

## APLICACIONES DEL MÉTODO DE LA DOBLE MALLA A PROBLEMAS DE ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL Y PLACAS DELGADAS

Hugo F. Begliardo\*, Victorio E Sonzogni†

\*Departamento de Ingeniería Civil  
Universidad Tecnológica Nacional, F.R.Rafaela  
Bv.Roca 989  
2300 Rafaela, Argentina  
e-mail: hfbegliardo@impsat1.com.ar

†Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC),  
Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC, CONICET,  
Universidad Nacional del Litoral  
Güemes 3450  
3000 Santa Fe, Argentina  
e-mail sonzogni@intec.unl.edu.ar, web page: <http://www.cimec.org.ar>

**Key words:** Método doble malla, Estimador de error, Mejorador de la solución, Factor de participación, Extrapolación de Richardson.

**Resumen:** *El método de doble malla ha sido presentado en comunicaciones de congresos anteriores, como un procedimiento con el que se pueden obtener soluciones muy precisas con mallas relativamente gruesas, tras ponderar a cada una de ellas con un adecuado factor de participación.*

*Basado conceptualmente en la teoría de mezclas de materiales compuestos de varias fases, oportunamente se han mostrado las posibilidades y ventajas de dicho procedimiento en su aplicación a problemas elípticos en general, de evolución y de autovalores.*

*En este trabajo se presenta la aplicación del método a problemas de elasticidad bidimensional (tensiones planas) y, particularmente, a problemas de placas delgadas bajo diferentes condiciones de apoyo.*

*A fin de verificar la bondad de los resultados se han referido los ejemplos a problemas que poseen solución analítica ó, en su defecto, a los valores obtenidos con una malla suficientemente densa, de modo que expresara una buena aproximación a la solución.*

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1 En qué consiste

El método de la doble malla, o malla compuesta, fue introducido por Sonzogni et al. (1996)<sup>1</sup>, Bergallo et al. (1998)<sup>2</sup> con la finalidad de: i) estimar errores de discretización, inherentes al método de los elementos finitos, y ii) obtener una solución mejorada sin el agregado de un costo computacional significativo, ni requerimientos de postprocesamiento de las soluciones numéricas halladas.

Ha sido presentado en comunicaciones de congresos anteriores, mostrándose lo ventajoso de su aplicación a problemas elípticos en general, de evolución y de autovalores<sup>3</sup>.

Basado conceptualmente en las teorías de mezclas de materiales compuestos de varias fases que comparten un mismo volumen<sup>4</sup>, el método en sí consiste en la yuxtaposición de dos mallas sobre un mismo dominio, forzando la conexión en los nodos comunes a ambas, y afectando a cada una de ellas de sendos factores de participación o ponderación, convenientemente escogidos.

### 1.2 Alternativas de implementación

A partir de lo señalado, el método admite dos vías aplicativas:

a) Mediante una *versión h*, consistente en la superposición de una malla gruesa, de paso de discretización (tamaño del elemento)  $h_1$ , y otra fina, de paso  $h_2$ . Generalmente, aunque ello no es excluyente, se procura que esta última sea un refinamiento de la primera y que la conexión entre ambas se produzca en los nodos de la malla gruesa.

Ambas mallas, si bien individualmente proveerán una diferente solución discreta, poseen el mismo grado de función interpolante.

Este es el camino seguido en el presente trabajo, adoptándose mallas estructuradas para discretizar el dominio, en modo tal que el paso  $h_2$  de la malla más fina se reduzca a la mitad del de la gruesa. Es decir,  $h_1 = 2 h_2$ .

b) Por medio de una *versión p*, en la cual las mallas se yuxtaponen teniendo el mismo tamaño de elementos, pero con distinto número de nodos, de modo que lo que cambia es la función interpolante en cada una de ellas.

De la misma manera que lo señalado en el caso anterior, la conexión se practica en los nodos comunes.

Esta vía, si bien favorece el tratamiento geométrico del dominio, presenta mayores dificultades para la determinación de los factores óptimos de participación, por lo que es objeto de desarrollo.

### 1.3 Uso como estimador de error

El Método puede ser aplicado como estimador de error *a posteriori*, utilizándose, por ejemplo, el mismo coeficiente de peso para las dos mallas. Las magnitudes de las fuerzas de

interacción que se producen en los nodos comunes, procurando igualar el comportamiento de ambas, compatibilizándolo, sirven de base para formular las pertinentes estimaciones.

En los trabajos de Bergallo et al.<sup>2,5</sup>, se vuelcan desarrollos realizados al respecto.

#### 1.4 Uso como mejorador de la solución

Su empleo como mejorador de la solución es objeto del presente trabajo y del contenido de los párrafos que siguen.

### 2. FUNDAMENTOS DEL PROCEDIMIENTO

Sean dos mallas  $T_{h_1}$  y  $T_{h_2}$ , de pasos  $h_1$  y  $h_2$ , respectivamente, en las que  $h_1 > h_2$ .

Llamando con

$$A_1 u_1 = f_1 \quad (1)$$

al sistema de ecuaciones que debe resolverse por el método de los elementos finitos, para un problema dado, empleando la malla  $T_{h_1}$ , y

$$A_{12} u_{12} = f_{12} \quad (2)$$

al mismo sistema de ecuaciones, completado con ceros para igualar las dimensiones del sistema

$$A_2 u_2 = f_2 \quad (3)$$

correspondiente a la malla  $T_{h_2}$ .

El método de la doble malla propone la mezcla de ambos sistemas de ecuaciones, de tal manera que

$$(\alpha A_2 + (1 - \alpha) A_{12}) u_{h_1 h_2} = (\alpha f_2 + (1 - \alpha) f_{12}) \quad (4)$$

siendo  $u_{h_1 h_2}$  la solución aproximada de la malla compuesta.

Como se observa en (4), los factores de ponderación son tales que, para  $\alpha = 1$  se tiene el problema original de la malla fina, y para  $\alpha = 0$ , el de la gruesa.

Es evidente, conforme surge de dicha ecuación, que tales factores habrán de incorporarse a la matriz de rigidez del sistema (v.g. afectando el módulo de elasticidad) y al término de cargas.

La determinación de dichos coeficientes de peso puede realizarse a partir de la extrapolación de Richardson<sup>6</sup>.

Con este procedimiento, que permite mejorar la solución partiendo de los resultados hallados para dos mallas a las que se les aplicó el mismo tipo de elemento, si se hace  $h_1 = 2h_2$ , se puede expresar la solución extrapolada como

$$u_{h_1 h_2 r} = \frac{2^p}{(2^p - 1)} U_{h_2} - \frac{1}{(2^p - 1)} U_{h_1} \quad (5)$$

siendo  $p$  el orden numérico aproximado del método,  $U_{h_i}$  ( $i = 1, 2$ ) las aproximaciones a la solución exacta  $U$  asociada a las mallas  $T_{h_i}$  ( $i = 1, 2$ ), e indicándonos  $u_{h_1 h_2 r}$  que la extrapolación ha sido aplicada entre los pasos  $h_1$  y  $h_2$ .

En función de lo expresado, los factores de peso a emplear serán

$$\alpha = \frac{2^p}{(2^p - 1)} \quad (6)$$

para la malla más fina, y

$$(1 - \alpha) = -\frac{1}{(2^p - 1)} \quad (7)$$

para la gruesa.

La determinación del orden numérico aproximado del método,  $p$ , se puede establecer a partir de las relaciones que se obtienen del planteo de la solución buscada  $U$ , valuada en un determinado nodo  $i$  la cual, para dos mallas sucesivas  $T_{h_i}$  ( $i = 1, 2$ ), está dada por

$$\begin{aligned} U &= U_{h_1} + O(h_1^p) \\ U &= U_{h_2} + O(h_2^p) \end{aligned} \quad (8)$$

De ello se deduce que

$$\frac{U_{h_2} - U_{h_1}}{U_{h_3} - U_{h_2}} \cong \frac{h_1^p - h_2^p}{h_2^p - h_3^p} \quad (9)$$

En particular, si el refinamiento entre una y otra malla se limita a la mitad, es decir  $h_1 = 2h_2 = 4h_3$ , se tendrá

$$\frac{U_{h_2} - U_{h_1}}{U_{h_3} - U_{h_2}} \cong 2^p \quad (10)$$

Esta expresión permite evaluarlo a partir de una multigrilla, y ha sido el procedimiento empleado en las aplicaciones subsiguientes.

### 3. APLICACIONES

#### 3.1 Problema de elasticidad bidimensional

Como primer ejemplo de aplicación, se resolvió un caso de tensión plana, consistente en un tabique de espesor unitario empotrado al pie (viga cantilever), de dimensiones 3 (base) x 9

(altura), sometido a una carga lateral uniformemente repartida de intensidad  $q = 1$ . Se consideró un módulo de Young  $E = 1$  y un valor nulo para el coeficiente de Poisson.

El objeto ha sido determinar el desplazamiento horizontal en el punto central del extremo superior ( $x = 1,5$ ;  $y = 9$ ) y compararlo con la solución analítica exacta dada por Timoshenko y Goodier (desplazamiento en  $x = 396,8$ )<sup>7</sup>.

Su resolución se ha llevado a cabo por dos vías:

1. La solución estándar por elementos finitos para mallas simples sucesivamente más densas, en las cuales el tamaño de los elementos de cada una de ellas fue reducido a la mitad de los de la precedente.

2. La solución aplicando el método de la malla compuesta, ponderando a cada componente con un adecuado factor de participación.

Para implementarlas se ha empleado el sistema GiD-Calsef, aplicando elementos lineales cuadriláteros de cuatro nodos.

El número de mallas planteadas siguiendo el primero de los caminos señalados, ha sido de seis en total, lo que ha permitido formular cuatro estimaciones del orden, por aplicación de (10). Los resultados de la cuarta de ellas, que han sido valuados sólo en los nodos que coincidían con los de la grilla de mallas intervinientes en la segunda estimación, a fin de conocer la tendencia del orden  $p$ , se consignan en la Tabla 1.

Tabla 1: Valores  $2^p$  ( $p$ : orden del método)

x\y	1,5	3,00	4,50	6,00	7,50	9,00
0,00	3,71	3,85	3,89	3,91	3,92	3,93
1,50	3,71	3,85	3,89	3,91	3,92	3,93
3,00	3,71	3,85	3,89	3,91	3,92	3,93

Claramente se observa que  $2^p \cong 4$ , por lo que  $p \cong 2$ .

Por aplicación de (6) y (7) se tendrán, respectivamente,  $\alpha = 4/3$  y  $(1-\alpha) = -1/3$ .

En la Figura 1 se grafican los resultados obtenidos, refiriéndolos a la solución exacta antedicha. El valor consignado para el caso de la malla simple 1x3 responde al promedio de los dos nodos del extremos superior.

Se puede apreciar que el Método de la Doble Malla funciona correctamente para  $\alpha = 4/3$ , aún para combinaciones de mallas pobres en cuanto a su densificación, corroborándose los resultados obtenidos para otros ejemplos de aplicaciones en elasticidad bidimensional ya dados a conocer en anteriores comunicaciones<sup>1,3,5</sup>.

El tiempo de *cpu* para combinaciones de mallas compuestas, prácticamente no difiere del de la malla más fina que entra en la grilla considerada, particularmente en las primeras combinaciones, a partir de las cuales ya es posible obtener una solución notoriamente mejorada.

Al haberse realizado la estimación del orden  $p$ , se observó la tendencia a bajar del término  $2^p$ , a medida que los nodos donde se lo evaluaba se acercaban al empotramiento, lo cual evidencia una alteración en el orden de convergencia en las cercanías de los vínculos.

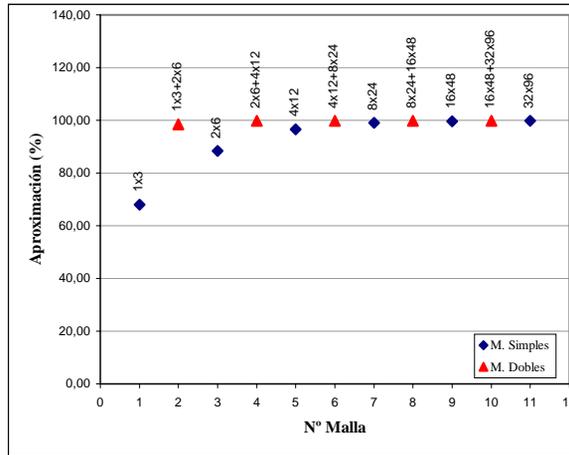


Figura 1

Viga cantilever : aproximación al desplazamiento exacto del punto central del extremo superior, empleando mallas simples y compuestas ( $\alpha = 4/3$ ).

### 3.3 Problemas de placas delgadas

Como segundo caso de aplicación se abordaron problemas vinculados a placas. En este tipo estructural se utilizó el elemento de placa cuadrilátero de 4 nodos, con deformaciones de cortantes lineales, de clase  $C_0$ , incorporado al sistema GiD-Calsef.

El tratamiento se restringió a placas delgadas, de geometría cuadrada y sometidas a una carga uniformemente repartida en todo su dominio, bajo diferentes condiciones de apoyo.

Al igual que lo hecho con el caso de elasticidad bidimensional, se planteó la solución estándar por elementos finitos y la solución para mallas compuestas, ponderándolas de la misma manera, es decir,  $\alpha = 4/3$  (para la malla más fina) y  $(1-\alpha) = -1/3$  (para la más gruesa).

#### 3.2.1 Caso 1: placa con apoyos puntuales en los vértices

Se consideró una placa de lado  $a = 1$  y espesor  $t = a/10$ , tomada con un apoyo puntual en cada vértice, permaneciendo libre el resto del contorno.

Se graficaron los resultados para el caso de la flecha en el centro de la placa y flecha en el centro de los lados (figs. 2 y 3).

Los mismos han sido referidos a los de una malla densa de 128x128 elementos los cuales, en un caso (centro de la placa), está por debajo de las soluciones halladas por Marcus y

Ballesteros-Lee<sup>8</sup>, y en el otro (centro de los lados), es intermedio para las mismas referencias, según se muestra en tabla 2.

Como aconteció con el caso de tensión plana analizado en 3.1, se obtienen resultados mejorados aplicando el factor  $\alpha = 4/3$ , sin incremento apreciable en el tiempo de máquina.

Tabla 2: Flechas para placa cuadrada apoyada en las esquinas y carga uniformemente distribuída ( $w = \alpha qL^4/D$ )

	Malla 128x128 (ref.)	Marcus	Ballesteros y Lee
Centro de la placa	0,0256	0,0281	0,0265
Centro de los lados	0,0179	0,0180	0,0170
Multiplicador	$qL^4/D$		

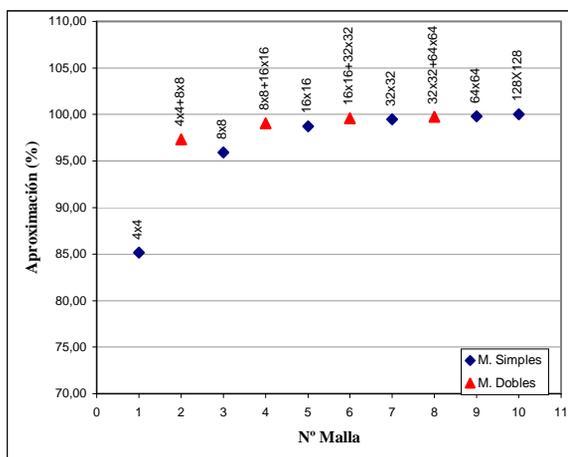


Figura .2

Placa delgada con apoyos puntuales en su vértices: aproximaciones a la flecha en el nodo central de la placa, empleando mallas simples y compuestas ( $\alpha = 4/3$ ), referidas a la de una malla de 128x128 elementos.

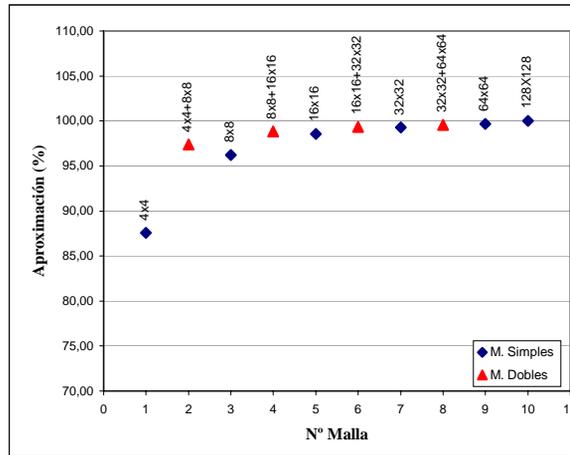


Fig.3

Placa delgada con apoyos puntuales en su vértices: aproximaciones a la flecha en el nodo central de los lados empleando mallas simples y compuestas ( $\alpha = 4/3$ ), referidas a la de una malla de 128x128 elementos.

### 3.2.2 Caso 2: placa con dos lados opuestos simplemente apoyados

Con la pretensión de observar el comportamiento de las mallas compuestas al ir vinculando progresivamente la placa, a la del ejemplo de 3.2.1, se le modificaron las condiciones de apoyo. En este caso, se la tomó con apoyos simples en dos lados opuestos, bajo condiciones de contorno “fuertes” (descenso y giro sobre el borde apoyado nulos), en tanto que los dos restantes permanecieron libres.

En las figuras 4 y 5 se volcaron los resultados para el caso de la flecha en el centro de la placa y en el centro de los lados libres, respectivamente.

Como en el anterior, fueron referidos a los de una malla densa de 128x128 elementos, los cuales se consignan en tabla 3.

Los resultados obtenidos vuelven a poner de manifiesto el buen comportamiento del factor  $\alpha = 4/3$ , mejorando la solución que se obtendría individualmente con la malla fina.

Tabla 3: Flechas para placa cuadrada, simplemente apoyada en dos lados opuestos y carga uniformemente distribuida ( $w = \alpha qL^4/D$ )

	Malla 128x128 (ref.)
Centro de la placa	0,0131
Centro de los lados	0,0150
Multiplicador	$qL^4/D$

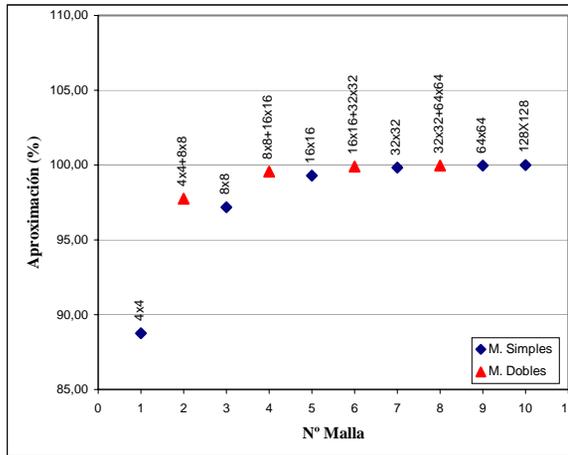


Figura 4

Placa simplemente apoyada en dos lados opuestos: aproximaciones a la flecha en el nodo central de la placa, empleando mallas simples y compuestas ( $\alpha = 4/3$ ), referidas a la de una malla de 128x128 elementos.

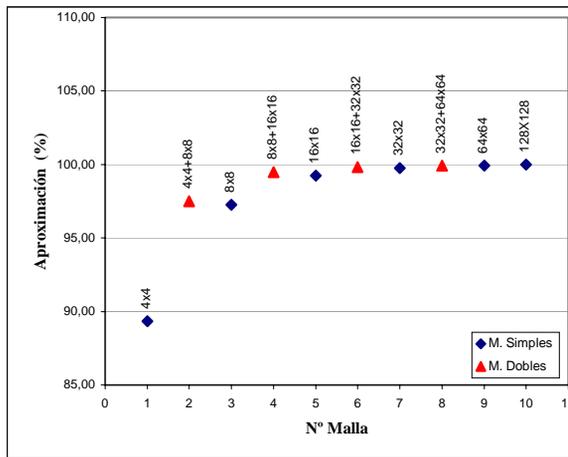


Figura 5

Placa simplemente apoyada en dos lados opuestos: aproximaciones a la flecha en el centro de los lados libres, empleando mallas simples y compuestas ( $\alpha = 4/3$ ), referidas a la de una malla de 128x128 elementos.

### 3.2.3 Caso 3: placa con los cuatro lados simplemente apoyados

Continuando con el aumento progresivo de los vínculos, se tomó a la placa con apoyos simples en los cuatro lados, siempre bajo condiciones de contorno “fuertes”, más compatibles con el comportamiento de las placas delgadas.

En la figura 6 se presentan los resultados de la flecha en el centro de la placa.

Al igual que lo hecho en los casos precedentes, ellos fueron referidos al de una malla densa de 128x128 elementos, según tabla 4.

Como aconteció con los casos precedentemente analizados de placas delgadas, vuelve a corroborarse el buen comportamiento del factor  $\alpha = 4/3$  escogido.

Tabla 4: Flechas para placa cuadrada, simplemente apoyada en bordes y carga uniformemente distribuida ( $w = \alpha qL^4/D$ )

	Malla 128x128 (ref.)	Timoshenko (exacta)
Centro de la placa	0,0040644	0,0040619
Multiplicador	$qL^4/D$	

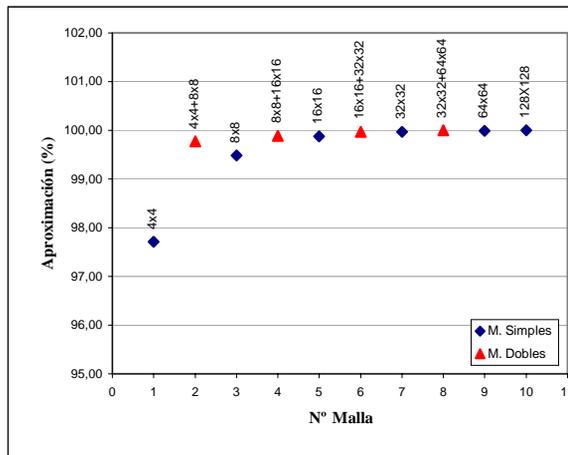


Figura 6

Placa cuadrada ,delgada, simplemente apoyada en sus cuatro lados: aproximaciones a la flecha en el centro empleando mallas simples y compuestas ( $\alpha = 4/3$ ), referidas a la de una malla de 128x128 elementos.

## 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado un ejemplo de aplicación del método de la doble malla a un caso de tensiones planas, confirmando los beneficios del mismo en el mejoramiento de la

solución, como fuera informado en anteriores comunicaciones, potenciándola significativamente aún para combinaciones de mallas poco densas.

Asimismo, se ha introducido la aplicación del procedimiento al caso de placas delgadas bajo diferentes condiciones de apoyo. En todos ellos los resultados han sido positivos, poniendo de manifiesto que, con mallas relativamente gruesas, ha sido posible mejorar la aproximación a la solución de referencia hasta valores que normalmente se obtienen con mallas más finas.

Si bien el método ha tenido un desempeño satisfactorio en placas delgadas, es de observar que, para los casos analizados, y en función del elemento empleado, la mejora en los resultados ha tenido una convergencia a la solución esperada menos rápida que para lo acontecido en las aplicaciones a problemas de elasticidad bidimensional.

En todos los casos su aplicación no precisa de la realización de ningún post-procesamiento de los resultados. Del mismo modo, el número de ecuaciones a resolver aplicando el método de la malla compuesta, iguala al de la malla más fina contenida en la combinación, por lo que el tiempo de máquina insumido para resolver las mismas prácticamente no presenta diferencias.

## REFERENCIAS

- [1] V.E. Sonzogni, M.B. Bergallo y C.E. Neuman, *Uso de la malla compuesta para estimar errores de discretización y mejorar la solución en elementos finitos*, Proceedings de MECOM 96, Tucumán, Argentina, Septiembre 1996, Vol. I, 123-132, (1996).
- [2] M.B. Bergallo, C.E. Neuman y V.E. Sonzogni, *A finite element error estimation based on the mixed mesh concept*, Proceedings of the IV World Congress on Computational Mechanics Buenos Aires, Argentina, Julio 1998, CD ROM, (1998).
- [3] M.B. Bergallo, C.E. Neuman y V.E. Sonzogni, *Algunas aplicaciones del método de la doble malla a problemas de evolución y autovalores*, Mendoza, Argentina, Septiembre 1999, Tomo II, Paper 34, CD ROM, (1999).
- [4] C. Truesdell y R. Toupin, *The Classical Field Theory*, Handbuch der Physik, Ed. S.Flügge, V. III/1, Springer-Verlag, Berlín, (1960).
- [5] M.B. Bergallo, C.E. Neuman y V.E. Sonzogni, *Composite mesh concept based FEM error estimation and solution improvement*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 188, 755-774, (2000).
- [6] L.F. Richardson, *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems*, Trans.Roy.Soc., London, A210, 307-57, (1910).
- [7] C.A. Brebbia y A.J. Ferrante, *Computational methods for the solution of engineering problems*, Pentch Press Ltd., London, 317, (1978).

[8] O.C. Zienkiewicz yR. L. Taylor, *El Método de los Elementos Finitos*, Mc Graw-Hill, CIMNE, Vol. 2, 4<sup>a</sup> Edic., (1995).