

## ESTRATEGIA ALGORÍTMICA PARA EL ANÁLISIS DE DISCONTINUIDADES FUERTES EN SÓLIDOS

Huespe A.E.\* , Oliver J.†, Samaniego E.†, Chaves E.W.V.†

\*CIMEC-Intec/CONICET  
Guemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina  
ahuespe@intec.unl.edu.ar

†E.T.S. Enginyers de Camins, Canals i Ports  
Universitat Politècnica de Catalunya Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
oliver@cimne.upc.es

**Key Words:** discontinuidades fuertes, localización de deformaciones, propagación de fisuras.

**Abstract.** *En este trabajo se describe un procedimiento algorítmico para el trazado de discontinuidades fuertes en sólidos que se ha mostrado robusto y eficiente para el análisis de problemas típicos en el campo de la mecánica de falla computacional. Particularmente en el modelado de propagación de fisuras en materiales de construcción civil como el hormigón.*

*Esta metodología predice el trazado de la discontinuidad basándose en las curvas envolventes de las direcciones determinadas por el criterio de bifurcación constitutiva en cada paso de tiempo.*

*Se ha efectuado el contraste del procedimiento numérico con resultados experimentales, de las cuales mostramos algunos ejemplos.*

## 1 INTRODUCCIÓN

En los modelos numéricos de problemas en mecánica de sólidos que involucran discontinuidades fuertes, como fisuras, líneas de deslizamiento, bandas de corte, etc., intervienen una serie de factores que pueden tener gran importancia para el desarrollo viable y robusto de un algoritmo computacional. Obviamente estos factores dependen del esquema escogido para la solución del problema.

Diversos esquemas de aproximación propuestos en la literatura comparten una característica común: la determinación o trazado correcto de la discontinuidad a través del cuerpo es considerado un dato básico para la evaluación del comportamiento postcrítico del sólido. Citamos en este caso los procedimientos propuestos en mecánica de fractura por los grupos de trabajo Ingraffea<sup>1</sup> y Belytschko,<sup>2</sup> etc. Otras aproximaciones no hacen uso, o no requieren del trazado explícito de la discontinuidad, sino que la misma es determinada como un resultado de la localización de deformaciones en el cuerpo. Es el caso de los modelos de fisura distribuida (smeared crack), del continuo no-local, etc.

En los métodos primeramente mencionados, la curva de discontinuidad debe incluirse en el análisis determinando la posición geométrica que ocupa, su evolución en el tiempo además de considerar la conducta mecánica que hereda del continuo.

En los esquemas de elementos finitos, la discontinuidad ha sido considerada inicialmente como trazada a través de los contornos de elementos. No obstante, actualmente se ha extendido la utilización de elementos finitos enriquecidos, con la adición de modos de deformación que intenan capturar discontinuidades internas.<sup>3-7</sup> En estos casos, la determinación correcta de la discontinuidad influye apreciablemente en la robustez del esquema numérico global.

En este trabajo proponemos un algoritmo para el trazado y predicción de la discontinuidad en el cuerpo. En la siguiente sección lo presentamos, luego mostraremos la implementación computacional y finalmente las aplicaciones que muestran la efectividad del mismo.

## 2 UN PROCEDIMIENTO NOVEDOSO PARA EL TRAZADO DE LA DISCONTINUIDAD

Normalmente el criterio que establece el inicio o propagación de una discontinuidad en un medio sólido, también define la dirección en la que lo hace. Esto sucede en particular cuando el criterio se basa en la determinación del instante de bifurcación constitutiva del material, o sea, cuando se hace por primera vez singular el tensor de localización  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\nu}, H)$ <sup>8</sup> para alguna dirección  $\boldsymbol{\nu}(\phi)$ , fijada por el ángulo  $(\phi)$ , y dado el módulo de ablandamiento del material  $H$ :

$$\det \mathbf{Q}(\boldsymbol{\nu}(\phi), H) = 0 \tag{1}$$

En el procedimiento que proponemos para determinar el trazado de la discontinuidad,

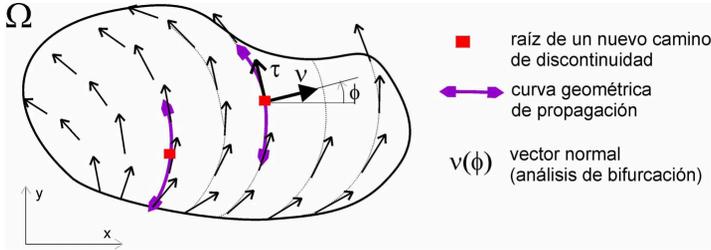


Figure 1: campo vectorial del las direcciones de posible propagación de discontinuidades sobre el continuo. Curvas envolventes.

entendemos que la regla que define la dirección  $\nu(\phi)$

$$\phi = \arg \left( \min_{(\phi)} [\det \mathbf{Q}(\nu(\phi), H)] \right) \quad (2)$$

para un punto del sólido  $\mathbf{x}$  es una función continua en el tiempo, inclusive en el momento que se cumple la condición de bifurcación. En ese instante de tiempo  $t$ ,  $\phi$  define la dirección de propagación de la discontinuidad.

Utilizando este concepto, se puede trazar en todo momento un campo vectorial sobre el continuo que indique la posible dirección de propagación de la discontinuidad, inclusive en puntos donde aún no se alcanza el estado crítico de bifurcación. Las curvas envolventes de este campo, indicarán el camino que seguirán las discontinuidades una vez activadas (figura 1).

### 2.1 Determinación de las curvas envolventes

Sea  $\tau(\mathbf{x})$  ( $\|\tau\| = 1$ ,  $\tau \perp \nu$ ) el campo de vectores definido sobre todo el sólido  $\Omega$ . Calculamos las curvas envolventes de este campo como curvas de nivel de un campo escalar  $\theta(\mathbf{x})$  que debe verificar la condición:

$$\tau \cdot \nabla \theta = \frac{\partial \theta}{\partial s_\tau} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3)$$

donde  $s_\tau$  es la longitud de arco para cada curva envolvente.

Este problema, luego de multiplicar (3) por  $\tau$ , puede ser colocado equivalentemente como:

$$\kappa \nabla \theta = 0 \quad (4)$$

donde

$$\kappa = \tau \otimes \tau. \quad (5)$$

Consideramos entonces el siguiente problema de valores de contorno, semejante al de transmisión de calor estacionario, sin fuentes de calor;

Determinar  $\theta(\mathbf{x})$  en  $\Omega$  , tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (6)$$

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla \theta \quad \text{en } \Omega \quad (7)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial_q \Omega \quad (8)$$

$$\theta = \theta^* \quad \text{en } \partial_\theta \Omega \quad (9)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal al contorno de  $\Omega$ .

De este modo, si se imponen adecuadamente las condiciones de Dirichlet (compatibilidad con las condiciones de Neumann y restricción de una solución  $\theta(\mathbf{x})$  constante en  $\Omega$ ), el campo escalar:

$$\theta(\mathbf{x}) \neq \text{constante} \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial s_\tau} = 0 \quad (10)$$

es una solución del problema (6–9).

La unicidad de la solución del problema (6–9) se puede conseguir perturbando el tensor  $\boldsymbol{\kappa}$  de modo que resulte definido positivo:

$$\boldsymbol{\kappa}_\epsilon = \epsilon \mathbf{1} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} \quad (11)$$

con  $\mathbf{1}$  el tensor identidad de orden 2 y  $\epsilon \ll 1.$ , con lo que el sistema (6–9) pasa a ser un típico problema de condiciones de contorno elíptico.

Remarcamos que para el problema no perturbado, la derivada direccional

$$\frac{\partial \theta}{\partial s_\nu} = \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla \theta \quad (12)$$

no está determinada. No obstante, como veremos en la subsección siguiente, el hecho de utilizar interpolaciones  $C^0$  para el campo  $\theta$  conjuntamente con mallas distorsionadas, provoca una difusividad numérica que en general hace innecesario la utilización del problema perturbado.

Claramente del problema (6–9) podemos interpretar que las curvas de nivel de  $\theta$ , que determinan el trazado de la discontinuidad, representan pseudo-isotemperaturas en el sólido  $\Omega$ .

## 2.2 Algoritmo para el trazado de discontinuidad en una malla de elementos finitos

A partir de la misma malla de elementos finitos  $\Omega^h$  que se utiliza para discretizar el problema mecánico, con  $n_{elem}$  elementos y  $n_{nodos}$  nodos, se resuelve en cada paso de

tiempo la contraparte discreta del problema (6–9). La utilización de un procedimiento clásico de elementos finitos, con una interpolación estándar para  $\theta$ :

$$\theta^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i \hat{\theta}^i = [\mathbf{N}]^T [\hat{\theta}]; \quad (13)$$

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_{n_{\text{nodos}}} \end{bmatrix} \quad ; \quad [\hat{\theta}] = \begin{bmatrix} \hat{\theta}^1 \\ \hat{\theta}^2 \\ \dots \\ \hat{\theta}^{n_{\text{nodos}}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde  $N_i$  son las funciones de forma y  $\hat{\theta}^i$  los parámetros de la interpolación; lleva a la solución del sistema lineal de ecuaciones:

$$[\mathbf{K}] [\hat{\theta}] = \mathbf{0} \quad ; \quad (15)$$

$$\hat{\theta}^i = \theta^* \quad \text{en} \quad \partial_{\theta} \Omega \quad , \quad (16)$$

donde  $[\mathbf{K}]$  es la matriz de rigidez resultante y se evalúa como sigue:

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega} [\nabla \mathbf{N}]^T [\boldsymbol{\kappa}_{\epsilon}] [\nabla \mathbf{N}] d\Omega; \quad (17)$$

siendo la pseudo matriz de conductividad:

$$[\boldsymbol{\kappa}_{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \tau_x^2 + \epsilon & \tau_x \tau_y \\ \tau_x \tau_y & \tau_y^2 + \epsilon \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Las componentes del vector  $\boldsymbol{\tau}$  que determinan (18), se obtienen por el análisis de bifurcación en cada punto de Gauss.

El criterio para trazar el camino de discontinuidad a través del sólido, consiste en determinar cada punto que consigue las condiciones críticas de localización y marcarlo, junto con el elemento finito que lo contiene, como la raíz de una nueva línea de discontinuidad. La pseudo-temperatura media nodal del elemento raíz ( o equivalentemente aquella que corresponde al punto central del elemento finito) define una pseudo-isoterma con la que es posible detectar exactamente todos los elementos finitos intersectados por la misma y los puntos por donde pasa la discontinuidad en el caso de activarse (ver figura 2).

De este modos, cada raíz tiene asignada una isocurva. Mientras los elementos cortados por ésta no se activan, los valores nodales de la pseudo-temperatura pueden variar. Una vez activada la discontinuidad en un elemento, los valores de este campo se fijan para los nodos del elemento.

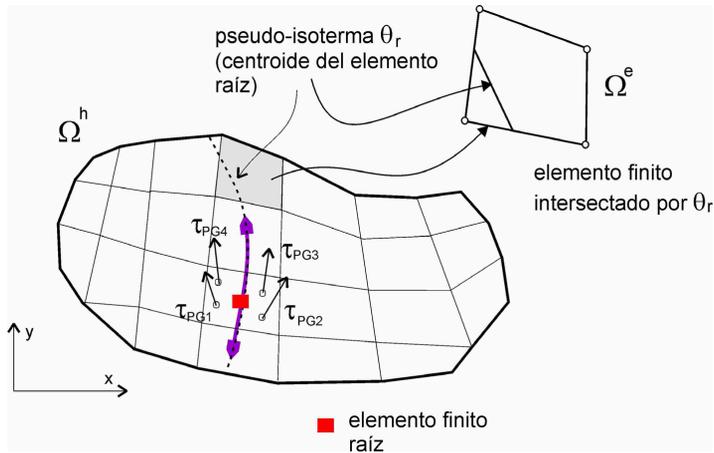


Figure 2: Algoritmo de trazado de discontinuidades en una malla de elementos finitos.

Esta metodología debe ser complementada con un procedimiento que evalúe una zona de exclusión en la vecindad geométrica de una discontinuidad activa. Así se evita la posible evolución, e inclusive intersección, de fisuras muy cercanas entre sí, lo que es una causa importante de inestabilidad numérica.

Remarcamos que este esquema involucra un gerenciamiento de datos muy simple, lo que permite el control de la evolución simultánea de diversas fisuras en el sólido.

### 3 EJEMPLOS

En esta sección presentamos las aplicaciones de esta metodología a dos casos de propagación de fisuras en estructuras de hormigón, ampliamente estudiados en la bibliografía utilizando diversas aproximaciones numéricas. Ambos han sido ensayados en laboratorio.

El primer caso corresponde a una viga apoyada en 4 puntos. Los resultados experimentales fueron publicados por Arrea et al.<sup>10</sup> Aquí no pretendemos presentar los resultados numéricos completos que hemos obtenido (ver por ejemplo Oliver et al.<sup>11</sup>). Mas bien remarcar los aspectos relacionados con el esquema del trazado de la discontinuidad. Detalles adicionales respecto a soluciones alternativas se pueden encontrar en la tesis de Rots.<sup>12</sup>

En la figura 3 están dibujados los resultados para este caso. La figura 3-a muestra el camino de fisuración calculado, como también otras fisuras que se producen en el comportamiento estructural. Diversas fisuras se activan mientras la carga aumenta, no obstante en cierto momento sólo progresa una de ellas, que es la finalmente lleva a la rotura y la que se compara bien con los valores publicados por Arrea et al.<sup>10</sup> Mientras que las restantes se cierran.

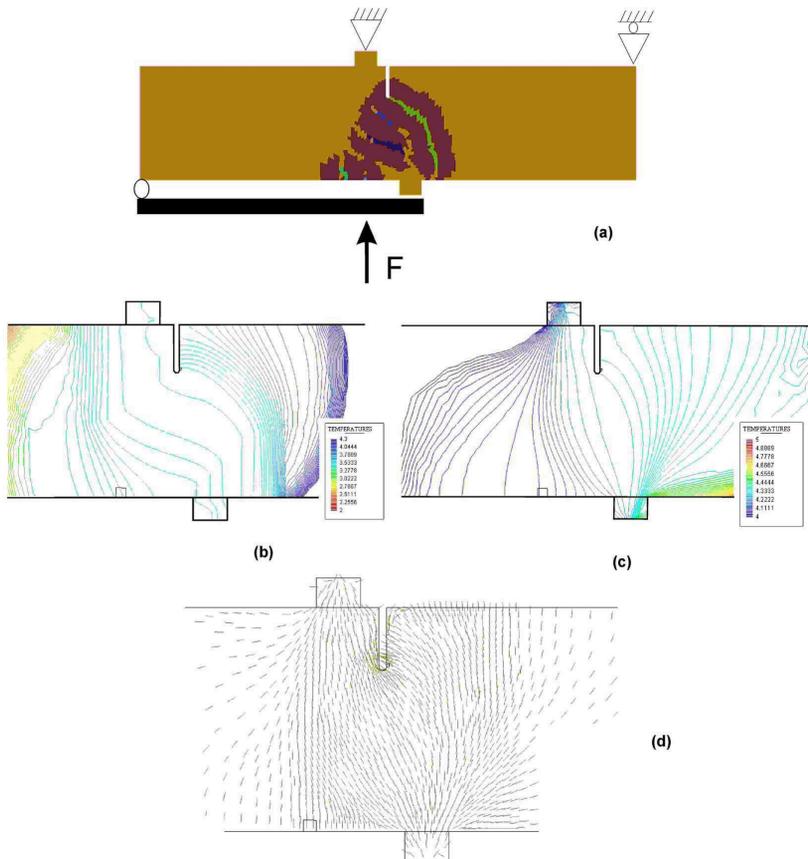


Figure 3: Viga apoyada en 4 puntos: a) esquema del experimento realizado y distribución de fisuras que se han obtenido con el presente modelo; b) curvas de pseudo-isotermas obtenidas para un modelo constitutivo de daño;<sup>9</sup> c) curvas de pseudo-isotermas obtenidas para un modelo constitutivo de rankine (tensión principal máxima); d) campo vectorial  $\tau$  obtenido por la aplicación del criterio de la máxima tensión principal.

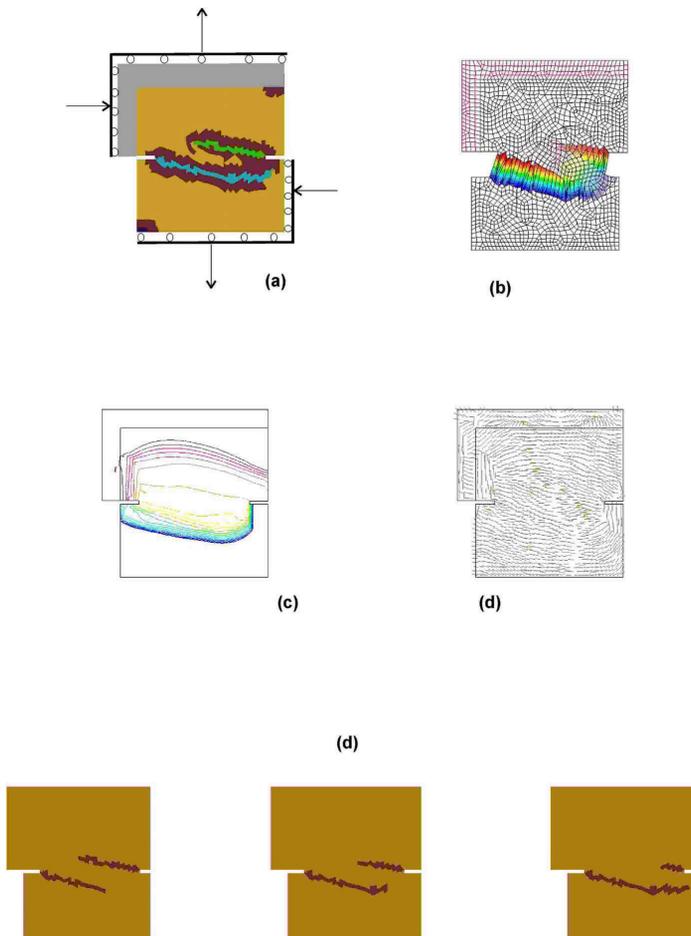


Figure 4: Test de Nooru-Mohamed, referencia:<sup>13</sup> **a)** esquema del test realizado sobre probeta de hormigón. Las cargas son aplicadas secuencialmente, en una primera etapa se provoca la carga horizontal. En una segunda etapa se tracciona el espécimen; **b)** deformada obtenida al final del análisis; **c)** isocurvas de pseudo-temperaturas obtenidas con el criterio de máxima tensión principal; **d)** vectores tangentes  $\tau$  obtenidos del criterio de localización; **e)** secuencia de diagramas que muestran la evolución de las diferentes fisuras en tres tiempos sucesivos, se representa en tono oscuro a los elementos que están cargando y en tono claro los que se comportan elásticamente.

Las figuras 3-b:c muestran las isocurvas de pseudo-temperaturas utilizando dos modelos constitutivos diferentes. El comportamiento global de la discontinuidad es, no obstante, similar en ambos casos.

En la figura 4 mostramos los resultados numéricos obtenidos para el test de Noor-Mohamed (1992) y que ha sido referenciado en la tesis de Spencer.<sup>13</sup> Aquí nuevamente se observa la capacidad del algoritmo de trazado de la fisura, como se representa en la figura 4-c a partir del campo vectorial de la figura 4-d.

En las figuras 4-e se representa la evolución dos macrofisuras que se activan, dada la simetría del problema. Una de ellas es la que finalmente se mantiene en carga, mientras la otra se cierra. El trazado de la discontinuidad como se muestran en estas figuras se comparan bien con los experimentales publicados en la referencia arriba citada.

#### 4 CONCLUSIONES

Se ha presentado una metodología para el trazado de discontinuidades en medios sólidos con aplicabilidad a diversos problemas, aunque en particular aquí sólo se han mostrado ejemplos de propagación de fisuras. En estos casos, el algoritmo muestra una capacidad de manejo y gerenciamiento de datos simple. Esta característica ha sido aprovechada para resolver casos que exhiben fisuras múltiples.

El problema pseudo térmico que se debe resolver es uno de condiciones de contorno elíptico clásico, que no plantea dificultades. Desde el punto de vista numérico, el problema está bien colocado y desde el punto de vista computacional no resulta caro. Además su implementación es trivial en aquellos códigos que tengan la capacidad de resolver problemas termomecánicos desacoplados.

La extensión a casos 3D es directa. Los autores ya han experimentado su viabilidad y los resultados se presentarán en un trabajo futuro.

#### REFERENCES

- [1] Wawrzynek P.A. Ingrassia A.R. Carter, B.J. Automated 3d crack growth simulation. *Int. J. Num. Meth. Engn*, **47**, 229–253 (2000).
- [2] T. Belytschko, N. Moes, S. Usui, and C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, (50), 993–1013 (2001).
- [3] E.N. Dvorkin, A.M. Cuitino, and G. Gioia. Finite elements with displacement embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *Int.J.Num.Meth.Engng.*, **30**, 541–564 (1990).
- [4] C.C.Celigoj. On strong discontinuities in anelastic solids. a finite element approach taking a frame indifferent gradient of the discontinuous displacements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, (49), 769–796 (2000).
- [5] Ronaldo I. Borja. A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard galerkin approximation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, (190), 1529–1549 (2000).

- [6] M. Jirasek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (188), 307–330 (2000).
- [7] G.N. Wells and L.J. Sluys. Application of embedded discontinuities for softening solids. *Engineering Fracture Mechanics*, (65), 263–281 (2000).
- [8] K. Runesson, N. S. Ottosen, and D. Peric. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. of Plasticity*, **7**, 99–121 (1991).
- [9] J. Oliver. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal Solids and Structures*, **37**, 7207–7229 (2000).
- [10] M. Arrea and A.R. Ingraffea. Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete. Technical report, (1982). Report 81-13, Dept. Struct. Eng., Cornell Univ. New York.
- [11] J. Oliver, A. Huespe, M.D.G. Pulido, and E. Chaves. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, **69**(2), 113–136 (2002).
- [12] J. G. Rots. Computational Modeling of Concrete Fractures, *Ph.D. Thesis*. Delft University of Technology, (1988).
- [13] B. W. Spencer. Finite elements with embedded discontinuities for modeling reinforced concrete members, *Ph.D. Thesis*. Dept. Civil Env. and Arch. Eng., Colorado Univ., (2002).