

## ESTADO PLANO DE TENSIONES EN UN MATERIAL ORTÓTROPO

**Patricio A. A. Laura, Roberto H. Gutiérrez y Raúl E. Rossi**

Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamentos de Ingeniería y Física,  
Universidad Nacional del Sur, Avenida Alem 1253 (8000) Bahía Blanca, Argentina  
e-mail: [ima@criba.edu.ar](mailto:ima@criba.edu.ar)

**Key words:** Tensiones, estado plano, ortotropía.

**Abstract.** *El uso de materiales compuestos ha sido cada vez más frecuente en diversas áreas de la tecnología, y varias metodologías computacionales y experimentales se utilizan en la determinación de tensiones y deformaciones, en sólidos de diversas geometrías y sometidos a diferentes estados de sollicitación.*

*En este trabajo, de carácter didáctico, se presenta una reseña de soluciones analíticas sobre el tema en cuestión y soluciones aproximadas sobre un problema particular utilizándose una formulación variacional directa y el método de elementos finitos.*

## 1. INTRODUCCIÓN.

El uso de materiales compuestos ha sido cada vez más frecuente en diversas áreas de la tecnología y varias metodologías computacionales y experimentales son utilizadas en la determinación de tensiones y deformaciones en sólidos de diversas geometrías y sometidas a diferentes estados de sollicitación estática y dinámica.

Esta publicación, de carácter didáctico, reseña algunos trabajos realizados por H. D. Conway<sup>1</sup> sobre estado plano de tensiones en placas rectangulares (ver Figuras 1 y 2) presentándose también el tratamiento aproximado mediante el método de Ritz (ver Figura 3).

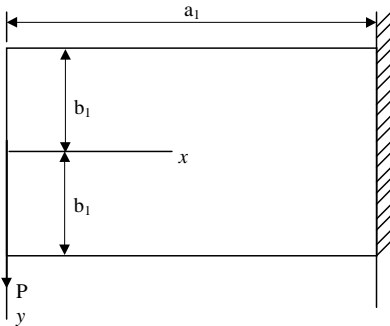


Figura 1: Carga en el extremo libre

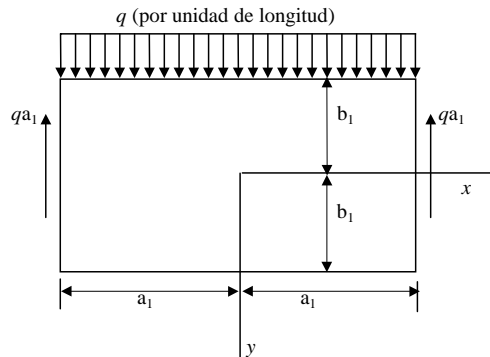


Figura 2: Carga uniformemente distribuida

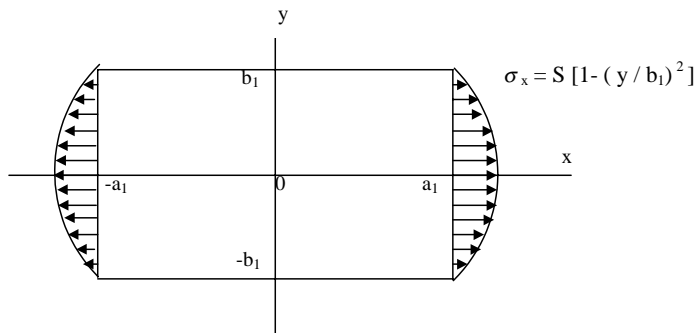


Figura 3: Carga parabólica en dos extremos opuestos

## 2. DESARROLLO DE LA TEORÍA.

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

quedan satisfechas idénticamente mediante la introducción de la función de tensión de Airy de manera tal que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

Por otra parte la ecuación de compatibilidad gobernante, válida para cualquier material o medio continuo dentro del rango de deformaciones infinitésimas, es:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (4)$$

siendo necesario ahora aplicar las correspondientes relaciones constitutivas para un material ortótropo<sup>2</sup>, que están dadas por.

$$\sigma_x = E_x \epsilon_x + E_{xy} \epsilon_y \quad (5)$$

$$\sigma_y = E_{xy} \epsilon_x + E_y \epsilon_y \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (7)$$

Resolviendo las ecuaciones (5) y (6) resulta:

$$\epsilon_x = \frac{E_y \sigma_x - E_{xy} \sigma_y}{E_x E_y - E_{xy}^2} \quad (8)$$

$$\epsilon_y = \frac{E_x \sigma_y - E_{xy} \sigma_x}{E_x E_y - E_{xy}^2} \quad (9)$$

En el caso isótropo se tiene:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \quad (10)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \quad (11)$$

Comparando las expresiones (8) y (9) con las ecuaciones (10) y (11) se deduce que:

$$\frac{E_y}{E_x E_y - E_{xy}^2} \rightarrow \frac{1}{E} \quad (12)$$

$$\frac{E_x}{E_x E_y - E_{xy}^2} \rightarrow \frac{1}{E} \quad (13)$$

$$\frac{E_{xy}}{E_x E_y - E_{xy}^2} \rightarrow \frac{\mu}{E} \quad (14)$$

Reemplazando (7), (8) y (9) en la ecuación de compatibilidad (4) se obtiene, luego de emplear las expresiones de las componentes del tensor de tensión en términos de la función de Airy:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \left( \frac{E_x E_y - E_{xy}^2}{E_x G} - 2 \frac{E_{xy}}{E_x} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{E_y}{E_x} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (15)$$

Seguendo la Referencia [1] tomamos:

$$\frac{E_x E_y - E_{xy}^2}{E_x G} - 2 \frac{E_{xy}}{E_x} = 1 + \frac{E_y}{E_x} \quad (16)$$

de donde se obtiene un valor “aparente” de G dado por.

$$G = \frac{E_x E_y - E_{xy}^2}{E_x \left( 1 + \frac{E_y}{E_x} + 2 \frac{E_{xy}}{E_x} \right)} \quad (17)$$

En el caso de un material isótropo, si sustituimos en (17) las expresiones (12), (13) y (14) se obtiene:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (18)$$

que es el valor del módulo de elasticidad transversal según la teoría clásica de la elasticidad isótropa. Parece razonable adoptar para G, y en una primera aproximación, el valor dado por (17) en el caso de un material ortótropo. Por otra parte al substituir (16) en (15) resulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^4} + \left( 1 + \frac{E_y}{E_x} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{E_y}{E_x} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (19)$$

y en el caso de un material isótropo, dado que  $E_y / E_x = 1$ , resulta de la (19):

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (20)$$

que es la conocida ecuación biarmónica de Airy.

Sintetizando: hemos presentado un modelo matemático aproximado para un estado plano de tensiones en un medio ortótropo plano que degenera apropiadamente en el caso isotropo plano como lo muestran las ecuaciones (18) y (20). Para la aproximación ortótropa la misma consiste en haber vinculado G con las restantes propiedades constitutivas, ver ecuación (17). Dado que la ecuación (17) brinda el valor exacto del módulo de elasticidad transversal exacto en el caso de un material isotropo, es razonable suponer que la expresión (17) brindará valores aceptables de G para ciertas situaciones ortótropas.

Esto es mostrado en la Tabla 1 que contiene valores experimentales de todos los parámetros ortótropos:  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_{xy}$  y G habiéndose computado el valor “aparente” de G según la ecuación (17) y es consignado como G\* en dicha Tabla.

Material	$E_x$	$E_y$	$E_{xy}$	G	G*
Maple,* 5/ply.....	1.87	0.60	0.073	0.159	0.427
Afara,* 3/ply.....	1.96	0.165	0.043	0.110	0.145
Gabbon* (Okoumé), 3-ply.	1.28	0.11	0.014	0.085	0.099
Birch** 3-and 5-ply.....	2.00	0.167	0.077	0.17	0.141
Birch** with bakelite membranes	1.70	0.85	0.061	0.10	0.539

**Tabla 1:** Valores de Parámetros Ortótropos (Referencia [3], p. 367) Multiplicados por  $10^{-6}$  (libras/pulgada<sup>2</sup>).

\* R. F. S. Hearmon and E. H. Adams, Brit J. Appl. Phys., vol. 3, p. 155, 1952.

\*\* S. G. Lechnitzky, “Anisotropic Plate”, p. 40, Moscow, 1947.

En el caso de los materiales mostrados en las líneas 2, 3 y 4 de la Tabla 1 la concordancia entre G y G\* es razonablemente buena desde el punto de vista práctico, no siendo así en los casos de los materiales consignados en primero y último lugar.

La concordancia es mejor cuando  $E_x$  prevalece fuertemente con respecto a  $E_y$ .

Por otra parte variaciones moderadas en el valor de módulo G generan alteraciones menores de los valores de las tensiones normales.

### 3. DESARROLLO DEL MÉTODO DE RITZ EN PROBLEMAS DE MATERIALES ORTÓTROPOS.

En el caso de problemas planos de la teoría matemática de la elasticidad la energía de deformación por unidad de volumen está dada por la expresión:

$$V_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \tag{21}$$

Utilizando las expresiones (5), (6) y (7) se obtiene:

$$\sigma_x \epsilon_x = \frac{1}{D_p} (E_y \sigma_x^2 - E_{xy} \sigma_x \sigma_y) \tag{22}$$

$$\sigma_y \varepsilon_y = \frac{1}{D_p} (E_x \sigma_y^2 - E_{xy} \sigma_x \sigma_y) \quad (23)$$

$$\tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}^2 \text{ siendo } G = \frac{D_p}{E_x \left( 1 + \frac{E_y}{E_x} + 2 \frac{E_{xy}}{E_x} \right)} \quad (24)$$

$$\text{donde } D_p = E_x E_y - E_{xy}^2 \quad (25)$$

Substituyendo (22), (23) y (24) en (21) resulta:

$$V_0 = \frac{1}{2D_p} \left[ E_y \sigma_x^2 + E_x \sigma_y^2 - 2E_{xy} \sigma_x \sigma_y + E_x \left( 1 + \frac{E_y}{E_x} + 2 \frac{E_{xy}}{E_x} \right) \tau_{xy}^2 \right] \quad (26)$$

En el caso de un material isótropo, substituyendo los parámetros ortótropos por los correspondientes isótropos, ecuaciones (12), (13) y (14), se obtiene la conocida expresión:

$$V_0 = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y + 2(1+\mu) \tau_{xy}^2 \right] \quad (27)$$

Reemplazando las expresiones (3) en (26) resulta:

$$V_0 = \frac{1}{2D_p} \left[ E_y \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 + E_x \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 - 2E_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + E_x \left( 1 + \frac{E_y}{E_x} + 2 \frac{E_{xy}}{E_x} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (28)$$

Por consiguiente la energía total de deformación de un sólido ortótropo plano está dada por

$$V = \iint_A V_0 dx dy \quad (29)$$

Utilizando el método de Ritz uno aproxima a  $\phi$  mediante una combinación lineal de funciones aproximante  $\phi_{ai}$  que satisfacen las condiciones de borde

$$\phi \cong \sum_{i=1}^N A_i \phi_{ai} \quad (30)$$

y reemplazando en (28) y (29) se requiere finalmente que  $V$  sea un mínimo:

$$\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0 \quad (31)$$

generándose así un sistema lineal de ecuaciones lineales en las  $A_i$ . Reemplazando a estas en (30) se tiene una versión aproximada de  $\phi$  pudiéndose calcular luego las componentes del tensor de tensión.

#### 4. CASO DE UNA PLACA RECTANGULAR ORTÓTROPA CON TENSIONES DISTRIBUÍDAS DE ACUERDO A UNA LEY PARABÓLICA EN DOS BORDES OPUESTOS.

El problema descrito en el título es resuelto en la Referencia [2] en el caso de una placa isotrópica y será resuelto a continuación considerándose una placa ortótropa pero utilizando las aproximaciones empleadas en dicha Referencia.

Las condiciones de borde son (Figura 3):

$$\tau_{xy} = 0 \quad ; \quad \sigma_x = S \left( 1 - \frac{y^2}{b_1^2} \right) \quad (x = \pm a_1) \quad (32 \text{ a})$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad ; \quad \sigma_y = 0 \quad (y = \pm b_1) \quad (32 \text{ b})$$

De acuerdo con [2] se utiliza la aproximación:

$$\phi = \frac{1}{2} S y^2 \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b_1^2} \right) + (x^2 - a_1^2)^2 (y^2 - b_1^2)^2 (A_1 + A_2 x^2 + A_3 y^2 + \dots) \quad (33)$$

donde la primera función satisface idénticamente las condiciones de borde mientras que las restantes funciones coordenadas generan tensiones en los bordes que son idénticamente nulas.

Resulta conveniente expresar la funcional (28) en la forma:

$$V = \frac{1}{2D_p} \iint_p \left( E_x \phi_{x^2}^2 + E_y \phi_{y^2}^2 - 2E_{xy} \phi_{x^2} \phi_{y^2} + E^* \phi_{xy}^2 \right) dx dy \quad (34)$$

siendo  $D_p = E_x E_y - E_{xy}^2$

$$E^* = E_x + E_y + 2 E_x E_y$$

Efectuando el cambio de variables:

$$x = a\bar{x}, \quad y = b\bar{y} \quad (a = 2a_1, b = 2b_1)$$

y substituyendo en (34) resulta:

$$2a^2 \lambda D_p V = \iint_{\bar{p}} \left( E_x \phi_{\bar{x}^2}^2 + \lambda^4 E_y \phi_{\bar{y}^2}^2 - 2\lambda^2 E_{xy} \phi_{\bar{x}^2} \phi_{\bar{y}^2} + \lambda^2 E^* \phi_{\bar{x}\bar{y}}^2 \right) d\bar{x} d\bar{y} \quad (35)$$

donde  $\lambda = a/b$ .

Tomando a la expresión (33) que una vez adimensionalizada resulta:

$$\phi_a = \frac{S}{2} \left( \bar{y}^2 - \frac{2}{3} \bar{y}^4 \right) + \left( \bar{x}^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \bar{y}^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \alpha_1 + \alpha_2 \bar{x}^2 + \alpha_3 \bar{y}^2 + \dots + \alpha_{2n} \bar{x}^{2n} + \alpha_{2n+1} \bar{y}^{2n} \right) \quad (36)$$

y substituyendo en (35) se obtiene:

$$\begin{aligned} 2a^2 \lambda D_p V = & \iint_{\bar{p}} \left[ E_x \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_{\bar{x}^2} \right)^2 + \lambda^4 E_y \left( F(\bar{y}) + \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_{\bar{y}^2} \right)^2 - \right. \\ & - 2\lambda^2 E_{xy} \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_{\bar{x}^2} \right) \left( F_{\bar{y}^2} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_{\bar{y}^2} \right) + \\ & \left. + \lambda^2 E^* \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_{\bar{x}\bar{y}} \right)^2 \right] d\bar{x} d\bar{y} \end{aligned} \quad (37)$$

donde  $F(\bar{y})$  es el primer término de (36),  $F_{\bar{y}^2}$  es su derivada segunda y  $\phi_j(\bar{x}, \bar{y})$  son los productos que resultan de los términos que le siguen.

Aplicando el método de Ritz se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda a^2 D_p \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = & \sum_{j=1}^N \left\{ \iint_{\bar{p}} \left[ E_x \phi_{\bar{x}^2} \phi_{\bar{x}^2} + \lambda^4 E_y \phi_{\bar{y}^2} \phi_{\bar{y}^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \lambda^2 E_{xy} \left( \phi_{\bar{y}^2} \phi_{\bar{x}^2} + \phi_{\bar{x}^2} \phi_{\bar{y}^2} \right) + \lambda^2 E^* \phi_{\bar{x}\bar{y}} \phi_{\bar{x}\bar{y}} \right] d\bar{x} d\bar{y} \right\} \alpha_j = \\ = & - \iint_{\bar{p}} F_{\bar{y}^2} \left( \lambda^4 E_y \phi_{\bar{y}^2} - \lambda^2 E_{xy} \phi_{\bar{x}^2} \right) d\bar{x} d\bar{y} \end{aligned} \quad (38)$$

( $i = 1, \dots, N$ ).

Para los cálculos se tomó  $N = 5$ .

En la Tabla 2 se comparan valores de  $\sigma_x / S$  y  $\sigma_y / S$  para  $\lambda = 1$  y 2.5, obtenidos mediante el método de Ritz siguiendo la formulación explicada en la presente sección y utilizando el método de elementos finitos<sup>4</sup>.

En el caso de una placa cuadrada los resultados obtenidos mediante ambas metodologías están en excelente acuerdo. En cambio para  $\lambda = 2.5$  solamente los valores de  $\sigma_x / S$  concuerdan con buena precisión relativa, no siendo así en el caso de  $\sigma_y / S$ . Es interesante notar que para  $y = 0$  y a distancias de los bordes mayores a “2 b<sub>1</sub>” las tensiones  $\sigma_y$  son prácticamente nulas cuando se las determina mediante el método de elementos finitos mientras que se obtiene un error considerable al ser determinadas analíticamente. Por otra parte, considerando la sección



correspondiente a  $x = 0$  se observa que para  $\lambda = 2.5$ ,  $\sigma_x$  permanece prácticamente constante e igual a  $2/3 S$ . También ocurre algo similar en secciones lo suficientemente alejadas de los extremos. A esta conclusión se llega aplicando el principio de Saint Venant.

$\lambda = 1$						
$x = 0$	$y = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sigma_x / S$	0.8847 (0.8796)	0.8510 (0.8470)	0.7560 (0.7551)	0.6184 (0.6216)	0.4732 (0.4782)	0.3767 (0.3719)
$\sigma_y / S$	- 0.1220 (- 0.1274)	- 0.1142 (- 0.1183)	- 0.0914 (- 0.0925)	- 0.0570 (- 0.0555)	- 0.0198 (- 0.00183)	0 (-0.0002)
$y = 0$	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sigma_x / S$	0.8847 (0.8796)	0.8925 (0.8886)	0.9149 (0.9140)	0.9478 (0.9494)	0.9822 (0.9838)	1 (0.9999)
$\sigma_y / S$	- 0.1220 (- 0.1274)	- 0.1128 (- 0.1170)	- 0.0807 (- 0.0816)	- 0.0120 (- 0.0087)	0.1178 (+0.1226)	0.3462 (0.3419)

$\lambda = 2.5$						
$x = 0$	$y = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sigma_x / S$	0.6747 (0.6669)	0.6714 (0.6664)	0.6637 (0.6652)	0.6573 (0.6649)	0.6619 (0.6672)	0.6911 (0.6736)
$\sigma_y / S$	0.0769 (- 0.0111)	- 0.0713 (- 0.0100)	- 0.0558 (- 0.0073)	- 0.0335 (- 0.0039)	- 0.0111 (- 0.0011)	0 (-0.00001)
$y = 0$	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sigma_x / S$	0.6747 (0.6669)	0.6807 (0.6743)	0.7055 (0.7044)	0.7701 (0.7778)	0.8941 (0.9038)	1 (0.9998)
$\sigma_y / S$	- 0.0769 (- 0.0111)	- 0.1143 (- 0.0189)	- 0.2476 (- 0.0419)	- 0.4097 (- 0.0647)	- 0.0549 (- 0.0059)	2.4921 (0.3934)

**Tabla 2:** Comparación de valores de tensiones normales adimensionales  $\sigma_x/S$  y  $\sigma_y/S$  (Figura 3). (...): valores obtenidos mediante elementos finitos. El cuadrante de la placa fue subdividido en (40 x 40) y (100 x 40) elementos para  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 2.5$ , respectivamente.  $E_x = 2 \times 10^6$ ;  $E_y = 1.5 \times 10^6$ ;  $E_{xy} = 0.5 \times 10^6$ ;  $G = 0.611111 \times 10^6$ .

En la Tabla 3 se dan los valores de  $\sigma_x / S$  y  $\sigma_y / S$  para  $\lambda = 1.5$  y 2, obtenidos aplicando el método de Ritz con la misma formulación explicada en la presente sección.

$\lambda = 1.5$						
x = 0	y = 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sigma_x / S$	0.7540	0.7378	0.6942	0.6375	0.5925	0.5955
y = 0	x = 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sigma_x / S$	0.7540	0.7672	0.8076	0.8739	0.9533	1

$\lambda = 2$						
x = 0	y = 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sigma_x / S$	0.6944	0.6875	0.6699	0.6506	0.6452	0.6753
y = 0	x = 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sigma_x / S$	0.6944	0.7052	0.7421	0.8155	0.9238	1

**Tabla 3:** Valores de tensiones normales adimensionales  $\sigma_x/S$  y  $\sigma_y/S$  (Figura 3).

NOTA:  $E_x = 2 \times 10^6$ ;  $E_y = 1.5 \times 10^6$ ;  $E_{xy} = 0.5 \times 10^6$ ;  $G = 0.611111 \times 10^6$ .

### 5. SOLUCIONES ANALÍTICAS EXACTAS.

H. D. Conway<sup>1</sup> presenta dos soluciones analíticas exactas. En el primer caso resuelve el problema plano mostrado en la Figura 1. Para el problema isótropo la función de Airy es:

$$\phi = \frac{P}{6I} (3b_1^2 xy - xy^3) \quad (39)$$

Pero esta función satisface también la ecuación (19). Por consiguiente las tensiones para situaciones isótropas y ortótropas están dadas por:

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I}; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} (b_1^2 - y^2) \quad (40)$$

Se concluye que las tensiones son independientes de las propiedades elásticas, tanto isótropas como ortótropas.

Para el sistema elástico isótropico de la Figura 2 la función de Airy es:

$$\phi = \frac{q}{60I} [y^3(y^2 - 2b_1^2 + 5a_1^2) - 5x^2(y^3 - 3yb_1^2 - 2b_1^3)] \quad (41)$$

Cuando la estructura es ortótropa Conway toma:

$$\phi = \frac{q}{60I} \left[ y^3 (Ay^2 - 2b_1^2 + 5a_1^2) - 5x^2 (y^3 - 3yb_1^2 - 2b_1^3) \right] \quad (42)$$

Reemplazando (42) en (19) resulta:

$$A = \frac{k^2 + 1}{2k^2} \quad (43)$$

siendo  $k^2 = E_y / E_x$ .

Utilizando  $\phi$  dada por la ecuación (42) resultan las tensiones por flexión:

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (a_1^2 - x^2)y + \frac{q}{2I} \left( \frac{k^2 + 1}{3k^2} y^3 - \frac{2}{5} b_1^2 y \right) \quad (44)$$

Se puede verificar que las condiciones de borde para  $y = \pm b_1$  quedan satisfechas.

Para  $x = \pm a_1$  se obtienen las siguientes resultantes:

$$F_x = \int_{-b_1}^{b_1} \sigma_x h dy = 0 \quad (45)$$

$$M_x = \int_{-b_1}^{b_1} \sigma_x h y dy = -\frac{q b_1^2 k^2 - 1}{10 k^2} \quad (46)$$

Por consiguiente se deben aplicar momentos, en  $x = \pm a_1$ , iguales a  $\frac{q b_1^2 k^2 - 1}{10 k^2}$ .

Se debe agregar una función de tensión del tipo  $B y^3$  a la función (42) y esta generará tensiones:

$$\sigma_x'' = \frac{3q y}{20 h b_1} \frac{k^2 - 1}{k^2}; \quad \sigma_y'' = \tau_{xy}'' = 0 \quad (47, 48)$$

En definitiva las tensiones correspondientes al sistema ortótropo son:

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (a_1^2 - x^2)y + \frac{q}{2I} \frac{k^2 + 1}{k^2} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{b_1^2 y}{5} \right) \quad (49)$$

$$\sigma_x = -\frac{q}{2I} \left( \frac{y^3}{3} - b_1^2 y + \frac{2b_1^3}{3} \right) \quad (50)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{qx}{2I} (b_1^2 - y^2) \quad (51)$$

Se observa que la tensión normal  $\sigma_x$  depende de la relación  $E_y / E_x$  mientras que  $\sigma_y$  y  $\tau_{yx}$  son independientes de los parámetros ortótropos.

Para  $x = \pm a_1$  las tensiones  $\sigma_x$  no son idénticamente nulas pero en cambio son cero tanto el esfuerzo total como el momento global.

Aplicando el principio de Saint Venant se deduce que en el caso de una barra lo suficientemente larga las expresiones (49), (50) y (51) son exactas en el sólido a distancias mayores a "2b<sub>1</sub>" desde los extremos. Esto es así dentro de las limitaciones de la teoría plana

de tensiones.

## 6. INFLUENCIA DEL VALOR DE G.

Tomando los mismos valores de  $E_x$ ,  $E_y$  y  $E_{xy}$  del sistema estructural considerado previamente se hicieron determinaciones de  $\sigma_x / S$  y  $\sigma_y / S$  en el centro de la placa tomando  $G = 611111 \text{ Kg/cm}^2$  y luego:  $2G$  y  $G/2$ . La Tabla 4 muestra los valores adimensionales de las tensiones normales en  $x = y = 0$  obtenidas mediante el método de elementos finitos habiéndose dividido el cuadrante de la placa ortótropa en 1600 elementos cuadrados.

	$\sigma_x/S$	$\sigma_y/S$
$G = 611111 \text{ Kg/cm}^2$	0.8796	- 0.1274
$2G$	0.8483	-0.1589
$G/2$	0.9152	- 0.0907

**Tabla 4:** Efecto del valor de G Sobre los valores de las tensiones normales en el centro de la placa cuadrada (Figura 2).

Se observa que al incrementar al valor de G en un 100 % el parámetro  $\sigma_x / S$  disminuye en menos de un 4 % y  $\sigma_y / S$  (considerablemente menor que  $\sigma_x / S$ ) lo hace en un 22 %. Al reducir G en un 50 %,  $\sigma_x / S$  aumenta menos del 4 % mientras que  $\sigma_y / S$  también lo hace en un 22 %.

Se concluye que, para el problema en estudio, una variación considerable en el valor de G conduce a alteraciones muy pequeñas en los valores de  $\sigma_x$ . En cambio son mayores los efectos sobre la tensión  $\sigma_y$ .

## 7. AGRADECIMIENTOS.

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET y la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur. Los autores expresan su reconocimiento al Dr. Ing. Carlos A. Rossit por la valiosa cooperación prestada.

## 8. REFERENCIAS.

- [1] H.D. Conway, *ASME Journal of Applied Mechanics* 19, 227, "Bending of orthotropic beams" (1952).
- [2] S. Timoshneko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity* McGraw–Hill Book Company, Inc., New York, N. Y. (1951).
- [3] S. Timoshneko y S. Woinowsky–Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw–Hill Book Company Inc., New York, N. Y. (1959).
- [4] ALGOR Inc., *Linear Stress and Vibration Analysis Processor Reference Manual*, Part N° 6000.501. Revision 5.00. Pittsburgh, PA, USA. (1999).