_{ij}^m} \left[\frac{\partial \hat{y}_{ij}^m}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial \hat{y}_{ij}^m}{\partial \hat{m}_{kl}} \dot{\lambda} \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{y}_{kl}} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{y}_{ij}^m} \frac{\partial \hat{y}_{ij}^m}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl}}{\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{y}_{ij}^m} \frac{\partial \hat{y}_{ij}^m}{\partial \hat{m}_{kl}} \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{y}_{kl}}} \quad (29)$$

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 Carga y descarga en dos direcciones ortogonales

Un problema práctico interesante consiste en estudiar la influencia de la carga previa en el límite de resistencia en la dirección ortogonal a la carga. En esta sección se presentan los resultados obtenidos para un material inicialmente isotrópico cuando se lo carga en cierta dirección, luego se lo descarga y se lo carga en la dirección ortogonal.

Las propiedades mecánicas utilizadas para el material se resumen en Tabla 1,

Tabla 1. Propiedades mecánicas

Módulo de elasticidad inicial	$E_o=35000$ MPa
Coefficiente de Poisson inicial:	$\nu=0.2$
Endurecimiento lineal con:	$H=5000$ MPa
Umbral de daño inicial en compresión uniaxial:	$\sigma_{co}=30$ MPa
Relación de umbrales de daño:	$n = \sigma_{co} / \sigma_{to} = 10$
Acoplamiento direccional nulo:	$\beta = 0$

Las curvas tensión-deformación obtenidas para ambas etapas de carga se presentan en las Figuras 4 y 5. Se puede observar que el material pierde rigidez en la dirección de la carga pero no en la dirección ortogonal.

En la Figura 6 se representan las curvas umbrales de daño correspondientes a las diferentes etapas de cargas en el espacio de tensiones principales. Se observa un efecto de endurecimiento con direcciones preferente en la dirección de la carga y nulo en la dirección ortogonal a la carga, lo cual está de acuerdo a la hipótesis de partida $\beta = 0$.

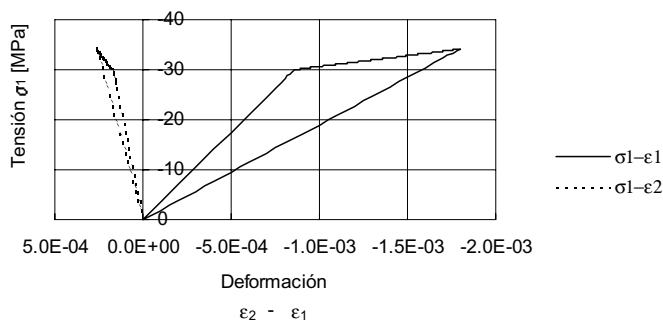


Figura 4: Curvas tensión-deformación, primera etapa de carga

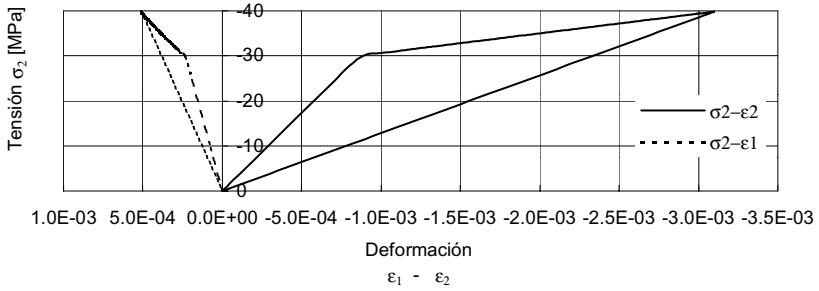


Figura 5: Curvas tensión-deformación, segunda etapa de carga

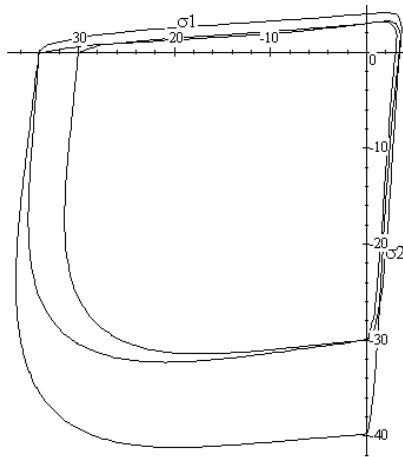


Figura 6: Superficie umbral de daño inicial (interna), luego de la primera etapa de carga (intermedia) y luego de la segunda etapa de carga (externa)

5.2 Rotación de las direcciones principales de tensión

En esta sección se presenta el ensayo numérico propuesto por Willam²⁹ que ha sido ampliamente utilizado por otros autores para probar modelos de daño y fisuración.

El ensayo consiste en dos etapas de carga. En la primera etapa se aplica tracción uniaxial en la dirección x , justo hasta alcanzar el umbral de daño. En la segunda etapa se aplican incrementos de las componentes de deformación $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$ en las proporciones 1,1.5,1, manteniendo siempre nulas las componentes de tensión fuera del plano $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

En la Figura 7 se muestra la historia de deformaciones correspondiente. La segunda etapa de carga representa extensión biaxial seguida de una importante rotación de las direcciones principales de deformación.

Las propiedades del material utilizadas se resumen en Tabla 2.

Tabla 2. Propiedades mecánicas de material (ensayo de Willam²⁹)

Módulo elástico inicial:	$E_o=10^7$ kPa
Coefficiente de Poisson inicial:	$\nu=0.2$
Umbral de daño inicial en compresión uniaxial:	$\sigma_{co}=10^4$ kPa
Relación de umbrales de daño:	$n = \sigma_{co} / \sigma_{to} = 1$
Energía de fractura:	$G_f = 15$ kPa m
Acoplamiento direccional:	$\beta = 0.4$

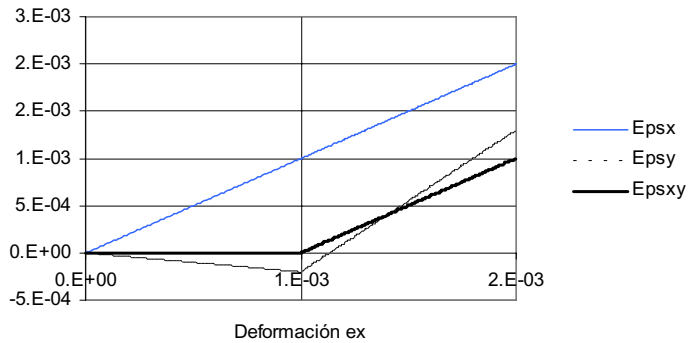


Figura 7: Camino de carga en el espacio de deformaciones

En Figura 8 se muestra la respuesta tensión-deformación en tracción uniaxial, representada por una curva de ablandamiento exponencial.

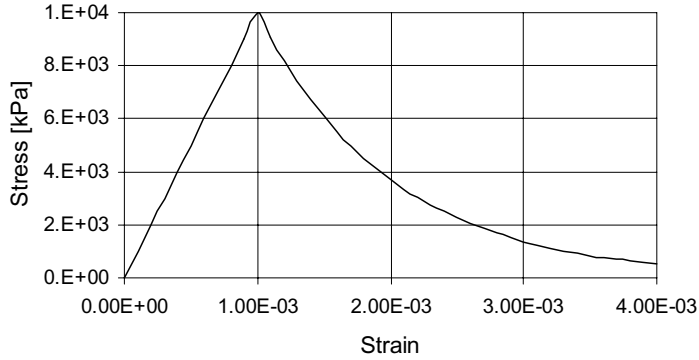


Figura 8: Curva tensión-deformación en tracción uniaxial

En las figuras 9 y 10 se presentan las evoluciones de las componentes de tensión obtenidas para la historia de deformación descrita con un modelo de daño escalar³⁰ y con el modelo de daño direccionado. La diferencia entre la respuesta del modelo de daño escalar y la del modelo de daño direccionado es evidente.

Las curvas obtenidas con el modelo de daño direccional son similares a las obtenidas por Carol et al¹³. Se evidencia una inversión en el signo de las tensiones tangenciales y un sustancial aumento de la componente de tensión normal en la dirección y , en relación con los resultados previstos por el modelo de daño escalar.

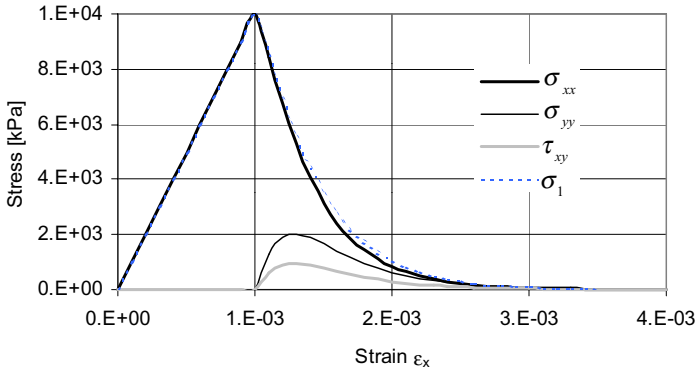


Figura 9: Evolución de las componentes de tensión obtenida con un modelo de daño escalar

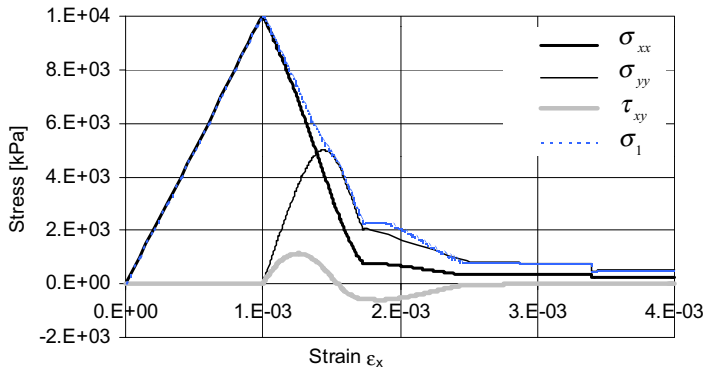


Figura 10: Evolución de las componentes de tensión obtenida con el modelo de daño direccionado propuesto

6 CONCLUSIONES

Se presenta en este trabajo un modelo de daño direccionado basado en la existencia de un espacio ficticio no dañado cuyas variables están relacionadas con las correspondientes al espacio dañado real a través de una transformación cinemática. Esto permite la utilización de programas computacionales originalmente desarrollados para simular deformaciones finitas y hace directa la extensión a materiales inicialmente anisótropos y daño anisótropo en grandes deformaciones.

La transformación de espacios definida está basada en una interpretación física del daño como una reducción del área efectiva, extendida al caso de daño direccionado. Esta interpretación física del daño permite definir el daño direccionado a través de un tensor de segundo orden de daño simétrico y conduce a un tensor de rigidez secante simétrico. El tensor de daño resulta similar a las simetrizaciones propuestas por otros autores^{12,13}.

Las ecuaciones básicas del modelo que definen el umbral de daño y su evolución fueron derivadas de la termodinámica de los procesos irreversibles.

La integración de las ecuaciones constitutivas resultante puede realizarse con un algoritmo de tipo retorno mapeado.

Los ejemplos de aplicación presentados muestran la capacidad del modelo para predecir daño direccionado, no sólo en problemas de carga proporcional sino también en problemas que involucran una marcada rotación de las direcciones principales de deformación. Los resultados obtenidos son similares a los presentados por otros autores a partir de modelos basados en hipótesis diferentes¹³.

7 REFERENCIAS

- [1] J. W. Ju, Isotropic and Anisotropic Damage Variables in Continuum Damage Mechanics, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol.16, No.12,) 2764-2770 (1990).
- [2] L. M. Kachanov, *Time of the Rupture Process under Creep Conditions*. IVZ Akad Nauk - S.S.R., Otd Tech Nauk 8 (1958).
- [3] D. Krajcinovic, G. U. Fonseka, The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part I and II, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol.48, 809-824 (1981).
- [4] A. Dragon and Z. Mroz, A Continuum Damage Model for Plastic-Brittle Behaviour of Concrete, *Int. J. Engng Science*. 17, 121-137 (1979).
- [5] J. P. Cordebois and F. Sidoroff, Damage-Induced Elastic Anisotropy, in Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, *Colloque Euromech 115* (J.P. Boehler, Ed., Villard de Lans, Martinus Nijhoff, Dordrecht, The Netherlands) 761-774(1979).
- [6] F. Sidoroff, Description of Anisotropic Application to Elasticity, *Physical Non Linearities in Structural Analysis*, J. Hult and Lemaitre eds. *IUTAM Series* (Springer Verlag, New York, 237-244 (1980).
- [7] S. Murakami, N. Ohno, A Continuum Theory of Creep and Creep Damage, *3^o IUTAM Symposium on Creep in Structure*, Leicester, (1980).
- [8] D. Krajcinovic, Continuous Damage Mechanics Revisited: Basic Concepts and Definitions, *J. Appl. Mech.* 52, 829-834 (1985).
- [9] J. Mazars J. and G. Pijaudier-Cabot, Continuum Damage Theory –Application to Concrete, *J. Engng Mech. ASCE* 115, 345-365 (1989).
- [10] K. C. Valanis, A Global Damage Theory and the Hyperbolicity of the Wave Problem, *J. Appl. Mech. ASME* 58, 311-316 (1991).
- [11] J.L. Chaboche, Continuum Damage Mechanics, Anisotropy and Damage Deactivation for Brittle Materials like Concrete and Ceramic Composites, *International Journal of Damage Mechanics* 4, 5-22 (1995).
- [12] G. Z. Voyiadjis, T. Park, Anisotropic Damage Effect Tensors for the Symmetrization of the Effective Stress Tensor, *Transactions of the ASME*, Vol.64, 106-110 (1997).
- [13] I. Carol, E. Rizzi, K. Willam, On the Formulation of Anisotropic Degradation Using a Pseudo-Logarithmic Damage Tensor, *Structural Engineering and Structural Mechanics Research Series Report CU/SR-98/1* (Univ. of Colorado al Boulder) (1998).
- [14] G.Z. Voyiadjis and T. Park, Kinematics of Large Elastoplastic Damage Deformation, *Damage Mechanics in Engineering Materials*, G. Z. Voyiadjis, J.W.W. Ju and J. L. Chaboche (Eds.), Elsevier Science, 45-63 (1998).
- [15] G. Z. Voyiadjis, B. Deliktas, A Coupled Anisotropic Damage Model for the Inelastic Response of Composite Materials, *Compt. Methos Appl. Mech. Engrg.* 183, 159-199 (2000).
- [16] J. Lemaitre , R. Desmorat, M. Sauzy, Anisotropic Damage Law of Evolution, *Eur. J. Mech. A/Solids* 19, 187-208 (2000).
- [17] M. Ortiz, A Constitutive Theory for the Inelastic Behaviour of Concrete, *Mechanics of*

Materials 4, 67-93 (1985).

- [18] C. Simo, J. Ju, Stress and Strain Based Continuum Damage Models. Part I and II. *Int. J. Solids Structures* 23, 375-400 (1987).
- [19] G.Z. Voyiadjis, P.I. Kattan, A Plasticity-Damage Theory for Large Deformation of Solids-I. Theoretical Formulation, *Int. Journal Engng Sci.* Vol.30, No.9, 1089-1108 (1992).
- [20] I. Carol, E. Rizzi and K. Willam, A Unified Description of Elastic Degradation and Damage Based on Loading Surface, *Int. J. Solids Struct.* 31, 2835-2865 (1994).
- [21] B. Luccioni, *Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos*, tesis de Doctorado en Ingeniería, UNT, (1993).
- [22] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, Aspecta Phenoménologique de la Rupture par Endommagement, *Journal of Mecanique Théorique et Appliquée*, 317-365 (1978).
- [23] J. W. Ju, On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects, *Int. Journal Solids Structures* Vol.25, No.7, 803-833 (1989).
- [24] B. Luccioni, S.Oller, A directional Damage Model, *submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* (2001).
- [25] Oller S., Botello S., Miquel J., Oñate E., An Anisotropic Elastoplastic Model Based on an Isotropic Formulation. *Engineering Computations* 12(3), 245-262 (1995).
- [26] B. Luccioni, P. Martín, Modelo Elastoplástico para Materiales Ortótropos, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Diseño y Cálculo en Ingeniería*, Vol. 13, 4, 603-614, (1997).
- [27] L. Malvern, *Introduction to the Mechanics of Continuos Medium*, Prentice Hall, U.S.A, (1969).
- [28] J. Lubliner, On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Mechanics, *Int. Journal Non Linear Mechanics*, Vol.7, 237-254 (1972).
- [29] K. Willam, E. Pramono and S. Sture, Fundamental Issues of Smeared Crack Models. In S. P. Shah and S.E. Swartz (eds.), *SEM-RILEM Int. Conf. On Fracture of Concrete and Rock* (Bethel, Connecticut. Society of Engineering Mechanics, 192-207 (1987).
- [30] B. Luccioni, S. Oller, R. Danesi, Coupled Plastic-Damaged Model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129, 81-89 (1996).

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al CONICET y a la Universidad Nacional de Tucumán por el apoyo económico brindado.