

## UN MÉTODO DE FUNCIONES DE PESO PARA EL MODELADO DE LA PROPAGACIÓN Y EL CIERRE PARCIAL DE FISURAS

Hugo López Montenegro, Adrián Pablo Cisilino

División Soldadura y Fractomecánica - INTEMA  
Universidad Nacional de Mar del Plata, CONICET  
Av. J.B. Justo 4302 – (7600) Mar del Plata, Argentina – Fax: +54(0)223 4810046  
e-mail: hmonte@fi.mdp.edu.ar

**Palabras clave:** Fractura, Funciones de Peso, Cierre Parcial, Tensiones Residuales, Métodos Numéricos.

**Resumen.** *Un método computacional simple, basado en la teoría de las Funciones de Peso, es empleado para determinar el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) en fisuras de geometría irregular y sometidas a estados de carga arbitrarias. El programa desarrollado (Calsyf) se basa en una función de peso definida geoméricamente por el algoritmo denominado integral “O”. Este algoritmo, implementado numéricamente por otros autores (programa Oore) permite analizar fisuras de frente irregular interiores en un volumen infinito. Sin embargo, en los resultados aparece un error creciente cuanto menor es el factor de aspecto de las fisuras estudiadas. En el programa Calsyf se emplean subrutinas de cálculo del programa Oore, pero se introduce una discretización más libre y no menos eficiente que permite resolver geometrías más complejas del frente de fisura. Asimismo, se introducen un conjunto de correcciones que permiten evitar el error mencionado antes, y extender el rango de aplicación de la integral “O” a fisuras superficiales de geometría irregular, como las que se presentan a partir de micro defectos en cordones de soldadura. Ejemplos de fisuras internas con frente irregular son presentados con el objeto de verificar la exactitud del método.*

*Dos aspectos de interés en un problema tecnológico son resueltos: el cierre parcial de fisuras superficiales en un campo de tensiones residuales por granallado; y la posterior propagación de las mismas por fatiga. Para hallar el cierre parcial de fisuras se recurre a un proceso iterativo, empleando el programa Calsyf como subrutina de un algoritmo de optimización no lineal, con el que se determina la frontera de contacto entre las caras de fisura imponiendo la condición de FIT nulo. La propagación se modeló empleando la ley de Paris.*

## 1 LA FUNCIÓN DE PESO PARA GEOMETRÍAS ARBITRARIAS

### 1.1 La Integral “O”

Este algoritmo, atribuido a Oore y Burns [1], permite estimar con buena aproximación la Función de Peso (FP) de geometrías de fisura arbitrarias bajo tensiones modo I en forma numérica, como se muestra en el trabajo de J.L. Desjardins y otros [2].

La integral “O” está definida para fisuras simplemente conexas interiores en un volumen infinito, y ha sido obtenida examinando la estructura de las funciones de peso correspondientes a soluciones conocidas. Como se muestra en la Fig. 1,  $Q'$  es el punto de la frontera de la fisura donde se ha de computar el factor de intensidad de tensiones  $K_{Q'}$  para un par de fuerzas de apertura  $P_Q$  actuando en un elemento de área  $dA$  situado en el punto  $Q$  de la fisura. La FP propuesta por Oore se expresa según la ecuación:

$$W_{QQ'} = \frac{\sqrt{2}}{\pi \cdot l_{QQ'}^2} \cdot \frac{1}{\left[ \int_s \frac{ds}{\rho_Q^2} \right]^{1/2}} \quad (1)$$

Con la cual puede hallarse  $K$  en el punto  $Q'$ :

$$K_{Q'} = \int_A \sigma_Q \cdot W_{QQ'} \cdot dA \quad (2)$$

La FP de Oore coincide con la solución exacta de tres fisuras de geometría regular 3D sujetas a cargas puntuales en modo I: la fisura circular, la fisura de frente recto semi-infinito y la fisura de ligamento circular en volumen infinito [1]. En fisuras de geometría arbitraria, debe realizarse una evaluación numérica por medio de un programa adecuado. En el trabajo de Desjardins, se describe una técnica numérica eficiente para determinar  $K_I$  en puntos del frente de fisura; empleando elementos interiores en los que la integración se realiza por el método de puntos de Gauss, y elementos de borde cuya contribución a la solución se halla por un análisis numérico semi-analítico particular. En la Fig. 2 se pueden observar los detalles de la discretización empleada y el número de puntos de Gauss usados para calcular  $K_I$  en un punto genérico  $Q'$  del borde. Para los elementos interiores,  $l_{QQ'}$  y  $\rho_Q$  son ambos distintos de cero (ver Fig. 1); por lo que la contribución  $\delta K$  a la integral (2) de cada elemento interior puede ser calculada por puntos de Gauss-Legendre según la ecuación (3):

$$\delta K_{Q'} = \Delta A \cdot \sum_{i=1} \sum_{j=1} \omega_{ij} \left\{ \sigma_Q \cdot W_{QQ'} \right\}_{ij} \quad (3)$$

Donde  $\Delta A$  es el área del elemento, y la sumatoria se realiza sobre los puntos de Gauss ( $i,j$ ) de peso relativo  $\omega_{ij}$ . El número de puntos empleados aumenta en la cercanía de  $Q'$  (Fig.2). En cuanto a los elementos de contorno, indicados con rayado fino, por contener a la singularidad (ver ecuación 1) son calculados mediante un procedimiento semi-analítico.

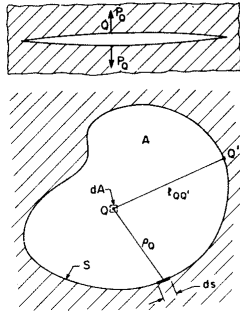


Fig. 1: Def. de variables en la integral "O"

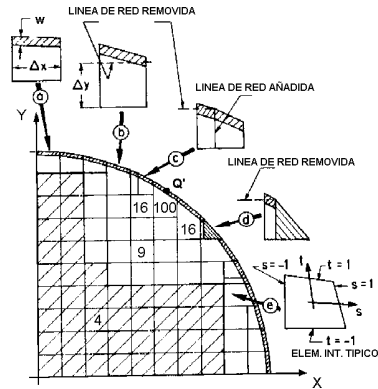


Fig. 2: Discretización en fisura circular (Desjardins).

En la Fig. 2 también se aprecia cómo son modificadas las líneas de la red inicial para el mallado interno a fin de obtener los elementos de contorno y adyacentes apropiados.

En el trabajo de Desjardins se estudian fisuras interiores en un volumen infinito y simétricas según dos ejes ortogonales. En particular, fisuras circulares y elípticas fueron analizadas con el procedimiento descrito para tensiones uniformes y lineales, y los resultados comparados con la solución exacta en cada caso. El error porcentual máximo reportado es similar para los dos tipos de carga en cada geometría; 0.65% para la circunferencia y 18.38% para la elipse de factor de aspecto pequeño. En este último caso el error máximo ocurre en la región de mayor curvatura de la elipse; principalmente por causa del algoritmo en sí y no por su implementación numérica [2].

## 1.2 El Programa "Calsyf"

Nos referiremos aquí a la posibilidad de lograr mayor alcance y generalidad del método, que lo haga aplicable a fisuras de geometría de borde irregular; como por Ej. las que nacen en talones de soldadura; y que están sometidas a tensiones en parte compresivas, como es el caso de las tensiones residuales. Con este fin, se desarrolló un programa computacional que permite calcular valores de  $K_I$  en el borde, modelado por segmentos de longitud arbitraria. El cálculo de  $K_I$  en un punto del contorno utilizando la función de peso de Oore requiere de gran cuidado en la discretización de la superficie de la fisura y en el uso adecuado de los puntos de Gauss para computar la integral, debido a la existencia de singularidades de la FP en el borde, como se vio en la sección anterior.

El programa "Calsyf" realiza un procedimiento de cálculo en los elementos interiores y de contorno similar al empleado por Desjardins [2]. En una primera implementación del programa<sup>1</sup> pudo calcularse  $K_I$  para tensión constante con errores inferiores a 0.5% en las circunferencias; y

<sup>1</sup> En la División SyF se contó con una versión experimental del programa de Desjardins, lo que facilitó la implementación de algunas subrutinas; en particular para tratar los elementos interiores y de contorno.

con error cercano al 17% para las elipses con factor de aspecto  $a/c = 0.1$ . Posteriormente esto pudo mejorarse notablemente con la introducción de una función correctora, como se expondrá más adelante, y generalizar el método a casos de mayor interés; como son por ejemplo las fisuras superficiales en un volumen semi-infinito.

Resulta claro que para tratar fisuras irregulares como por ejemplo las que aparecen en talones de soldadura, éstas deben ser modeladas manteniendo un solo eje de simetría, tangente a la superficie, y el programa debe ser capaz de calcular  $K$  en fisuras cuya geometría no sea necesariamente decreciente en el cuadrante, como es el caso de las elipses. Por otra parte, el mallado de la fisura mostrado en la Fig. 2 no aprovecha facilidades que brinda el algoritmo, como el hecho de no ser necesaria la conectividad en los nodos de la red. El programa Calsyf logra los objetivos mencionados y utiliza un mallador con mayor grado de libertad, obteniendo resultados más confiables en redes con menos elementos, lo cual optimiza el tiempo de cómputo. En la Fig. 3 se muestra el mallado empleado por Calsyf para una elipse de factor de aspecto 0.5.

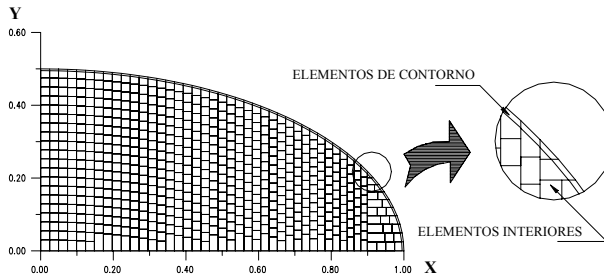


Figura 3: Discretización de un cuarto de elipse por el programa Calsyf.

Para elaborar un criterio correctivo para fisuras interiores de geometría arbitraria que presentan un solo eje de simetría, se tomaron en cuenta dos factores: uno local, la curvatura del contorno; y otro general, el factor de aspecto generalizado (ubicando los semiejes mayores según el eje de simetría y el perpendicular). Los resultados de esta corrección se contrastan con los obtenidos por el Método de Elementos de Contorno (MEC), y posteriormente se optimiza la corrección para calcular fisuras superficiales.

### 1.2.1 El Algoritmo Corrector

Una geometría propicia para juzgar la precisión de la integral “O” en el cálculo de  $K_I$  en un punto del frente de fisura, es la elíptica. Una elipse es definida en forma paramétrica por las ecuaciones:

$$x = c \cdot \cos(\phi) \quad ; \quad y = a \cdot \sin(\phi) \quad (4)$$

Donde los parámetros  $a$  y  $c$  son los semiejes de la elipse, mientras que  $\phi$  es el parámetro angular correspondiente al punto de interés “Q” en la elipse, como puede verse en la Fig. 4. Existen soluciones exactas para la elipse bajo carga Cte., o lineal como la mostrada en Fig. 5.

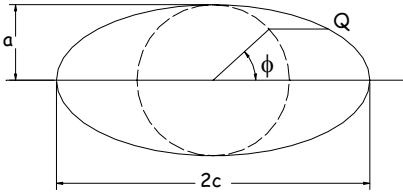


Fig. 4: Fisura elíptica y parámetros característicos

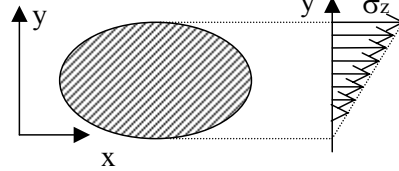


Figura 5: Fisura elíptica bajo tensión lineal

La curvatura en un punto de la elipse está dada por la ecuación (5):

$$\chi(\phi) = \frac{a/c^2}{\left[\sin^2(\phi) + (a/c)^2 \cdot \cos^2(\phi)\right]^{3/2}} \quad (5)$$

Definiendo la curvatura normalizada, adimensional, como  $\chi_n = \chi \cdot a$ , resulta:

$$\chi_n(0) = (c/a) \quad ; \quad \chi_n(\pi/2) = (a/c)^2$$

Vemos que la función  $\chi_n(\phi)$  es continua y monótona decreciente con  $\phi$  entre valores que dependen fuertemente del factor de aspecto. Así por ejemplo, el rango de variación de la curvatura normalizada para una elipse de factor de aspecto 0.1, va de un valor de 10 al extremo del semieje mayor, a 0.01 en el extremo del semieje menor, tomando valores que son intermedios para  $0 < \phi < \pi/2$ .

La fisura elíptica situada en un volumen infinito y sometida a tensión remota uniforme  $\sigma$  fue resuelta por Irwin [3], obteniendo la solución exacta dada por la expresión:

$$K = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{E(k)} \cdot \left( \sin^2(\phi) + \frac{a^2}{c^2} \cos^2(\phi) \right)^{1/4} \quad (6)$$

Donde:  $k^2 = 1 - (a/c)^2$ , y  $E(k)$  es la Integral Elíptica Completa de 2ª especie.

Para la misma geometría y carga lineal normal al plano de la fisura como la mostrada en la Fig. 5, la solución exacta se debe a Shah y Kobayashi [4], ecuación (7):

$$K = \frac{\sigma_z \sqrt{\pi a}}{E(k)} \cdot \left( \sin^2(\phi) + \frac{a^2}{c^2} \cos^2(\phi) \right)^{1/4} \left[ 1 + \frac{k^2 E(k) \sin(\phi)}{(1+k^2)E(k) - k^2 F(k)} \right] \quad (7)$$

Donde:  $k^2 = 1 - k'^2$  y  $F(k)$  es la Integral Elíptica Completa de 1ª especie.

En el trabajo de Desjardins, se reporta un error porcentual para la elipse de factor de aspecto 0.2 que para tensión uniforme varía de forma monótona entre -3.24% al extremo del semieje menor, y +18.38% al extremo del semieje mayor. Asimismo para la tensión lineal, variando entre 0 y 2 al extremo de los ejes menores, la variación fue de -1.88% a +17.82% para los mismos puntos. De resultados obtenidos con el programa Calsyf, se concluyó que estas diferencias en los extremos de ambos semiejes disminuyen al aproximarse el factor de aspecto a

1, valor correspondiente a una circunferencia. Esto es de esperar, pues como ya fue mencionado para esta geometría, la integral “O” coincide con la función de peso exacta. Dado que el mayor error se da en la región de mayor curvatura de la elipse, y éste se incrementa cuanto menor es el factor de aspecto de la elipse, parece existir una dependencia del error tanto del factor de aspecto, como de la curvatura. Es conveniente trabajar con un factor de corrección  $f_c$  dado por:

$$f_c = \frac{K(\text{solución exacta})}{K(\text{Oore})} \tag{8}$$

Calculando el factor de corrección en función de la curvatura para elipses de radios de aspecto entre 0.05 y 1, se obtiene el conjunto de curvas que se muestran en la Fig. 6

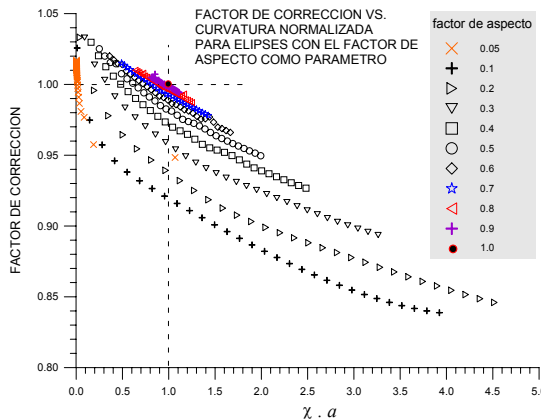


Fig. 6: Factor de corrección en elipses bajo tensión uniforme, en función de la curvatura

Un punto límite en el gráfico corresponde a una circunferencia, con curvatura única igual a 1, y factor de corrección 1. Vemos que para un rango de curvaturas mayor que uno, las curvas son aproximadamente paralelas, y que a medida que el factor de aspecto tiende a uno, las curvas “se concentran” en el punto (1,1) del gráfico de la Fig. 6. Para la elipse con factor de aspecto 0.05, la curvatura normalizada crece rápidamente cuando  $\phi \rightarrow 0$ , mientras el factor de corrección varía más lentamente. Esto hace que la curva se cruce con las restantes para  $\chi_n > 1$  y se pierda el paralelismo; pero en este caso el error puede deberse al cálculo numérico. En la Fig. 7 se esquematiza una curva de las mostradas en la Fig. 6 para un dado factor de aspecto.

A fin de explorar el comportamiento del factor de corrección para curvatura nula, se emplearon soluciones de  $K$  para fisuras rectangulares interiores de distinto factor de aspecto, obtenidas por el método de fuerzas de volumen (Body Force Method) por M. Isida [5]. La exactitud de las soluciones está dentro del 1%. En la Fig. 8 se comparan las soluciones de  $K$ , y puede verse que ambas soluciones de  $K(A)$ , la de M. Isida y la de Oore, convergen a la solución exacta cuando  $r$  tiende a cero, que corresponde a la geometría de una fisura pasante en 3-D, o equivalentemente en 2-D, a una fisura central en una placa infinita. Para radios de aspecto entre

0.2 y 1, ambas soluciones resultan aproximadamente paralelas, con coeficientes de correlación  $R > 0.998$ . En las elipses, las que exhiben curvaturas inferiores a 0.1 de las estudiadas en la Fig. 6, son las de factor de aspecto 0.05 a 0.3.

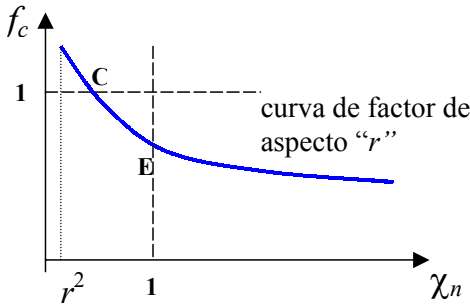


Fig. 7: Esquema de una curva de la Fig. 6

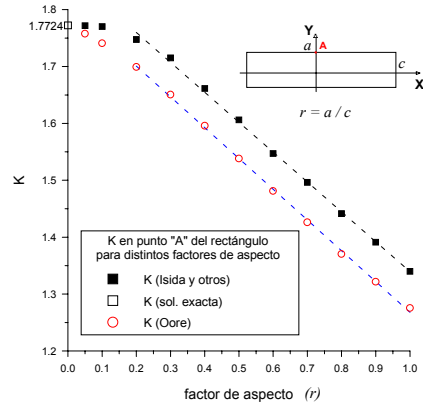


Fig. 8: Fisura rectangular en volumen infinito

En la Tabla 1 pueden verse los factores de corrección para estas curvaturas mínimas correspondientes al extremo del semieje menor de las elipses, comparadas con los rectángulos de igual factor de aspecto.

Factor de aspecto (eje min./eje máx.)	Curvatura normalizada mínima de las elipses	Factor de corrección	
		Elipses	Rectángulos
0.05	0.0025	1.017	1.008
0.1	0.01	1.026	1.017
0.2	0.04	1.033	1.028
0.3	0.09	1.033	1.039

Tabla 1: Factor de corrección en elipses (curvatura mínima) y en rectángulos

Como se observa, las diferencias entre ambos factores de corrección son inferiores al 0.9%, error cercano al numérico de Calsyf e Isida. Esto indica que es posible modelar el algoritmo corrector a partir de las curvas del gráfico 6, teniendo en cuenta la curvatura nula como caso límite, y la condición  $f_c = 1$  para las fisuras de geometría pasante (factor de aspecto y curvatura nulos) y circular (factor de aspecto y curvatura iguales a uno). Una forma de implementar esto consiste en caracterizar matemáticamente las curvas de la Fig. 6, teniendo en cuenta los puntos indicados en la Fig. 7.

Como ya vimos, la menor curvatura para cada elipse (cota izquierda) es  $r^2$ , y los factores de corrección correspondientes a este punto no superan en ningún caso el valor  $f_c = 1.033$ . El punto “E” en la Fig. 7 corresponde a la intersección de la curva con la recta vertical que pasa por  $\chi_n = 1$ , y el punto “C” a la intersección con la recta horizontal que pasa por  $f_c = 1$ .

6, se concluyó que la geometría de las curvas puede caracterizarse sobre la base del factor de aspecto  $r$  y la curvatura normalizada  $\chi_n$  de la siguiente manera:

- Para  $r < 0.7$ , por una parábola para  $\chi_n < 1$ , y por una función exponencial para  $\chi_n > 1$ ; con una condición de empalme dada por la continuidad de la derivada primera de ambas funciones en el punto “E” (ver Fig. 7).
- Para  $r \geq 0.7$  con una función exponencial.

Los puntos “C” y “E” en la Fig. 7 pueden determinarse para cada curva mediante sendas funciones del factor de aspecto. Para ello, se comenzó por ajustar con una spline cúbica suave los puntos de cada curva de la Fig. 6, hallando luego la intersección de estas splines con las rectas mencionadas. Con el conjunto de ordenadas de los puntos “E” se obtuvo una función del factor de aspecto  $R(r)$ . La ecuación (9) muestra el mejor ajuste obtenido.

$$\begin{aligned} R(r) &= 0.9376 + 0.013 \cdot r && ; 0 \leq r < 0.2 \\ R(r) &= 0.8915 + 0.2953 \cdot r - 0.2773 \cdot r^2 + 0.0905 \cdot r^3 && ; r \geq 0.2 \end{aligned} \quad (9)$$

Vemos por ejemplo que:  $R(1) = 1$ , y que  $R(0.2) = 0.9402$ . Para  $r < 0.2$  se ajusta con una recta dada la dispersión de datos para estas elipses, cuidando de no desmejorar la corrección para los rectángulos. Con el conjunto de abscisas de los puntos “C”, (abscisa de corte), se obtuvo un ajuste por tramos  $C(r)$ , que vemos en la ecuación (10) y en la Fig. 9.

$$\begin{aligned} C(r) &= 0.839 \cdot r && ; 0 \leq r < 0.2 \\ C(r) &= -0.278554 + 2.58316 \cdot r - 1.78777 \cdot r^2 + 0.483164 \cdot r^3 && ; 0.2 \leq r \leq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

El segmento con que se ajusta para  $r < 0.2$  es el mejor encontrado dada la menor resolución numérica de esta región, y teniendo en cuenta que para una elipse de factor de aspecto nulo la abscisa de corte debe ser igual a cero. Luego, para un factor de aspecto dado, las ecuaciones (9) y (10) aportan los puntos “E” y “C”, los que junto a la condición de continuidad en el punto “E” permite hallar la ecuación de la parábola cuadrática:

$$f_c(\chi_n) = p \cdot \chi_n^2 + q \cdot \chi_n + t \quad (11)$$

Con coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} p &= (1 + A2 - R(r) - A2 \cdot \chi_n) / dc1 \\ q &= (A2 \cdot \chi_n^2 + 2R(r) - A2 - 2) / dc1 \\ t &= R(r) - p - q \\ A2 &= (0.85076 - R(r)) / 3.80872 \\ dc1 &= (\chi_n - 1)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Respecto del ajuste por una función de tipo exponencial para  $\chi_n > 1$ , al observar la Fig. 6 vemos que el mayor paralelismo de las curvas se da principalmente para las de factor de aspecto entre 0.2 y 0.9 y curvaturas mayores que 0.5. Puesto que la ecuación (9) da el punto de intersección “E” de esas curvas con la recta vertical que pasa por curvatura igual a 1, podemos



trasladarlas de forma que todas pasen por el punto (1,1); y de ese nuevo conjunto de puntos obtener una curva maestra. Esto puede apreciarse en la Fig. 10.

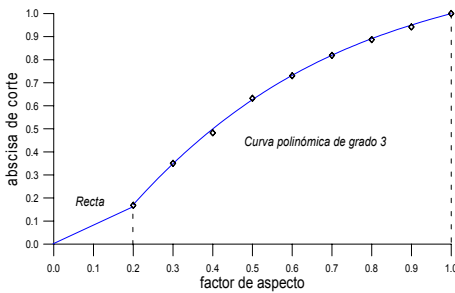


Fig. 9: Abscisas Pto. “C” de curvas Fig. 6 y ajuste.

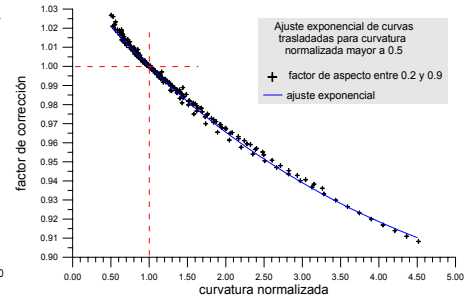


Fig. 10: Curvas de Fig. 6 trasladadas por la ec. (9)

La curva continua azul corresponde al ajuste exponencial de los puntos, ecuación (13)

$$f_c(\chi_n) = 0.85076 + 0.23245 \cdot \exp\left[\frac{-(\chi_n + 0.68767)}{3.80872}\right] \quad (13)$$

Las curvas de la Fig. 6 con factores de aspecto entre 0.2 y 0.9 tienen sus menores abscisas entre 0.04 y 0.81, con factores de corrección máximos que van de 1.033 a 1.005 respectivamente. Por ello se consideró razonable recortar la exponencial para cualquier caso en  $f_c = 1.0214$ , valor muy cercano al promedio de los máximos para todas las curvas, y que coincide con el valor de la exponencial para curvatura  $\chi_n = 0.7$

Sobre la base de las ecuaciones (9) a (12), se elaboró una rutina que pudiera aportar un factor de corrección satisfactorio para resolver geometrías elípticas y rectangulares, y que también pudiera mejorar considerablemente la precisión del programa Calsyf en el tratamiento de fisuras de geometría irregular.

En conclusión, podemos decir que el programa Calsyf calcula para una geometría arbitraria un primer valor de  $K$  en un punto dado del frente en base a la integral “O”; el factor de aspecto de la fisura según sus cotas máximas; y la curvatura normalizada en el punto. Por último, corrige el valor de  $K$  mediante el factor de corrección. El  $K$  corregido se designa como “ $K_{mod}$ ”.

### 1.2.2 Fisuras de frente regular

Dado que el algoritmo corrector se realizó en base a las elipses, el  $K$  aportado por Calsyf tendrá un error inferior al 1% en ellas. Esto puede comprobarse para la elipse de factor de aspecto 0.5 bajo carga constante en la Fig. 11. Como puede verse en la figura, la mayor diferencia de  $K_{mod}$  respecto de la solución exacta se da en el extremo del semieje menor con un error de 0.61%, mientras que en el extremo del semieje mayor el error es de -0.28% frente a 5.29% de  $K$  (Oore). La misma geometría, bajo carga lineal del tipo mostrado en la Fig. 5, puede observarse en la Fig 12.

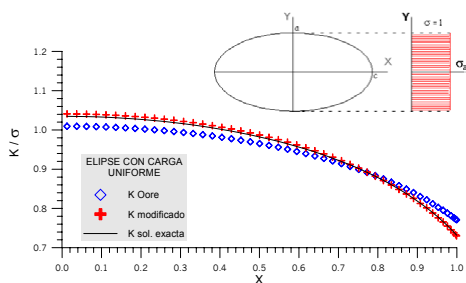


Fig. 11: Elipse con  $r = 0.5$  bajo tensión remota Cte.

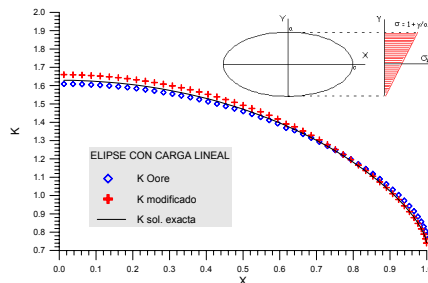


Fig. 12: Elipse con  $r = 0.5$  y tensión:  $\sigma_z = 1 + y/a$

Para la tensión lineal, el mayor error de  $K_{mod}$  se da nuevamente al extremo del semieje menor con error igual a 1.87%, mientras que el mayor error de  $K$  (Oore) ocurre en el extremo del semieje mayor, de mayor curvatura, con un error igual a 5.27%. En el caso de los rectángulos bajo tensión uniforme, el error de  $K_{mod}$  se incrementa para radios de aspecto mayores que 0.5, con un error máximo para la fisura cuadrada, de 2.8%. Recuérdese sin embargo que la precisión asegurada para esta geometría en la referencia citada [5] es del 1%.

### 1.2.3 Fisuras de Frente Irregular

A fin de comprobar la eficacia del algoritmo corrector en geometrías arbitrarias, se diseñaron algunas geometrías no regulares interiores en un volumen infinito, y se determinó el valor de  $K_{mod}$  en el frente, para después comparar con soluciones obtenidas por el Método de Elementos de Contorno (MEC). Los casos estudiados consistieron en una geometría con dos planos de simetría y curvaturas positivas y negativas, denominada “Guitán”, para ver su efecto en las soluciones; y en una geometría híbrida, asimétrica, resultante de una combinación entre Guitán y una elipse, denominada “Guitel”. Ambas geometrías se aprecian en las figuras 13 y 14 respectivamente. La geometría “Guitán” se define con la ecuación (14), y se muestra en Fig. 13.

$$r(\theta) = 1 + q \cdot \cos(2 \cdot \theta) \tag{14}$$

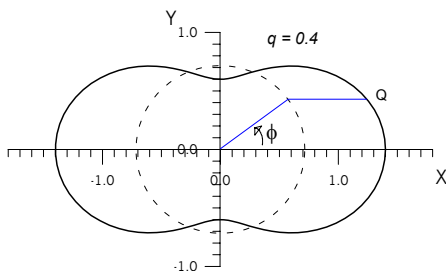


Fig. 13: Geometría irregular “Guitán” con  $q = 0.4$

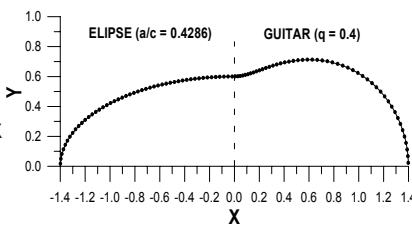


Fig. 14: Geom. irregular “Guitel”, mitad superior

La curva de la Fig. 13 tiene factor de aspecto  $r = 0.5092$ , curvatura máxima  $\chi_n = 1.0904$  y curvatura mínima  $\chi_n = -1.9447$ . En esta geometría el factor de aspecto depende en forma significativa de  $q$ . La curva “Guitel” consiste en una combinación de una curva Guitán y una elipse. Esta geometría permite entonces estudiar fisuras con distintos factor de aspecto y curvaturas (positivas y negativas), al tiempo que presenta un solo eje de simetría, a diferencia de la “Guitán”, que mostraba dos ejes de simetría. En la Fig. 14 se muestra sólo la parte superior de la curva, dado que el eje  $x$  es un eje de simetría. La curva “Guitel” mostrada tiene factor de aspecto  $r = 0.5092$ , curvatura máxima  $\chi_n = 2.6295$  y curvatura mínima  $\chi_n = -1.844$ .

En las geometrías irregulares presentadas interesa ver la eficacia del algoritmo corrector en las regiones de curvatura negativa, puesto que la corrección se basó en geometrías con curvaturas positivas al no encontrarse otras soluciones en la literatura especializada.

**1.2.4 Análisis por “Calsyf” y por Elementos de Contorno**

Se realizaron corridas de Calsyf para las curvas descriptas, a fin de comparar los  $K$  obtenidos con y sin corrección con el resultante del MEC. En las Figs. 15 y 16 pueden observarse los resultados. Puede verse que los resultados de  $K_{mod}$  son mejores que los de  $K_{Oore}$ , al comparar con los del MEC. El error máximo para las fisuras Guitán y Guitel, expuestas las Figs. 15 y 16, es cercano al 2% .

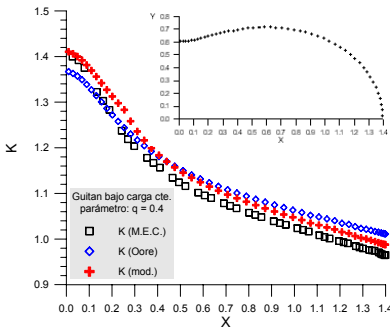


Fig. 15:  $K$  en Guitán con  $q = 0.4$  y tensión Cte.

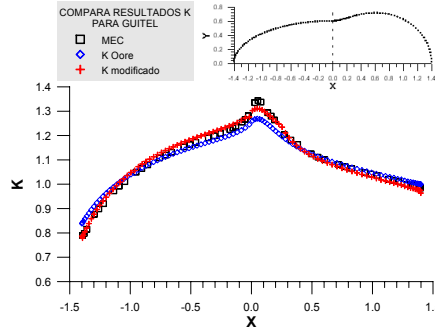


Fig. 16:  $K$  en Guitel con  $q = 0.4$  y tensión Cte.

**1.2.5 Fisuras Superficiales**

La Integral “O” fue desarrollada para resolver el caso de fisuras de forma arbitraria situadas en un volumen infinito. Si bien el algoritmo corrector y la implementación numérica antes expuestos otorgan al algoritmo facilidad de aplicación y mayor precisión, subsiste una limitación dada por el hecho de que la mayor parte de los problemas fractomecánicos requieren tratar con fisuras superficiales. En este sentido, recordemos que la expresión genérica del factor de intensidad de tensiones en un punto del frente de fisura es:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} Y \tag{15}$$

Donde el factor adimensional “Y” designa la función de configuración o factor de intensidad de tensiones normalizado, dependiente de los parámetros geométricos y de la configuración de carga. Al tratar fisuras superficiales, en lo que sigue separamos en dos factores a Y:

$$Y \rightarrow \lambda_s \cdot f_v \tag{16}$$

Donde  $\lambda_s$  se asocia a la corrección debida a la presencia de la superficie libre, y  $f_v$  es la función que corresponde a la fisura en un volumen infinito. Este enfoque facilitará el uso del programa Calsyf para obtener la solución para  $f_v$  en fisuras superficiales de forma arbitraria bajo cargas cualesquiera, a condición de contar con un  $\lambda_s$  adecuado en cada caso.

En procedimientos usuales tales como el recomendado por el “Asme Nuclear Pressure Vessel Code” [6], el tratamiento de fisuras superficiales de geometría irregular como la mostrada en la Fig. 17 suele realizarse estudiando geometrías semielípticas que pueden asociarse, bajo criterios de ingeniería, con la fisura real. Para una geometría irregular también es posible asignar, de forma similar a la mostrada antes en la Fig. 4, un valor del parámetro  $\phi$  a un punto en la frontera, como puede verse en la Fig. 18. El punto “C” en la Fig. 18 corresponde a  $\phi = 0^\circ$ , y el punto más profundo “A” a  $\phi = 90^\circ$ . Dado que el factor de corrección superficial es una función decreciente con  $\phi$ , la corrección es mayor para el punto “C” que para el punto “A”, como es de esperar. Cuando la geometría de la fisura corresponde a una elipse, la definición dada para el parámetro angular coincide con la dada anteriormente para las elipses.

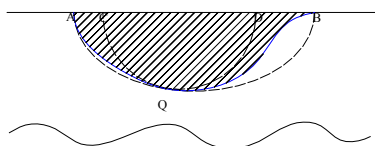


Figura 17: Fisura superficial y elipses

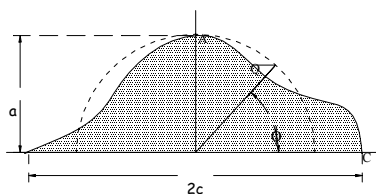


Figura 18: Fisura superficial irregular

Como se observa en la Fig. 17, al buscar acotar el valor de  $K_I$  en el punto más profundo de una fisura (Q), la semielipse en línea punteada AQB aporta un valor máximo de  $K_I$  en el punto de interés; mientras que la semielipse CQD, que sólo aproxima la curvatura local del frente de fisura al compartir un tramo del mismo en un entorno del punto bajo estudio, aportará un valor de mínima de  $K_I$ .

Como se aprecia en las ecuaciones (6) y (7), la función de configuración  $f_v$  definida en (16) difiere para distintas configuraciones de carga, aunque corresponden a igual geometría.

Como se expuso en el apartado 1.2.1, estas soluciones exactas fueron empleadas para obtener el algoritmo corrector para la Integral “O”, por lo que sabemos que el programa Calsyf puede calcular con buena precisión la función  $f_v$  para distintas geometrías elípticas en un volumen infinito. Si definimos la función  $f_\phi$  como:

$$f_\phi = (\sin^2(\phi) + (a/c)^2 \cos^2(\phi))^{1/4} \tag{17}$$

La solución de Newman-Raju para la elipse en volumen infinito y bajo tensión  $Cte.=1$  es [13]:

$$f_v = f_\phi / \sqrt{Q} \quad (18)$$

con:

$$Q = 1 + 1.464 (a/c)^{1.65} \quad (19)$$

Donde  $Q^{0.5}$  aproxima la Integral Elíptica de 2ª especie. La función de configuración para la fisura semielíptica bajo tensión uniforme está dada por:

$$Y = \lambda_s f_v \quad (20)$$

Con el factor de corrección por superficie libre  $\lambda_s$  dado por:

$$\lambda_s = [1.13 - 0.09(a/c)].[1 + 0.1(1 - \sin(\phi))^2] \quad (21)$$

Para el estudio de fisuras superficiales sometidas a cargas arbitrarias, un procedimiento usual que simplifica el problema consiste en obtener la solución de  $K$  en la frontera de una fisura equivalente interior en un volumen infinito, tal que la superficie libre constituye un plano de simetría tanto para la geometría de la fisura como para las cargas aplicadas en su superficie. En la Fig. 19 puede observarse cómo esta fisura equivalente es obtenida.

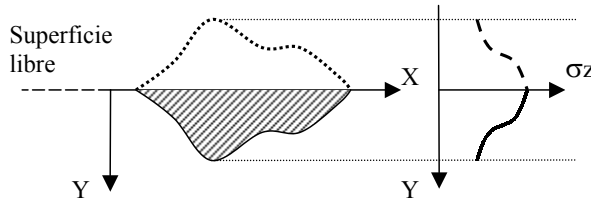


Figura 19: Fisuras superficial y equivalente en volumen

La Integral “O” permite aplicar fácilmente este procedimiento a fisuras y cargas arbitrarias, como se muestra en el trabajo de Oore y Burns [7]. Sin embargo, es fácil advertir que para el caso de fisuras superficiales elípticas de factor de aspecto cercano a cero y bajo tensión uniforme existe una diferencia con el resultado de Newman y Raju dado por el factor  $\lambda_s$ , que puede superar al 24 % para el punto sobre la superficie del frente de fisura, y ser del 13 % para el punto más profundo de la fisura. Para el caso de fisuras semicirculares, la diferencia supera el 14 % para el punto sobre la superficie, y el 4 % para el punto más profundo. Por ello, para el caso de fisuras superficiales en placa gruesa tal que puede ser tratada como un volumen semi-infinito, se propone utilizar un factor  $f_v^C$  correspondiente al resultado dado por Calsyf para la fisura equivalente (ver Fig.19 y el factor de corrección superficial  $\lambda_s$  dado por la ecuación (21)). El factor de intensidad de tensiones normalizado  $K_{IN}$  queda entonces expresado para un punto en el frente de fisura por:

$$K_{IN}(\phi) = \lambda_s(\phi) \cdot f_v^C \quad (22)$$

Es de notar que la ecuación (22) permite realizar el análisis de  $K_I$  también en geometrías irregulares; definiendo el parámetro angular  $\phi$  asociado a un punto “Q” del frente tal como se muestra en la Fig. 18.

Como se pudo ver en el apartado 1.2.3 al tratar casos de fisuras interiores de frente irregular, la buena correlación con los resultados de Calsyf permite esperar, si la corrección dada por el factor  $\lambda_s$  se muestra aceptable para el caso de geometrías regulares, un buen desempeño para el caso de fisuras superficiales. Si bien no se han encontrado en la literatura especializada valores tabulados de soluciones correspondientes a fisuras superficiales irregulares, existen soluciones para fisuras semielípticas que son útiles para chequear resultados obtenidos por el procedimiento descrito. En la tabla 2 se pueden observar los resultados dados por Calsyf sobre la base de la ecuación (22) comparados con los obtenidos por Isida y otros [8] para el caso de una fisura semicircular y una semielíptica de factor de aspecto 0.6, en un volumen semi-infinito. Los resultados de Isida tabulados en Handbooks (Y. Murakami) corresponden sólo al punto más profundo de ambas fisuras (“A”), y los correspondientes al punto superficial (“C”) son los de la semicircunferencia bajo tensión uniforme. La tensión lineal corresponde a una configuración de carga lineal normal al plano de la fisura, que vale  $\sigma$  en la superficie y 0 en el punto más profundo. Como es usual,  $K_I$  se normaliza con  $\sigma$ .

TENSIÓN:		UNIFORME			LINEAL		
a/c	PUNTO	ISIDA	CALSYF	e %	ISIDA	CALSYF	e %
1.0	A	0.659	0.662	0.46	0.173	0.186	7.5
	C	0.745	0.728	- 2.28	---	0.602	---
0.6	A	0.832	0.845	1.56	0.274 <sup>(*)</sup>	0.270	-1.5
	C	---	0.714	---	---	0.595	---

Tabla 2: Factor de intensidad de tensiones normalizado en fisuras semielípticas  
 (\*): valor para caso de placa gruesa con  $a/t = 0.01$

Los errores porcentuales se han tomado respecto de los resultados de Isida. Se observa que para tensión uniforme la correlación de resultados es muy buena, y puede considerarse buena para la tensión lineal ya que la diferencia de 7.5% en el punto más profundo para la fisura semicircular corresponde a una magnitud pequeña, donde el error de cálculo numérico es más notorio en el error porcentual. En un caso se utilizó el valor de Isida para placa finita (\*), ya que se consideró que la relación profundidad de fisura a espesor de placa ( $a/t$ ) se asimila al caso de un volumen semi-infinito.

## 2 CIERRE PARCIAL Y PROPAGACIÓN DE UNA FISURA CON TENSIONES RESIDUALES POR GRANALLADO

Un procedimiento industrial muy útil para alargar la vida útil de componentes como, p.e., los rodillos de laminación para la producción de tubos sin costura o chapas, consiste en el tratamiento de superficies por granallado (“golpeteo” o “shot peening”), consistente en dirigir contra una pieza metálica (de acero o aleación de aluminio) una corriente a alta velocidad de esferitas de acero. Esto permite obtener sobre la superficie una capa de poca profundidad con tensión residual compresiva, capaz de producir el cierre parcial de fisuras y defectos superficiales

que pueda contener. La evaluación del cierre parcial de estas fisuras resulta fundamental para determinar los valores correctos del factor de intensidad de tensiones a lo largo de su frente y posterior estimación de la vida a la fatiga.

En este primer ejemplo se aplica la metodología descrita en los capítulos anteriores al caso del cierre parcial y propagación de una fisura bajo ciclos de carga por tensión remota uniforme y en presencia de tensiones residuales producidas por granallado. Es necesario en este caso resolver adecuadamente el valor del factor de intensidad de tensiones en la parte abierta del frente de fisura; a fin de caracterizar correctamente la geometría resultante de la fisura y su evolución por fatiga. Este problema ha sido abordado desde diferentes ángulos por diversos investigadores en el campo de la Mecánica de Contacto empleando métodos como el de la distribución de dislocaciones en casos planteados en 2-D, o el de fuerzas de volumen (“body force” o “eigenstrain method”) para casos 3-D. El método de fuerzas de volumen es básicamente un método indirecto de elementos de contorno y ha sido empleado para estudiar el crecimiento de fisuras superficiales en procesos de laminado con lubricación. Una nueva formulación del método por D.N. Dai y colaboradores [9], es empleada por los mismos autores para estudiar el cierre parcial y la fricción con deslizamiento de fisuras superficiales semielípticas normales al plano de la superficie y a corta distancia de la misma. En otro trabajo de Dai [10], las fisuras se hallan sometidas a tensión remota uniforme y a un campo de tensiones residuales compresivas en la zona próxima a la superficie. Un procedimiento iterativo de cálculo permite determinar la zona de cierre de la fisura (modelo P), previamente a determinar el factor de intensidad de tensiones en el punto más solicitado en tracción de las fisuras.

En este ejemplo se determina el cierre parcial de idénticas fisuras y configuración de carga a las empleadas por Dai, empleando los métodos desarrollados en este trabajo [11].

## 2.1 Formulación del Problema

Se estudiaron seis fisuras superficiales semielípticas normales a la superficie libre de una placa gruesa, supuesta de espesor infinito, a distintas profundidades. Los ejes coordenados se ubicaron de forma que la superficie libre se situara en  $x$ - $z$ , como se aprecia en la Fig. 20. Para todas las fisuras el semieje superficial de la elipse ( $c$ ) es el doble del semieje perpendicular a la superficie ( $a$ ); con valores: 0.15 mm, 0.20 mm, 0.25 mm, 0.30 mm, 0.40 mm y 0.50 mm.

El semiespacio elástico soporta una tensión remota uniforme  $\sigma_0$  según el eje  $z$ , y tensiones residuales  $\sigma(y)$  producidas por granallado cuyos valores normalizados en función de la profundidad se observan en la Fig. 21.

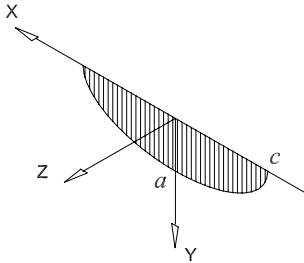


Fig. 20: Ubicación de las semielipses

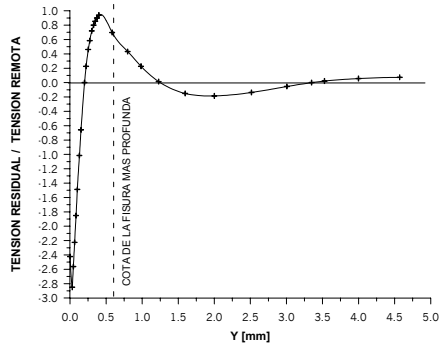


Fig. 21: Tensión residual producida por granallado

La magnitud de las tensiones compresivas actuantes cerca de la superficie, como puede inferirse de la Fig. 21, superan a la tensión remota de apertura  $\sigma_0$  y pueden provocar el cierre parcial de las fisuras en esa región, las cuales se convierten en ese caso en fisuras internas aptas para ser tratadas por el método descrito. De producirse el cierre de las fisuras cerca de la superficie, la parte abierta no es afectada por la cercanía de la superficie libre, haciendo entonces posible el hecho de ser consideradas como internas en un volumen infinito.

La geometría de cierre fue resuelta suponiendo que la frontera efectiva del cierre queda suficientemente aproximada por el arco de elipse  $QRQ'$  (Fig. 22). En los puntos  $Q$  y  $Q'$  de contacto entre el frente de la fisura nominal y la efectiva, ambas curvas tienen derivada primera continua. La elipse de cierre en la Fig. 22 presenta factor de aspecto  $r_1 = c_1/a_1$ , y su centro  $O'$  se halla ubicado a distancia  $b$  del origen sobre el eje coordenado que corresponde al semieje menor  $a_1$ . De esta forma, la geometría de cierre queda definida por dos parámetros, definidos como  $u_1 = r_1$  y  $u_2 = b$ , que deben satisfacer la condición de contacto en los puntos  $Q$  y  $Q'$ . El área rayada en la Fig. 22 indica la región cerrada de la fisura. El mallado empleado por el programa Calsyf se muestra en la Fig. 23, para la fisura de profundidad  $a = 0.50$  mm.

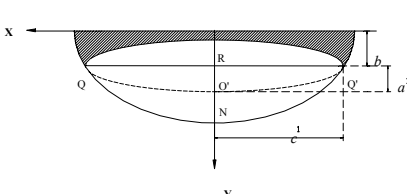


Fig. 22: Variables en la fisura sup. con cierre parcial

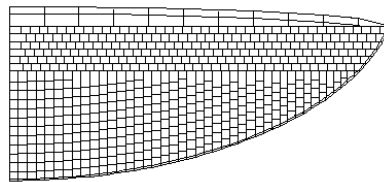


Fig. 23: Discretización en la fisura con  $a = 0.50$  mm

Los parámetros  $u_i$  permiten minimizar el valor de  $K$  sobre un número determinado de puntos en la frontera efectiva. Dada la simetría geométrica y de configuración de carga del problema estudiado, se optó en este trabajo por analizar  $K_I$  en seis puntos equidistantes en una



de las mitades del frente de cierre. Un procedimiento iterativo no-lineal dado por la subrutina LMDIF [12], permitió extremar el funcional:

$$F(u_1, u_2) = \sum_{j=1}^6 K_j^2(x_j, y_j) \quad (23)$$

En los casos de carga dependiente de una sola coordenada,  $\sigma = \sigma(y)$ , resultados previos [11] permiten esperar un frente efectivo cercano a una recta. Esta geometría puede entonces modelarse como una elipse de factor de aspecto alto (ver Fig. 22). Por otra parte, el valor nulo de la carga aplicada corresponde en este caso a  $y_c = 0.1299$  mm. Por ello, a fin de obtener un punto de partida uniforme, se tomó en todos los casos como semilla para la iteración a los valores  $u_1 = 20$ ,  $u_2 = 0.1299$ . Los valores normalizados de la ecuación (23) constituyen, en cada caso, el residuo del proceso iterativo. El programa Calsyf fue testado calculando  $K_I$  para una carga uniforme en el punto correspondiente al semieje menor de una elipse de factor de aspecto 0.5, y el resultado comparado con la conocida solución aportada por Newman y Raju [13]. El error resultó inferior al 0.5%, lo cual permitió esperar buenos resultados al calcular  $K$  mediante este programa en el presente problema. Por último, los valores normalizados del F.I.T. fueron hallados en el punto más profundo de las fisuras y comparados con los resultados obtenidos por Dai y colaboradores [10].

## 2.2 Determinación del Cierre Parcial

La evolución del cierre en función de la profundidad de las fisuras puede apreciarse en la Fig. 24 El mallado corresponde a la discretización triangular realizada por Dai y col. [10], en el cual los elementos rayados representan la parte cerrada de la fisura, en un esquema de elemento abierto/cerrado. La línea continua roja corresponde a los resultados de este trabajo. Puede observarse una muy buena correlación entre ambos resultados, habida cuenta que el esquema empleado por Dai proporciona una frontera “gruesa” de la parte cerrada de la fisura.

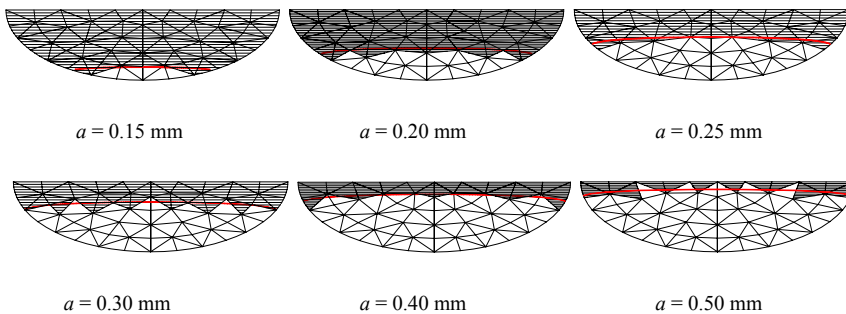


Figura 24: Evolución del cierre de la fisura superficial en el campo de tensiones residuales por granallado

La frontera efectiva se obtuvo con un número de iteraciones inferior a nueve en todos los casos. Los residuos fueron inferiores a  $4.9E-3$ , valor máximo correspondiente a  $a = 0.50$  mm.

La variación del factor de intensidad de tensiones en el punto más profundo de la fisura puede observarse en la Fig. 25, junto con los resultados obtenidos por Dai en base al modelo P. En la figura se incluyen asimismo los resultados correspondientes a un procedimiento que no evita el solapado de las superficies de fisura (“modelo K” de Dai).

Los resultados concuerdan muy bien con los resultados del modelo propuesto por Dai (modelo P) para profundidades entre 0.15 mm y 0.30 mm. Para las fisuras más profundas estudiadas ( $a = 0.40$  mm y  $a = 0.50$  mm), las diferencias con los resultados correspondientes a considerar el cierre según el modelo propuesto por Dai en el valor del FIT, pueden atribuirse a la influencia de la mayor magnitud del gradiente de tensiones para esas profundidades, lo cual puede requerir una mayor discretización de la malla empleada por el programa Calsyf, así como en la utilizada por Dai. Como era esperable, en todas las profundidades de fisura estudiadas, la implementación del criterio de  $K_I$  nulo sobre la frontera de cierre de la fisura conduce a valores de  $K_I$  positivos en la parte más solicitada por las tensiones de apertura.

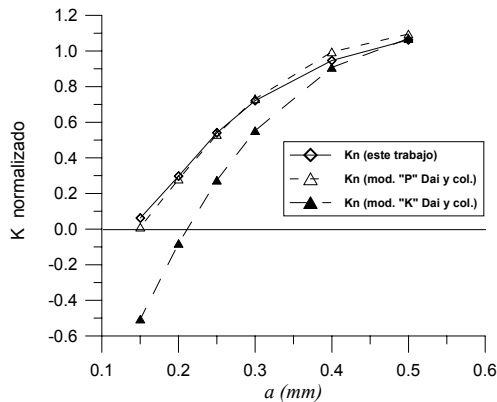


Figura 25: Factor de intensidad de tensiones normalizado vs. profundidad de fisura  $a$ .

### 2.3 Propagación en Presencia de Cierre Parcial

Es de interés estudiar ahora la propagación de la fisura superficial en condiciones de cierre parcial como las vistas antes en este capítulo. Esto se realizó para la fisura con  $a = 0.5$  mm sometida a fatiga por ciclos de tensión remota uniforme tal que  $\sigma_{max} = 1.0$ ,  $\sigma_{min} = 0.5$ . Los parámetros de fatiga empleados en la ley de Paris fueron:  $C = 10^{-9}$ ,  $m = 2.92$ . El resultado puede verse en la Fig. 26. Como se observa, no hay avance de la fisura en la dirección superficial mientras que el avance es máximo en profundidad, y se incrementa en cada paso. El eje neutro para las tensiones residuales se halla ubicado en  $y_0 = 0.2$  mm, y en la parte

superior del ciclo de carga, se desplaza a  $y_0 = 0.129$  mm. Hay un pequeño avance en el tercer punto del contorno desde la superficie, en  $y = 0.1116$ , como es esperable.

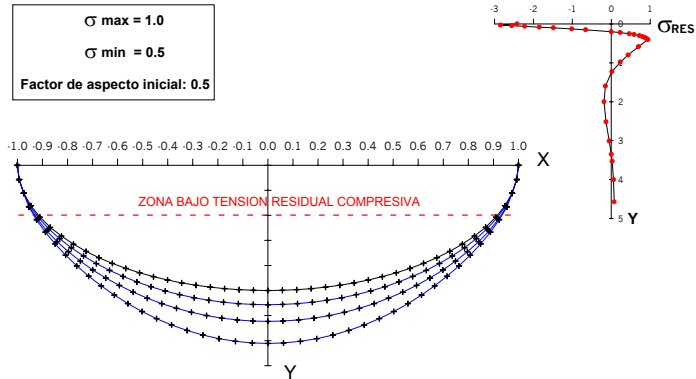


Figura 26: Evolución de una fisura elíptica superficial en presencia de cierre parcial por causa de tensiones residuales compresivas cercanas a la superficie

## CONCLUSIONES

Se ha descrito un algoritmo, la integral “O”, capaz de aproximar la función de peso de fisuras de forma arbitraria interiores en un volumen infinito. En base al mismo se implementó el programa Calsyf, el cual contiene una subrutina correctora obtenida de comparar resultados con soluciones exactas y numéricas existentes para fisuras elípticas y rectangulares, respectivamente. De esta forma se mejora el desempeño de la integral “O” para geometrías regulares e irregulares interiores en un volumen infinito, con aproximación satisfactoria al comparar resultados con los obtenidos por métodos numéricos usuales como el de elementos de contorno. Luego se extiende la aplicabilidad del programa al caso de fisuras superficiales en volumen semi-infinito.

En el ejemplo de aplicación los resultados para la geometría de cierre así como los valores de  $K_I$  en el punto más profundo y solicitado de las fisuras, concuerdan muy bien con los obtenidos en el llamado “modelo P” de Dai y colaboradores. La propagación por fatiga de la fisura más profunda estudiada por Dai aporta resultados esperables, dado el cierre parcial de la fisura cerca de la superficie. El método presentado permite determinar la frontera de cierre y valores de  $K_I$  en fisuras de forma arbitraria; constituyendo una herramienta útil para estudiar la propagación de fisuras en presencia de tensiones residuales de cualquier tipo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Oore and D. J. Burns; "Estimation of Stress Intensity Factors for Embedded Irregular Cracks Subjected to Arbitrary Normal Stress Fields", Trans. ASME 102, 202-211, 1980.
- [2] J.L. Desjardins, D.J. Burns y J.C. Thompson. A weight function technique for estimating stress intensity factors for cracks in high pressure vessels. Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 113, N° 1, 55-64, 1991].
- [3] G. R. Irwin. The crack extension force for a part-through crack in a plate. ASME Journal of Applied Mechanics, 1962, pp. 651-654
- [4] R.C. Shah, A.S. Kobayashi. Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading, Engineering Fracture Mechanics, Vol 3, 1971, pp.71-96
- [5] M. Isida, T. Yoshida, H. Noguchi. Prelim., proc. Japan Soc. Mech. Engrs. And JapanSoc.Precision Engng., Mie District, N° 823-3 (1982), pp. 15-17
- [6] American Society of Mechanical Engineers (ASME) Boiler and Pressure Vessel Code. Section IX: Rules for Inservice Inspection of Nuclear Power Plant Components. N.Y.
- [7] M. Oore, D.J. Burns. Estimation of stress intensity factors for irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields. Proceeding of the 4<sup>th</sup> International Conference on Pressure Vessel technology, London, I Mech. E 1980, Vol 1, 139-147
- [8] M. isida, H. Noguchi, Y. Yoshida. Tension and bending of finite thickness plates with a semi-elliptical surface crack, Int. J. Frac., vol. 26 (1984), pp. 157-188
- [9] N. Dai, D. Nowell, D.A. Hills. Eigenstrain methods in three-dimensional crack problems: an alternative integration procedure, J. of the Mech. And Physics of Solids, 41, 1003-1017, 1993.
- [10] D.N. Dai, D. Nowell, D.A. Hills. Partial closure and frictional slip of 3-D cracks, Int. J. of Fracture, 63,89-99, 1993
- [11] H. López Montenegro, A. Cisilino. Determinación numérica del cierre parcial de fisuras planas, Jornadas SAM-2000, Neuquén, Argentina, - , 2000
- [12] B.S.Gargow,K.E.Hillstron,J.J.Moré.MINPACK Project, Argonne National Laboratory,1980
- [13] J.C. Newman, I.S. Raju. Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies. Fracture Mechanics: Fourteenth Symposium – Vol. I: Theory and Analysis. ASTM STP 791, J.C. Lewis and G. Sines Eds., American Society for Testing and Materials, 1983, pp. I-238 a I-265.