

## ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA 3-D PELO MEF GENERALIZADO

Paulo de Tarso R. Mendonça, Eduardo A. Fancello

Grupo de Análise e Projeto Mecânico - Grante  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.  
C.P. 476, SC - 88040-900 - Brasil. Fax (048) 234-1519,  
e-mail: mendonca@grante.ufsc.br, fancello@grante.ufsc.br  
web page: www.grante.ufsc.br

**Key words:** Elementos finitos generalizados, elasto-plasticidade.

**Abstract.** *In the last few years a number of numerical methods, later designated by the collective name of “generalized finite element methods”, have been developed. Among those methods one can refer to the GFEM, Free Galerkin Method, hp-Clouds Method and Partition of Unity (PUFEM) method. Applications of the last two of them have been successfully developed for linear analysis based on Timoshenko beams, 2-D elasticity, plate and shells structural elements, through both, domain and boundary formulations.*

*This paper describes a first application of the Partition of Unity method to small strain elasto-plasticity analysis. Following the method, a partition of unity is defined over the domain with reference to brick solid elements. Next, the hp-Cloud method is used to perform p-enrichment. The p-enrichment consists of globally defined polynomial. This global characteristic, as opposed to the standard form, based on local, intrinsic coordinates, is a source of the low mesh distortion sensitivity exhibited by the method. Also, it allows enrichment in particular regions and directions of the model (as corners and boundary layers), in a very predictable way.*

*Classical elasto-plasticity model is used, with linear mixed hardening,  $J_2$  plastic surface and radial return method for stress integration. Preliminary numerical results are shown, which indicate good behavior of the formulation with respect to mesh distortion. Also, a clear demonstration is made, of the singularity which arises in the stiffness matrix of an undistorted element generated by this class of methods.*

## 1 INTRODUÇÃO

De forma geral, as técnicas oriundas dos métodos de elementos finitos generalizados, que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento da partição da unidade, apresenta características peculiares relevantes em problemas de simulação numérica. Dentre estas podem ser citadas a facilidade de implementação do refino "p", possibilidade de incluir funções que fazem parte dos modos de solução do problema de valores no contorno e utilização total ou parcial do caráter sem malha do método (funções de aproximação associadas ou não à uma malha). As características supracitadas conferem a esta metodologia a possibilidade de construir espaços de aproximação flexíveis com capacidade de contornar problemas de refino adaptativo de forma versátil bem como livrar-se total ou parcialmente da perda de precisão acarretada pela distorção da malha. Essas habilidades tem sido verificadas em problemas lineares planos, de casca<sup>9</sup> e sólido 3-D. Busca-se nesse trabalho uma verificação de comportamento quanto a problemas não lineares.

A construção do espaço de aproximação usado segue a filosofia do *Generalized Finite Element Methods* (GFEM) proposto por Duarte, Babuska & Oden<sup>3</sup>. Esta técnica, proposta independentemente por Melenk & Babuska<sup>6</sup> com o nome de *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM) e por Duarte & Oden<sup>2,4</sup> sob o nome de *hp-Clouds*, engloba os métodos que constroem o espaço de aproximação por produto da partição da unidade por funções de enriquecimento que apresentam boas propriedades de aproximação. Essas funções de enriquecimento são aqui tomadas como um conjunto completo de polinomiais definidos no domínio real, em vez do domínio intrínseco de integração dos elementos finitos convencionais. Essa característica do método é o que lhe confere a propriedade de baixa sensibilidade à distorção de malha. Além de funções padrão como as polinomiais ou trigonométricas, outras famílias podem ser usadas, ou ainda podem ser tomados modos cinemáticos de deformação previamente conhecidos da solução, em regiões localizadas como concentrações de tensão, singularidades ou em regiões de borda.

Os resultados que segem são apenas preliminares, mostrando o estágio parcial em que se encontra a investigação.

## 2 CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE FUNÇÕES

A idéia fundamental do *hp-Clouds* consiste na construção do espaço de aproximação  $\mathcal{F}_N^p$  por enriquecimento da partição da unidade com o conjunto  $\mathcal{L}_p$  obtido pelo produto tensorial de conjuntos completos de polinômios  $\Pi_p$ , definidas no domínio real  $\mathbb{R}^3$ . Os espaços obtidos desta forma tem a propriedade de  $\mathcal{P} \subset \text{Span}\{\mathcal{F}_N^p\}$  onde  $\mathcal{P}$  é o conjunto dos polinômios de grau  $g$  menor ou igual a  $p$ . A construção do espaço  $\text{Span}\{\mathcal{F}_N^p\}$  através de enriquecimento por conjuntos completos de polinômios  $\Pi_p$  a família  $\mathcal{F}_N^p$  é dada por:

$$\mathcal{F}_N^p = \{\{\varphi_\alpha L_{ij}(\mathbf{x})\} : \alpha = 1, 2, \dots, N; \quad i, j = 0, 1, \dots, p; \quad 0 < i + j < p\}. \quad (1)$$

onde  $\varphi_\alpha$  são as funções da partição da unidade, e  $N$  indica o número total de nuvens do modelo, o que corresponde também ao número de partições da unidade definidas. As funções

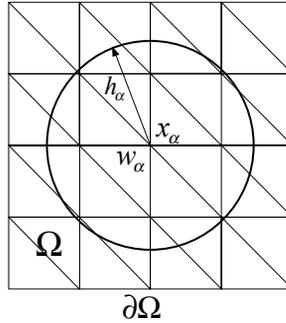


Figura 1: Domínio circular  $\Omega$  das funções de enriquecimento da nuvem centrada em  $\mathbf{x}_\alpha$ .

de enriquecimento  $L_{ij}(\mathbf{x})$  são construídas num domínio esférico (Fig.1) definido por  $w_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|_{\mathbb{R}^3} < h_\alpha\}$ .

De forma genérica a base de funções  $\mathcal{F}_N^p$  tem a seguinte definição

$$\mathcal{F}_N^p = \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_N \\ \varphi_1 L_{s=1} & \varphi_2 L_{s=1} & \dots & \varphi_N L_{s=1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1 L_{s=M} & \varphi_2 L_{s=M} & \dots & \varphi_N L_{s=M} \end{array} \right\}, \quad (2)$$

Se forem utilizados conjuntos completos de polinomiais,  $\Pi_p$ , o valor de  $M$  é dado por,  $M = \binom{p+2}{n} - \binom{2}{n}$ , onde  $n = 1, 2, 3$  indica o número de dimensões geométricas do problema, no caso 3 para um problema tridimensional.

A família  $\mathcal{F}_N^p$  descrita acima apresenta sua fundamentação matemática descrita por três teoremas, propostos e demonstrados por [4].

Especificamente, descreve-se a seguir a construção de uma classe de elementos finitos generalizados, sólidos, enriquecidos segundo o procedimento genérico acima. Considera-se a modelagem da geometria feita de forma independente da aproximação da solução. Neste caso toma-se a geometria modelada por regiões de integração, elementos, definidos por funções Serendipity tri-lineares ou tri-quadráticas. A Figura 2 ilustra as visualizações bem conhecidas dos casos 1-D e 3-D, que são aqui colocadas para facilidade de explanações feitas a seguir. A geometria é então definida por  $Nn\text{og}$  nos, (que podem ser 8 ou 20, por exemplo, no caso de elementos tipo "bloco"), e correspondentes funções Serendipity  $N_j^g(r, s, t)$ , onde  $j = 1, 2, \dots, Nn\text{og}$  e  $g$  indica "geométrico". As coordenadas nodais e essas funções provêm a matriz jacobiana da maneira usual por:

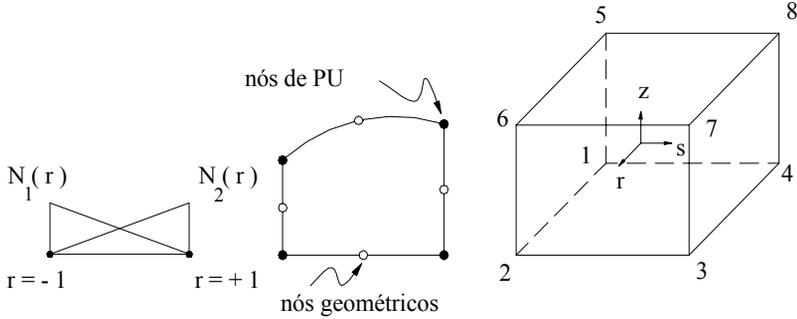


Figura 2: Elementos de definição de geometria, usados para integração numérica, em casos 1-D, 2-D e 3-D.

$$\mathbf{J} \equiv \nabla_r \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{Nnog} \begin{bmatrix} x_i N_{i,r}^g & y_i N_{i,r}^g & z_i N_{i,r}^g \\ x_i N_{i,s}^g & y_i N_{i,s}^g & z_i N_{i,s}^g \\ x_i N_{i,t}^g & y_i N_{i,t}^g & z_i N_{i,t}^g \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde  $\mathbf{x} \equiv \{x, y, z\}$  é a coordenada global de um ponto genérico no elemento,  $\{x_i, y_i, z_i\}$  é a coordenada de um dos nós de definição da geometria, e  $r$  em  $\nabla_r$  indica que as derivadas são feitas em relação às coordenadas intrínsecas  $\{r, s, t\}$  do elemento geométrico. Paralelamente à definição geométrica, tem-se as nuvens e a partição da unidade no domínio. De toda a malha de nós usada para a definição geométrica e elementos usados na integração, usa-se, de cada elemento apenas as posições associadas aos nós de vértice em cada elemento, os nós 1 a 8 na figura 1. Adota-se o conjunto de funções tenda associadas a cada um desses nós como sendo a partição da unidade do problema. Associado a cada elemento geométrico existe então associado um elemento de aproximação, definido por  $Nnop$  nós e  $Nnop$  funções partição da unidade  $N^p(r, s, t)$ , onde  $p = 1, 2, \dots, Nnop$ . ( $Nnop$ , no caso do elemento 3-D tipo "bloco", é igual a 8.)

Procedendo de forma padrão, determina-se as derivadas das funções partição nas direções globais por:

$$\nabla_x N^p = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{np}^p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{np}^p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{np}^p}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \nabla_r N^p \quad \text{onde} \quad \nabla_r N^p \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial N^p}{\partial r} \\ \frac{\partial N^p}{\partial s} \\ \frac{\partial N^p}{\partial t} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

para  $np = 1, 2, \dots, Nnop$ .

Para o enriquecimento, consideram-se polinomiais completos definidos nas direções globais, isto é,  $1, x, y, z, x^2$ , etc. Entretanto é sabido que esse procedimento direto resulta em mal

condicionamento da matriz de rigidez. Ocorre que as funções enriquecidas resultantes em elementos distantes da origem tornam-se bastante similares. Uma forma de circunscrever este efeito consiste em aplicar uma translação e um escalamento nas coordenadas: usa-se então

$$\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\} \equiv \left\{ \frac{x \square x_p}{R}, \frac{y \square y_p}{R}, \frac{z \square z_p}{R} \right\}, \quad (5)$$

onde  $R$  é uma aproximação para o raio da nuvem em torno do nó  $p$  e  $x_p$ ,  $y_p$  e  $z_p$  são as coordenadas do nó  $p$ .

O valor das funções de enriquecimento associadas a uma certa partição  $p$ , num ponto genérico da nuvem, pode ser organizado num arranjo  $\mathbf{F}$  constituído por  $n_f$  termos. Por exemplo, para os casos de enriquecimentos de grau zero ( $n_f = 1$ ), grau um ( $n_f = 4$ ) e grau dois ( $n_f = 10$ ), as definições são as seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \{1\} && \text{grau 1,} \\ \mathbf{F} &= \{1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\} && \text{grau 2,} \\ \mathbf{F} &= \{1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}^2, \bar{y}^2, \bar{z}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{x}\bar{z}, \bar{y}\bar{z}\} && \text{grau 3,} \end{aligned} \quad (6)$$

Cada partição da unidade, em cada direção, pode ser enriquecida por uma quantidade distinta ou por tipos distintos de funções. Assim  $n_f$  depende da direção e da partição considerada. Dessa forma uma função de interpolação associada à partição da unidade  $np$  enriquecida pela  $j$   $\square$  *esima* função de enriquecimento é definida por

$$\phi_j^p = F_j^p(x, y, z)N^p(r, s, t). \quad (7)$$

enquanto que a derivada em relação a  $x$  é obtidas por:

$$\frac{\partial \phi_j^p}{\partial x} = \frac{\partial F_j^p}{\partial x} N^p + F_j^p \frac{\partial N^p}{\partial x}, \quad (8)$$

e de forma semelhante para as demais derivadas. O conjunto das três derivadas pode ser colocado em forma simbólica como

$$\nabla_x \phi_j^p = N^p \nabla_x F_j^p + F_j^p \nabla_x N^p, \quad (9)$$

com  $\nabla_x N^p$  dado em (4) e  $\nabla_x F_j^p$  é obtido diferenciando diretamente a eq. (6).

A interpolação de uma componente de deslocamentos,  $u(x, y, z)$ , por exemplo, dentro de um dado elemento de integração é feita por

$$u = \underbrace{u_1^1 \phi_1^1 + u_2^1 \phi_2^1 + \dots + u_{n_f}^1 \phi_{n_f}^1}_{\text{no 1}} + \dots + \underbrace{u_1^{Nnop} \phi_1^{Nnop} + u_2^{Nnop} \phi_2^{Nnop} + \dots + u_{n_f}^{Nnop} \phi_{n_f}^{Nnop}}_{\text{no } Nnop}, \quad (10)$$

onde, por simplicidade de notação, considerou-se que o número  $n_f$  de funções de enriquecimento é o mesmo em qualquer nó. Também, devido à definição de  $\bar{\mathbf{x}}$  em (5) usado no cálculo da função de enriquecimento, tem-se que  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  num ponto sobre o nó que é a origem da nuvem, isto é, em  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , exceto por  $F_1 = 1$ . Isto implica que em cada nó  $p$ , a única função de interpolação não nula é a primeira função associada à nuvem. Adicionalmente, uma vez que a partição da unidade é também unitária naquele nó, tem-se que (10) reduz-se a  $u = u_1^p \phi_1^p = u_1^p$ , isto é,  $u_1^p$  tem o caráter de valor nodal da função de deslocamento  $u$  no nó  $np$ . Os demais coeficientes associados a cada nó não possuem significado físico prontamente reconhecíveis.

### 3 SINGULARIDADE DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Um dos problemas que podem surgir na resolução do sistema algébrico global quando se utiliza o *hp-Clouds* para construir o espaço de aproximação é o surgimento de uma matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  singular mesmo após a aplicação das devidas condições de contorno. Isto ocorre quando as partições da unidade são polinomiais e as funções de enriquecimento também o são, gerando um problema de dependência linear. Este problema foi detectado anteriormente e duas formas de contorná-lo foram apontadas<sup>4</sup>. Uma delas consiste na utilização de solvers adequados para resolução de sistemas simétricos singulares, como utilizados nos programas comerciais de FEM. Uma segunda alternativa é o uso do procedimento iterativo apresentada por *Babuska et alli*<sup>1</sup>, realizado através de uma perturbação aplicada sobre a matriz de rigidez. No texto que segue busca-se identificar mais claramente a natureza e a origem desta singularidade.

Consideremos inicialmente o caso simples de uma formulação unidimensional. Nesse caso a partição da unidade associada a um certo elemento consiste nas duas funções lineares (usando a notação anterior,  $Nnog = 2$ )

$$N^p(r) = \frac{1}{2}(1 \square r), \quad N^p(r) = \frac{1}{2}(1 + r). \quad (11)$$

Por simplicidade de notação, consideramos aqui o caso particular em que o elemento tem comprimento igual a 2 e o sistema global é posicionado em seu centro, de forma que  $x = r$ . Em seguida consideramos um enriquecimento linear, isto é formado por duas funções:  $\{1, x\}$ . O enriquecimento é feito sobre a coordenada  $\bar{x}$  que, usando a definição em (5) resulta em  $\bar{x} = (x + 1)/2$  para o nó 1 e  $\bar{x} = (x \square 1)/2$  para o nó 2 (para  $R = 2$ ). Isso gera então quatro funções de interpolação:

$$\begin{aligned} \phi_1^1 &= \frac{1}{2}(1 \square x), & \phi_1^2 &= \frac{1}{2}(1 + x) & \text{para o nó 1, e} \\ \phi_2^1 &= \frac{1}{4}(1 \square x)(x + 1), & \phi_2^2 &= \frac{1}{2}(1 + x)(x \square 1) & \text{para o nó 2.} \end{aligned} \quad (12)$$

Torna-se então evidente que, das quatro funções, apenas três são linearmente independentes.

Agora consideramos o elemento não-distorcido 3-D. A geração das funções tenda usadas como partição da unidade é feita por produtos das funções 1-D da forma usual. Por exemplo, para os nó 1 e 2 (Figura 2),  $N_1^p = (1 \square r)(1 \square s)(1 \square t)/8$  e  $N_2^p = (1 + r)(1 \square s)(1 \square t)/8$ . Quando os enriquecimentos são feitos, em cada direção de cada um dos nós do elemento, o

efeito identificado em (12) no caso 1-D transmite-se diretamente ao caso 3-D. Por exemplo, para o enriquecimento linear na direção global  $x$ , (considera-se por simplicidade  $r = x$ ), obtêm-se as funções de interpolação

$$\begin{aligned} \phi_2^1 &\equiv \frac{1}{2}(x+1)N_1^p = \frac{1}{16}(1 \square x^2)(1 \square s)(1 \square t), \\ \phi_2^2 &\equiv \frac{1}{2}(x \square 1)N_2^p = \frac{1}{16}(1 \square x^2)(1 \square s)(1 \square t). \end{aligned} \quad (13)$$

Este tipo de dependência linear na base de funções tem consequência direta no *posto* ("rank") da matriz de rigidez. Considerando, por exemplo o caso do elemento de 8 nós na definição da partição da unidade, enriquecido por polinomiais de primeiro grau em cada direção, tem 32 graus de liberdade em cada direção, o que resulta numa matriz de rigidez com 96 graus de liberdade, associados a 96 funções. Esses graus de liberdade e funções são distribuídos da seguinte forma. Das 96 funções, apenas 60 são linearmente independentes. Dessas funções, 24 são as partições da unidade e 36 são funções enriquecidas. Essas 60 funções independentes correspondem a 60 modos, que compreendem 6 modos de movimento de corpo rígido e 54 modos de deformação. As demais 36 funções linearmente dependentes correspondem a 36 modos espúrios de deformação de energia nula. Esses valores são sumarizados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Funções Lin. Independentes} \\ \text{Funções de Partição da Unid.} \\ \text{Funções enriquecidas} \end{array} \right. = \begin{array}{l} = 60 \\ = 24 \\ = 36 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Modos legítimos} \\ \text{Movim. corpo rígido} \\ \text{Modos de deformação} \end{array} \right. = \begin{array}{l} = 60 \\ = 6 \\ = 54 \end{array}$$

$$\{ \text{Funções Lin. Dependentes} = 36 \Rightarrow \{ \text{Modos espúrios} = 36. \quad (14)$$

## 4 ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA

As funções enriquecidas são definidas sobre suportes locais diretamente associadas a nós geométricos e elementos finitos sobre os quais a integração é realizada. Dessa forma o método retorna aos procedimentos tradicionais usados no método de elementos finitos de deslocamentos. Este aspecto estende-se também ao procedimento usado para o tratamento do problema de elasto-plasticidade.

Dentre as diversas teorias disponíveis, optou-se nesse trabalho pela implementação computacional de um modelo de plasticidade para pequenas deformações usando uma regra de escoamento associada à superfície de escoamento de von Mises, levando em conta encruamento misto do tipo isotrópico e cinemático, ambos lineares. Isso é representado por:

$$F = \frac{1}{2} (S_{ij} \square \alpha_{ij}) (S_{ij} \square \alpha_{ij}) \square \frac{1}{3} \sigma_E^2 (\bar{\epsilon}^p) = 0. \quad (15)$$

onde  $\mathbf{S}$  é o tensor tensão deviatórico e  $\boldsymbol{\alpha}$  é a denominada *tensão central*, ("back stress"). Essa tensão é o tensor que localiza o centro da superfície de escoamento, isto é, identifica sua

translação no espaço de tensões deviatoricas.  $\sigma_E$  é a tensão limite de escoamento, dependente da deformação plástica equivalente  $\bar{\epsilon}^p$ . A regra de escoamento é representada por:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\Lambda N_{ij}, \quad (16)$$

onde  $N$  é o tensor unitário normal à superfície de escoamento que, no caso da superfície de von Mises é dado por:

$$N_{ij} = \frac{\varphi_{ij}}{\sqrt{\frac{2}{3}\sigma_E}}, \quad (17)$$

onde  $\varphi_{ij}$  é definido como  $\varphi_{ij} = S_{ij} \square \alpha_{ij}$ .

No caso triaxial, os efeitos de encruamento isotrópico e cinemático são aplicados de forma independente. Assim, os incrementos  $d\alpha_{ij}$  e da tensão de início de escoamento são dados por

$$d\alpha_{ij} = \frac{2}{3}h_c d\epsilon_{ij}^p, \quad d\sigma_E = h_i d\bar{\epsilon}^p, \quad (18)$$

Os módulos  $h_i$  e  $h_c$  são obtidos num ensaio uniaxial, associados a parcelas de encruamento isotrópico e cinemático e são definidos de forma que

$$d\sigma_E = h_i d\epsilon^p, \quad d\sigma_c = h_c d\epsilon^p. \quad (19)$$

Usando a relação constitutiva para um material elástico linear incremental  $d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\epsilon_{kl} \square d\Lambda$ . e a condição de consistência  $dF = 0$ , obtém-se

$$d\sigma_{ij} = \left[ C_{ijkl} \square \frac{3G S_{ij} S_{kl}}{\sigma_E^2 \left(1 + \frac{h_i}{3G}\right)} \right] d\epsilon_{kl} \quad \text{e} \quad d\Lambda = \frac{N_{kl} d\epsilon_{kl}}{1 + \frac{h_i}{3G}}. \quad (20)$$

O termo entre colchetes corresponde ao chamado tensor elasto-plástico incremental, denotado por  $\mathbf{C}_{ijkl}^{EP}$ .

A integração das tensões num ponto de integração genérico é feita usando o método do retorno radial, conforme Simo<sup>7,8</sup>. Ao longo do processo incremental de solução considera-se conhecida a solução no nível de carga anterior, correspondente ao instante  $t$ , isto é, dispõe-se da solução de equilíbrio  ${}^t\mathbf{U}$ , obtida após a convergência do método de Newton-Raphson. Também é conhecida a deformação total  ${}^t\epsilon$ , a deformação plástica acumulada  ${}^t\epsilon^p$ , o valor da tensão de início de escoamento  ${}^t\sigma_E$ , e a posição do centro da superfície de escoamento, dada por  ${}^t\alpha$ . Para o próximo instante,  $t + \Delta t$ , tem-se a aplicação de um novo nível de carga. Busca-se então, via um novo processo de Newton-Raphson, o incremento total de deslocamentos entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ , isto é,  $\Delta\mathbf{U}^{nr}$ , que define a solução por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{nr} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{nr}. \quad (21)$$

A cada iteração  $nr$  de Newton-Raphson, o incremento  $\Delta\mathbf{U}^{nr}$  num elemento finito genérico é corrigido por

$$\Delta\mathbf{U}^{nr} = \Delta\mathbf{U}^{nr\Box 1} + \delta\mathbf{U}^{nr}, \quad (22)$$

onde  $\delta\mathbf{U}^{nr}$  é o incremento de deslocamento nodal no elemento obtido pelo sistema algébrico linearizado de Newton-Raphson. A cada vez que é atualizado o incremento de deslocamento  $\Delta\mathbf{U}^{nr}$ , o incremento de deformações em cada ponto de integração de Gauss do elemento é dado pela forma padrão  $\Delta\epsilon^{nr} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{U}^{nr}$ .

Considera-se o caso em que o incremento de deslocamentos produz deformação plástica no ponto de integração considerado. Nesse caso a estimativa para o estado de tensões neste ponto, na carga atual, estimada pela  $nr\Box$ ésima iteração de Newton-Raphson é dada por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^{nr} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_e^{nr} \Box \Delta\mathbf{S}^{corr}, \quad (23)$$

onde  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_e^{nr}$  é a tensão preditora elástica e  $\Delta\mathbf{S}^{corr}$  é a correção, que no método do retorno radial são dados por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_e^{nr} = {}^t\mathbf{S} + 2G\Delta\epsilon_d^{nr}, \quad \text{e} \quad d\mathbf{S}^{corr} = 2G\Delta\Lambda {}^{t+\Delta t}\mathbf{N}_e^{nr}. \quad (24)$$

Nessa expressão  $\Delta\epsilon_d^{nr}$  é o incremento da deformação deviatória e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{N}_e^{nr}$  é a  $nr\Box$ ésima estimativa do tensor unitário normal, dado por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{N}_e^{nr} = \frac{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_e^{nr}}{\sqrt{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_e^{nr} \cdot {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_e^{nr}}} \quad \text{onde} \quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_e^{nr} \equiv {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_e^{nr} \Box {}^t\boldsymbol{\alpha}. \quad (25)$$

O fator  $\Delta\Lambda$  que define a correção em (24) é obtido de tal forma que localize o ponto sobre a superfície de escoamento, isto é, tal que:

$$\frac{1}{2} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^{nr} \Box {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}^{nr} \right) \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^{nr} \Box {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}^{nr} \right) = \frac{1}{3} \left( {}^{t+\Delta t}\sigma_E^{nr} \right)^2, \quad (26)$$

onde  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^{nr}$  é dado em (23) e

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}^{nr} = {}^t\boldsymbol{\alpha} + \frac{2}{3}h_c\Delta\Lambda {}^{t+\Delta t}\mathbf{N}_e^{nr} \quad \text{e} \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_E^{nr} = {}^t\sigma_E + \sqrt{\frac{2}{3}}h_i\Delta\Lambda. \quad (27)$$

Substituindo (23) e (27) em (26) tem-se um polinômio linear para  $\Delta\Lambda$  que resulta em

$$\Delta\Lambda = \frac{\|{}^{t+\Delta t}\varphi_e^{nr}\| \square \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_E (\sigma_E^o + h_c {}^t\bar{\epsilon}^p)}{2G \left[ 1 \square \frac{h_c + h_e}{3G} \right]}. \quad (28)$$

Como observado por Simo<sup>7,8</sup>, a matriz elasto-plástica em (20) é precisa apenas em caso de incrementos diferencialmente pequenos. Em um procedimento numérico, com incrementos finitos, essa matriz resulta em uma perda da taxa de convergência quadrática que caracteriza o método de Newton-Raphson. Então a matriz de rigidez do elemento é obtida usando uma matriz "consistente", associada ao método do retorno radial usado na integração das tensões, dada por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}_{ijkl}^{EP,nr} = K\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G\beta\left\{\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \square \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right\} \square 2G\bar{\gamma}N_{ij}N_{kl},$$

onde

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{[{}^{t+\Delta t}\sigma_E^{nr} + \Delta H_c]}{\|{}^{t+\Delta t}\varphi_e^{nr}\|} \quad \text{e} \quad \Delta H_c = h_c {}^t\bar{\epsilon}^p, \\ \bar{\gamma} &= \frac{1}{1 + \frac{{}^{t+\Delta t}[\sigma_E^o + h_e]^{nr}}{3G}} \square (1 \square \beta), \quad K = 2G/3 + \lambda. \end{aligned} \quad (29)$$

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de comparar os resultados fornecidos pela presente formulação com valores dissociados da aproximação numérica, apresenta-se a seguir uma solução do problema de flexão elastoplástica de vigas.

Consideramos um material elasto-plástico com região elástica linear definida pelo módulo de elasticidade  $E$  e a região plástica com encruamento linear definida pelo módulo plástico  $E_T$  definido por  $E_T = d\sigma/d\epsilon$ , para tensão  $\sigma > \sigma_E$ , com  $\sigma_E$  sendo a tensão limite de escoamento num ensaio uniaxial de tração.

A hipótese fundamental usada é a de que, mesmo em seções sob plastificação parcial, a seção deformada permanece plana. Desta forma, as distribuições de tensão e deformação é como aquela ilustrada na Figura 3, onde a altura da seção é  $2h$ ,  $2c$  é a altura da região elástica no núcleo da seção e  $2d$  a espessura total plastificada. A hipótese de seções planas implica na distribuição linear de deformações na seção:

$$\epsilon(x, z) = \square z w_{,xx} = \frac{\epsilon_E}{c(x)} z, \quad (30)$$

onde  $\epsilon_E = \sigma_E/E$  é a deformação de início de escoamento. A relação constitutiva é dada por

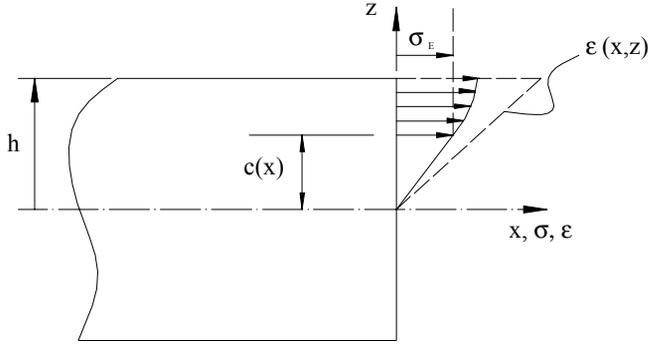


Figura 3: Distribuição de tensões e deformações numa seção sob plastificação parcial.

$$\begin{aligned} \sigma &= E \epsilon, & \text{na região linear, } |z| < c, \\ \sigma &= E_T(\epsilon \square \epsilon_E) + \sigma_E, & \text{na região plastificada } c < |z| < h. \end{aligned} \quad (31)$$

Finalmente, a equação de equilíbrio toma a forma  $M = 2b \int_{z=0}^h z \sigma dz$ , onde  $M$  e  $b$  são o momento fletor e a espessura da seção, aqui considerada retangular. Substituindo as eqs. (30) e (31) e realizando a integração ao longo da altura da seção obtém-se a expressão

$$\frac{3M(x) c(x)}{2b} = \sigma_E c^3 + E_T \epsilon_E (h^3 \square c^3) + \frac{3}{2} c (\sigma_E \square E_T \epsilon_E) (h^2 \square c^2), \quad (32)$$

para  $x$  tal que  $0 < c(x) < h$ . Para problemas isostáticos determina-se a função de momentos  $M(x)$  e obtém-se, para cada seção  $x$ , a espessura elástica  $c(x)$  como sendo a raiz de (32). Caso a seção esteja plastificando, igualam-se ambos os lados direitos de (30) para obter

$$w_{,xx} = \square \frac{\epsilon_E}{c}. \quad (33)$$

Conhecidos os valores de  $c(x)$  essa expressão pode ser integrada para prover a curva de deslocamento transversal da superfície de referência da viga. Também, conhecido  $c(x)$ , a distribuição de deformação ao longo da seção é obtida de (30) e a tensão de (31). Caso a seção seja completamente elástica, Toma-se  $c(x)$  e integra-se a equação diferencial da curva elástica  $w_{,xx} = \square M/EI_{yy}$ , onde  $I_{yy}$  é o momento de inércia da seção. De forma geral o problema de plastificação de viga apenas pode ser resolvido por método numérico, isto é, na determinação da raiz de (32) quanto na integração de (33). Entretanto, pelo menos em dois tipos de problemas, o de viga sob momento uniforme e de viga em balanço, para material elasto-plástico ideal, a solução pode ser posta em forma fechada, como visto a seguir.

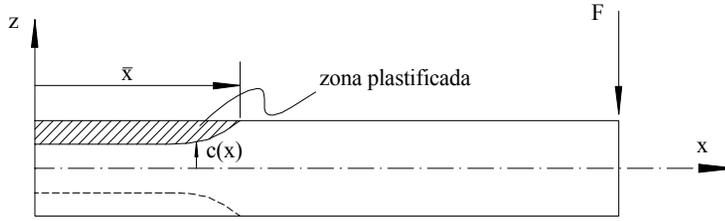


Figura 4: Viga em balanço sob plastificação parcial e zona elástica  $c(x)$ .

Aplicando a formulação geral acima para o caso em que  $E_T = 0$ , a eq. (32) produz o momento na seção elasto-plástica na forma simplificada:

$$M = \sigma_E b \left( h^2 \square \frac{c^2}{3} \right), \quad \text{cuja raiz é} \quad c = \sqrt{3 \left( h^2 \square \frac{M}{b\sigma_E} \right)}. \quad (34)$$

A Figura 4 ilustra os diversos aspectos da solução do problema de plastificação de uma viga em balanço. Neste caso, a distribuição de momentos é  $M(x) = F(L \square x)$ . Para que haja plastificação na viga a força aplicada deve situar-se entre os limites impostos por  $c(0) = 0$  e  $c(0) = h$ , o que resulta em  $F_{\max} = \sigma_E b h^2 / L$  e  $F_{\min} = 2\sigma_E b h^2 / 3L$ . Para carregamento nesse intervalo, a espessura elástica no engaste é dado por  $c_o$ , dado por  $c_o = c(0) = \sqrt{3 [h^2 \square F / b\sigma_E]}$ . A extensão de viga sob plastificação estende-se até  $x = \bar{x}$  que é definido tal que  $c(\bar{x}) = h$ , o que resulta em  $\bar{x} = L \square 2\sigma_E b h^2 / 3F$ . Para  $x < \bar{x}$ , a curva de deflexão da superfície de referência é:

$$w(x) = \frac{2\sigma_E^2 b}{3EF} \left[ \frac{2\sigma_E b}{9F} (c_o^3 \square c^3) + c_o x \right], \quad (35)$$

enquanto que a solução para  $x > \bar{x}$  fornece o deslocamento máximo como

$$w_{\max} = \frac{2\sigma_E^2 b}{27EF^2} [3FLc_o + 2\sigma_E b h^2 (3c_o \square 5h)]. \quad (36)$$

Para o caso de um segmento viga sob momento uniforme e material elasto-plástico ideal, a profundidade elástica é constante, dada por (34) e a deflexão é

$$w(x) = \frac{2\sigma_E x^2}{2Ec} + c_1 x + c_2, \quad (37)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno.

	pontos $n$	$w_{100}$	$w_{300}$
GFEM	2	18,89	102,1
	3	12,42	82,72
	4	12,70	84,08
	5	12,55	83,73
	6	12,55	83,20
elástica		11,00	74,25
analítica		17,55	98,16
mef3		12,44	82,82
<b>referência</b>		<b>17,36</b>	<b>97,52</b>

Tabela 1: Deslocamento transversal, em mm, para uma viga em balanço.

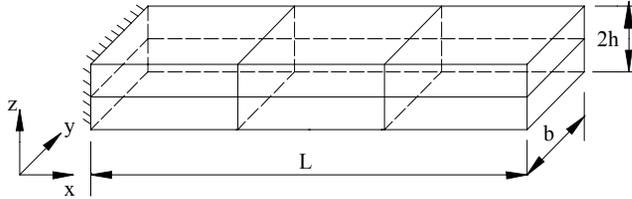


Figura 5: Modelo de viga em balanço com 3 x 1 x 2 elementos.

### 5.1 Modelo 1 - Viga em balanço

A formulação foi testada inicialmente para a flexão elasto-plástica de uma viga em balanço modelada por 3 x 1 elementos no plano  $xy$  e dois elementos ao longo da espessura, como ilustrado na Figura 5. O material foi modelado por encruamento isotrópico linear. A força distribuída na superfície  $x = L$  tem resultante  $F = 1,1 N$ . Os demais dados do problema são os seguintes:  $b = h = 1 mm$ ,  $\sigma_E^p = 300 MPa$ ,  $E = 200 GPa$ ,  $\nu = 0$ ,  $L = 300 mm$ ,  $h_i = 20 GPa$ . O módulo plástico é  $E_T = Eh_i/(E + h_i) = 18181,8 MPa$ .

As dimensões são tais que a viga pode ser considerada longa. A Tabela 1 mostra valores obtidos numericamente para diversas quantidades de pontos de integração,  $n \times n \times n$ , usando um elemento com geometria e partição da unidade lineares e funções de enriquecimento lineares. A tabela também apresenta a solução obtida do modelo de viga a partir das eqs. (32)-(33), (denotada por "analítica"), a solução elástica (indicado por "elástica"), a solução obtida por 3 x 1 x 2 elementos finitos (indicado por "mef3), com funções quadráticas Serendipity (20 nós), e uma solução de referência (indicado por "referência"), obtida usando uma malha de 10 x 10 x 2 elementos de 20 nós. Os valores indicados por " $w_{100}$ " e " $w_{300}$ " indicam os deslocamentos transversais na direção  $z$  nas seções  $x = 100 mm$  e  $x = 300 mm$  respectivamente. Para este problema, a solução analítica de viga indica uma profundidade elástica na seção do engaste igual a (ver Figura 4)  $c_o = 0,2819 mm$  e uma extensão plastificada de  $\bar{x} = 117 mm$ .

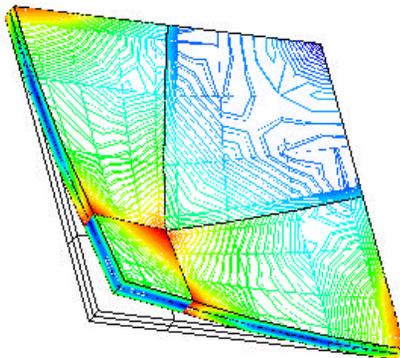


Figura 6: Modelo de placa quadrada com malha distorcida, 2 x 2 elementos na superfície e 2 elementos na espessura. Ilustrada distribuição de deformações plásticas equivalentes para o caso de coeficiente de Poisson nulo. Não é feita média nodal nos valores.

	pontos $n$	Regular			Irregular		
		$q = 1$	$q = 5$	$q = 10$	$q = 1$	$q = 5$	$q = 10$
GFEM	2	1,810	37,12	106,8	1,780	37,12	87,44
	3	1,585	28,01	82,26	1,117	17,14	57,46
	4	1,585	27,89	82,15	1,087	16,2	55,58
	5	1,585	27,94	82,21	1,086	16,28	55,63
mef 2x2		1,59	27,6	80,01	0,730	9,329	39,17
referência		<b>2,053</b>	<b>62,53</b>	<b>163,17</b>			

Tabela 2: Deslocamento transversal máximo, em mm, para uma placa.

## 5.2 Modelo 2 - Flexão de placa

Uma placa quadrada de lado 100  $mm$  e espessura uniforme 5  $mm$  é modelada por 2 x 2 elementos ao longo da superfície e dois elementos ao longo da espessura. A carga normal  $q$  é uniformemente distribuída. Duas malhas são analisadas, uma regular e uma segunda irregular, como ilustrada na Figura 6. Esta malha é definida por quatro áreas, onde o lado da menor área é igual a 25  $mm$ . Os dados de material são os mesmos do problema 1, exceto que o coeficiente de Poisson é  $\nu = 0,3$ . As condições de contorno são de engaste total em duas arestas contíguas e as demais arestas são livres, como sugerido na Figura 6.

A Tabela 2 mostra os resultados obtidos pelo GFEM para enriquecimento linear, como do problema 1, além de soluções obtidas por elementos finitos com funções quadráticas Serendipity para a mesma malha (indicado por "mef 2x2"). Uma solução de referência é obtida, usando uma malha de elementos finitos obtida com a divisão de cada linha da superfície em 10 partes, e dois elementos ao longo da espessura (indicada por "referência"). " $n$ " é o número de pontos de integração usados em cada direção.

Os resultados preliminares obtidos para ambos os problemas, mostrados nas Tabelas 1 e 2, indicam que, para elementos distorcidos ou regulares, a integração numérica estabiliza-se a partir de  $3 \times 3 \times 3$  pontos de Gauss. Observa-se uma diferença acentuada de resposta para a quadratura de 2 pontos em relação às demais. Os resultados parecem sugerir uma melhor precisão para a menor quadratura, parecendo indicar que o modelo completamente integrado é demasiado rígido. Testes detalhados tornam-se necessários para corroborar essa suspeita.

Adicionalmente, os resultados mostram que o GFEM apresenta num problema elasto-plástico um melhor comportamento quanto a distorção de malha que o elemento finito padrão usado nas comparações.

## 6 CONCLUSÕES

Os testes preliminares realizados confirmam a característica esperada do método de enriquecimento usado, global, de apresentar menor sensibilidade à distorção de malha. Paralelamente, a grande quantidade de graus de liberdade envolvidos neste tipo de formulação, parece indicar a necessidade do uso de processos automatizados de escolha de locais e direções de enriquecimento. Um enriquecimento com escolha da direção de enriquecimento é então essencial na análise de problemas de cascas sob plastificação via elementos sólidos. O processo iterativo usado, através da perturbação da matriz de rigidez, apresentou comportamento confiável. Aparentemente pode-se estimar que um processo auto adaptativo deve acarretar pouco acréscimo de esforço computacional desde que adequadamente acoplado ao processo iterativo de equilíbrio usado no tratamento da não-linearidade do problema. Essa auto-adaptatividade deve resultar numa minimização do número de graus de liberdade do modelo.

O trabalho encontra-se em estágio intermediário e os resultados apresentados são parciais.

## Referências

- [1] B. Szabó and I. Babuska, *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, New York (1976).
- [2] C. A. Duarte and J. T. Oden, "An Adaptative Method Using Clouds", *Comput. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 237-262, (1996).
- [3] C. A. Duarte, I. Babuska and J. Oden, "Generalized finite element methods in three dimensional structural mechanics problems", *Computer & Structures*, 77(2): 215-232, 2000.
- [4] C. A. Duarte and J. T. Oden, "Hp Clouds - A meshless methods to solve boundary value problems", *TICAM Reports*, (1995).
- [5] I. Babuska, G. Caloz and J. E. Osborn, "Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients", *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(4): 945-981, (1994).

- [6] J. M. Melenk and I. Babuska, "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications", *Comput. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 289-314, (1996).
- [7] J. C. Simo and R. L. Taylor, "Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity", *Comput. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, 1985, pp 101-118.
- [8] J. C. Simo, T. J. R. Hughes, *Computational inelasticity*, Springer-Verlag N.Y., 1998.
- [9] P. Kryls and T. Belytschko, "Analysis of thin shells by Element-Free Galerkin Method", *Int. J. of Solids Structures*, 33(20 22): 3057-3080, (1996).