

ESQUEMAS DE INTEGRACIÓN TEMPORAL PARA SISTEMAS MULTICUERPOS CON RESTRICCIONES

Elisabet V. Lens* and Alberto Cardona*

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería
CIMEC-INTEC, Conicet-Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: acardona@intec.unl.edu.ar

Palabras Clave: Integración temporal, Sistemas DAE, Conservación de la Energía, Disipación de la Energía.

Resumen. *En este trabajo se describen dos métodos para integrar numéricamente en el tiempo las ecuaciones del movimiento de la dinámica de sistemas multicuerpos, uno que conserva la energía total del sistema y otro que introduce una disipación para las oscilaciones espúreas de alta frecuencia no deseadas de origen numérico. Se examinan en detalle los aspectos de la formulación de ambos esquemas, las propiedades de conservación y disipación según el caso en presencia de restricciones algebraicas y la incrementación de las rotaciones finitas. La performance de ambos métodos se muestra a través de tres ejemplos: un sistema masa-resorte no lineal, un péndulo doble y un trompo simétrico en un campo gravitacional.*

1. INTRODUCCIÓN

La integración de ecuaciones algebraicas-diferenciales (DAE) de segundo orden e índice 2, conduce a inestabilidad numérica cuando se usa un método de integración de la familia de Newmark debido a las restricciones algebraicas, que se manifiesta a través de oscilaciones crecientes en la respuesta en aceleraciones. Introduciendo una pequeña disipación en el algoritmo para las altas frecuencias se logra controlar esta inestabilidad, manteniendo la estabilidad de la integración en dinámica lineal con restricciones (por ejemplo, esquemas HHT¹ y método α generalizado de Hulbert²).

En presencia de no linealidades la estabilidad no puede ser verificada por métodos usuales de análisis, basados en el estudio de las propiedades de la matriz de transición del esquema. Una alternativa para asegurar la estabilidad de la solución es mediante esquemas que garanticen la conservación de la energía mecánica total del sistema en cada paso de tiempo. Pero esta estabilidad incondicional no garantiza una performance satisfactoria del esquema cuando aparecen las oscilaciones antes mencionadas, netamente de origen numérico. Se hace entonces necesario desarrollar esquemas alternativos. Una metodología que conduce de manera sistemática a la obtención de esquemas disipativos es el Método de Galerkin Discontinuo en el tiempo,³ inicialmente desarrollado para ecuaciones hiperbólicas. En un trabajo anterior⁴ desarrollamos en detalle el esquema conservativo propuesto por G eradin.⁵ En este trabajo lo retomamos para construir un esquema que garantiza la estabilidad del proceso de integración numérica y además introduce disipación numérica para las oscilaciones de alta frecuencia.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Dado un sistema mecánico conservativo descrito en términos de N coordenadas generalizadas \mathbf{q} y sometido a R restricciones algebraicas

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

sus propiedades dinámicas pueden derivarse de una descripción adecuada de su energía potencial $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{q})$ y de su energía cinética, la cual puede expresarse, sin pérdida de generalidad, mediante la forma cuadrática

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}. \quad (2)$$

La matriz ($M \times M$) de inercia \mathbf{M} puede asumirse constante, simétrica y definida positiva, ya que asumimos que las velocidades \mathbf{v} están expresadas en un *marco material*. Estas últimas son tratadas como cuasi-coordenadas y toman la forma de combinaciones lineales de las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas

$$\mathbf{v} = \mathbf{L}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3)$$

siendo $\mathbf{L}(\mathbf{q})$ una matriz ($M \times N$). La desigualdad $M \leq N$ cubre el caso en el cual la descripción de las velocidades angulares se hace en términos de parámetros de rotación

redundantes, como por ejemplo parámetros de Euler. En este caso, la redundancia entre parámetros debe ser removida agregando restricciones apropiadas al conjunto de restricciones globales (1). Las ecuaciones de movimiento resultan de la aplicación del principio de Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{v} - \mathbf{L}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{V}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) \right\} dt = 0 \quad (4)$$

Nótese que realizando la variación en las variables $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{v} y \mathbf{q} sucesivamente:

- la variación de los multiplicadores $\boldsymbol{\mu}$ nos devuelve las ecuaciones de velocidad (3)
- la variación de los multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}$ nos devuelve el conjunto de restricciones (1)
- la variación $\delta \mathbf{v}$ muestra que los multiplicadores $\boldsymbol{\mu}$ tienen el significado de los momentos generalizados

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M} \mathbf{v} \quad (5)$$

- de la variación de desplazamientos generalizados \mathbf{q} obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \mathbf{q}^T \left(-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^T}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [(\mathbf{L} \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\mu}] \right) + \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\mu} \right\} dt = 0 \quad (6)$$

de donde obtendremos las ecuaciones de equilibrio.

Integrando por partes (6)

$$[\delta \mathbf{q}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\mu}]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{q}^T \left\{ -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^T}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [(\mathbf{L} \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\mu}] - \frac{d}{dt} (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\mu}) \right\} dt = 0 \quad (7)$$

Combinando luego (5) y (3) obtenemos

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M} \mathbf{L}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (8)$$

Así, las ecuaciones de movimiento toman la forma de un sistema de ecuaciones algebraicas-diferenciales de primer orden, en las variables \mathbf{q} , $\boldsymbol{\mu}$, y $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} + \dot{\mathbf{L}}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [(\mathbf{L} \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\mu}] &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu} - \mathbf{M} \mathbf{L}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9)$$

donde $\mathbf{B} = \partial \boldsymbol{\Phi} / \partial \mathbf{q}$ en la ecuación (9-a) es la matriz Jacobiana de las restricciones. Es importante notar que los últimos dos términos en (9-a) pueden escribirse en la forma

$$\dot{\mathbf{L}}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [(\mathbf{L} \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\mu}] = \mathbf{G}(\boldsymbol{\mu}) \dot{\mathbf{q}} \quad (10)$$

donde la matriz $\mathbf{G}(\boldsymbol{\mu})$ tiene como componentes:

$$G_{jp} = \sum_i \mu_i \left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial q_p} - \frac{\partial L_{ip}}{\partial q_j} \right) \quad (11)$$

La antisimetría de (11) es inmediata. Luego, la forma final de las ecuaciones de movimiento resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\mu}) \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu} - \mathbf{M} \mathbf{L}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

3. APROXIMACIÓN DE GALERKIN CONTINUA

3.1. Discretización de las Ecuaciones de Movimiento

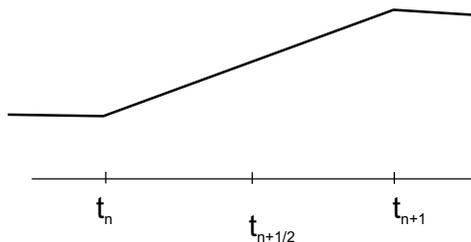


Figura 1: Interpolación en la aproximación de Galerkin Continua

En la aproximación de Galerkin las ecuaciones de movimiento se satisfacen en forma débil (forma integral). La aproximación de Galerkin de las ecuaciones de movimiento (12) se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \int_{-1}^1 A_1 (\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\mu}) d\tau + \\ \frac{h}{2} \int_{-1}^1 A_2 \left(\dot{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{L}^{-T} \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}^{-T} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{L}^{-T} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \right) d\tau = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

donde h es el tamaño del paso de tiempo y τ una variable de tiempo adimensional ($\tau = -1,0$ en t_i y $\tau = 1,0$ en t_f). Usando funciones de interpolación continuas lineales por tramos para los desplazamientos y los momentos generalizados (figura 1) y funciones de test discontinuas y constantes por tramos A_1 y A_2 , se obtiene la siguiente expresión aproximada usando una regla del punto medio:

$$\frac{1}{h} \mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}}^T (\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n) + \frac{1}{h} \mathbf{G}_{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{B}_{n+\frac{1}{2}}^T \boldsymbol{\lambda}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{0} \quad (14)$$

La matriz $\mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}}$ dependerá de la parametrización de rotaciones adoptada. En este trabajo se utiliza una parametrización tal que esta matriz resulta constante. De (13) se obtiene también la siguiente relación entre las velocidades \mathbf{v} y las coordenadas generalizadas \mathbf{q}

$$\mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{h} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) = \frac{1}{2} \mathbf{M}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{n+1} + \boldsymbol{\mu}_n) \quad (15)$$

Finalmente, combinando (14) y (15) llegamos a las ecuaciones discretas

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} (\mathbf{L}^T \mathbf{M} \mathbf{L})_{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) - \frac{2}{h} \mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}}^T \boldsymbol{\mu}_n + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \right)_{n+\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{h} \mathbf{G}_{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (16)$$

que se resuelven de manera iterativa para obtener \mathbf{q}_{n+1} y $\boldsymbol{\lambda}_{n+\frac{1}{2}}$.

3.2. Conservación de la Energía en el Esquema Discreto

La energía total del sistema es $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{V}(\mathbf{q})$ donde la energía cinética tiene como expresión $\mathcal{K} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ y la energía potencial $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ es una función de las coordenadas generalizadas \mathbf{q} . El cambio de energía total en un paso de tiempo puede evaluarse calculando el trabajo realizado por las fuerzas elásticas, de restricción y de inercia.

Para probar la conservación de la energía total del esquema discreto, multiplicamos (14) por el salto de desplazamientos $\Delta \mathbf{q} = (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)$ en un paso de tiempo

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n) + \frac{1}{h} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{G}_{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) + \\ (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{n+\frac{1}{2}} + (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{B}_{n+\frac{1}{2}}^T \boldsymbol{\lambda}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (17)$$

Vemos que el primer sumando, con ayuda de las relaciones (15), es el salto de energía cinética en el paso de tiempo.

$$\frac{1}{h} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}_{n+1} + \boldsymbol{\mu}_n)^T \mathbf{M}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n) = \Delta \mathcal{K} \quad (18)$$

El segundo sumando, debido a la naturaleza antisimétrica de la matriz \mathbf{G} , resulta idénticamente nulo.

$$\frac{1}{h} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{G}_{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \quad (19)$$

En el término correspondiente a las fuerzas provenientes del potencial \mathcal{V} , reemplazamos la derivada en el punto medio $(\partial \mathcal{V} / \partial \mathbf{q})_{n+\frac{1}{2}}$ por la aproximación $(\partial \mathcal{V} / \partial \mathbf{q})_{n+\frac{1}{2}}^*$ (*derivada direccional discreta*⁶) que satisface la siguiente condición:

$$(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{n+\frac{1}{2}}^* = \mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n \quad (20)$$

Por último, en el término correspondiente a las fuerzas de restricción usamos nuevamente el concepto de *derivada direccional discreta*, donde ahora la matriz Jacobiana de restricciones $\mathbf{B}_{n+\frac{1}{2}}$ se reemplaza por la aproximación $\mathbf{B}_{n+\frac{1}{2}}^*$ de manera que satisfaga

$$(\Phi_{n+1} - \Phi_n) = \mathbf{B}_{n+\frac{1}{2}}^*(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) \quad (21)$$

Con esta condición,

$$(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{B}_{n+\frac{1}{2}}^{*T} \lambda_{n+\frac{1}{2}} = (\Phi_{n+1} - \Phi_n) \lambda_{n+\frac{1}{2}} \quad (22)$$

Por compatibilidad de configuraciones, tenemos que $\Phi_n = \mathbf{0}$. Luego, forzando

$$\Phi_{n+1} = \mathbf{0} \quad (23)$$

garantizamos la nulidad del trabajo de las fuerzas de restricción. Finalmente, la energía total del sistema resulta

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = \mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_n + \mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n \quad (24)$$

Luego, el esquema (16) conserva la energía total del sistema si se cumplen (20), (21) y (23).

4. APROXIMACIÓN DE GALERKIN DISCONTINUA

4.1. Discretización de las Ecuaciones de Movimiento

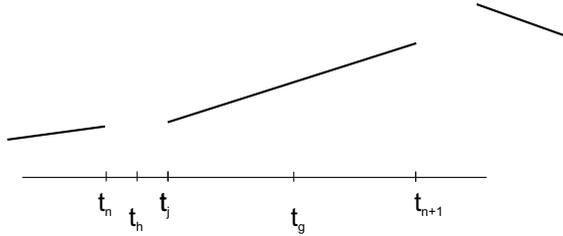


Figura 2: Interpolación en la aproximación de Galerkin Discontinua

En la aproximación de Galerkin discontinua en el tiempo las ecuaciones de movimiento y las condiciones iniciales se satisfacen en forma débil (forma integral). Permitimos discontinuidades en los campos de desplazamientos \mathbf{q} y momentos generalizados $\boldsymbol{\mu}$ en los instantes t_n, t_{n+1} . Se agrega un estado adicional, que se evalúa en el instante $t_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(t_n + \varepsilon)$, y se definen además las cantidades promediadas

$$(\bullet)_g = \frac{1}{2}((\bullet)_{n+1} + (\bullet)_j) \quad (\bullet)_h = \frac{1}{2}((\bullet)_j + (\bullet)_n) \quad (25)$$

El esquema avanza del instante inicial al final a través de dos pasos acoplados, uno de t_n a t_j y otro de t_j al t_{n+1} . La aproximación de Galerkin discontinua de las ecuaciones de movimiento (12) se escribe como

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} \int_{-1}^1 (A_1 + B_1\tau) [\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\mu}] d\tau + \\ & \frac{h}{2} \int_{-1}^1 (A_2 + B_2\tau) \left[\dot{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{L}^{-T} \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}^{-T} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \mathbf{L}^{-T} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \right] d\tau + \\ & (A_1 - B_1)(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n) + (A_2 - B_2) [(\boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_n) + \mathbf{L}^{-T} \mathbf{G}_h(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (26)$$

donde usamos aproximaciones lineales en el tiempo para los desplazamientos, los momentos generalizados, las fuerzas elásticas y las fuerzas de restricción; las funciones test son funciones discontinuas y lineales por tramos. Se obtienen así las ecuaciones discretas

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \mathbf{L}_m^T (\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n) + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_g + \mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g + \frac{1}{h} \mathbf{G}_g (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \\ & \frac{1}{h} \mathbf{L}_m^T (\boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_n) - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_g - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_h \right] + \frac{1}{6} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_j - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_n \right] - \\ & \frac{1}{3} (\mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g - \mathbf{B}_h^T \boldsymbol{\lambda}_j) + \frac{1}{h} \mathbf{G}_h (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (27)$$

Como ya dijimos, la matriz \mathbf{L} evaluada en el punto medio es constante para la parametrización de rotaciones adoptada en este trabajo. Luego tenemos $\mathbf{L}_g = \mathbf{L}_h = \mathbf{L}_m$.

De (26) se obtienen también las siguientes relaciones entre desplazamientos y velocidades

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \mathbf{L}_m (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_j) \\ & \frac{1}{h} \mathbf{L}_m (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n) = -\frac{1}{6} (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_j) \end{aligned} \quad (28)$$

Combinando las expresiones (27) con las (28) llegamos al siguiente sistema de ecuaciones discretas

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \mathbf{L}_m^T \mathbf{M} \mathbf{L}_m ((\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_j) - 2(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)) - \frac{1}{h} \mathbf{L}_m^T \boldsymbol{\mu}_n + \\ & \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_g + \mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g + \frac{1}{h} \mathbf{G}_g (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \\ & \frac{1}{h^2} \mathbf{L}_m^T \mathbf{M} \mathbf{L}_m ((\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_j) + 4(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)) - \frac{1}{h} \mathbf{L}_m^T \boldsymbol{\mu}_n - \\ & \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_g - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_h \right] + \frac{1}{6} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_j - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_n \right] - \frac{1}{3} (\mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g - \mathbf{B}_h^T \boldsymbol{\lambda}_j) + \frac{1}{h} \mathbf{G}_h (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (29)$$

que se resuelve en forma iterativa para obtener \mathbf{q}_{n+1} , \mathbf{q}_j , $\boldsymbol{\lambda}_g$ y $\boldsymbol{\lambda}_j$

4.2. Decaimiento de la Energía en el Esquema Discreto

Si multiplicamos (27-a) por el salto de desplazamientos $\Delta \mathbf{q} = (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)$ y (27-b) por el salto de desplazamientos $\Delta \mathbf{q} = (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)$ en un paso de tiempo, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h}(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{L}_m^T (\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n) + (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_g + \\ & \quad (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g + \frac{1}{h}(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{G}_g (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \\ & \frac{1}{h}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{L}_m^T (\boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_n) - \frac{1}{3}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_g - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_h \right] + \\ & \quad \frac{1}{6}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_j - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_n \right] - \frac{1}{3}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T (\mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g - \mathbf{B}_h^T \boldsymbol{\lambda}_j) + \\ & \quad \frac{1}{h}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{G}_h (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \quad (30) \end{aligned}$$

Haciendo uso de las relaciones (28) y luego combinando linealmente las ecuaciones (30-a) y (30-b) logramos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{n+1} + \boldsymbol{\mu}_j)^T \mathbf{M}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_j)^T \mathbf{M}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_n) + \\ & \quad (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_j)^T \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_g + (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_h + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_j - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_n \right] + \\ & \quad (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g - (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T (\mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g - \mathbf{B}_h^T \boldsymbol{\lambda}_j) + \\ & \quad (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \frac{1}{h} \mathbf{G}_g (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) + (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \frac{1}{h} \mathbf{G}_h (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \quad (31) \end{aligned}$$

Aquí, con ayuda de las relaciones (28), identificamos en los dos primeros sumandos el salto de energía cinética en el paso de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$ al cual se le agrega un término positivo: la *energía cinética del salto* \mathcal{K}_{nj} .

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{n+1} + \boldsymbol{\mu}_j)^T \mathbf{M}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_j) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_j)^T \mathbf{M}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_n) = \Delta \mathcal{K} + \mathcal{K}_{nj} \quad (32)$$

Esta *energía cinética de salto* tiene como expresión

$$\mathcal{K}_{nj} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_n)^T \mathbf{M}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_n) \geq 0 \quad (33)$$

En el segundo y tercer término reemplazamos $(\partial \mathcal{V} / \partial \mathbf{q})_g$ y $(\partial \mathcal{V} / \partial \mathbf{q})_h$ por las *derivadas direccionales discretas* tales que

$$(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_j)^T \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_g^* = \mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_j \quad (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_h^* = \mathcal{V}_j - \mathcal{V}_n \quad (34)$$

Entonces podemos identificar en estos dos sumandos el salto de energía potencial en el paso de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$ mas un término al que le pediremos que sea positivo y que llamaremos *energía potencial del salto*

$$\mathcal{V}_{nj} = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_j - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_n \right] \geq 0 \quad (35)$$

Debe notarse que esta desigualdad se verifica cuando la función potencial es convexa. Para las fuerzas de restricción aproximamos las matrices \mathbf{B}_g y \mathbf{B}_h con \mathbf{B}_g^* y \mathbf{B}_h^* , usando nuevamente el concepto de *derivada direccional discreta*, de manera tal que

$$(\Phi_{n+1} - \Phi_j) = \mathbf{B}_g^*(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_j); \quad (\Phi_j - \Phi_n) = \mathbf{B}_h^*(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n) \quad (36)$$

tenemos luego,

$$(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \mathbf{B}_g^{*T} \lambda_g - (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T (\mathbf{B}_g^{*T} \lambda_g - \mathbf{B}_h^{*T} \lambda_j) = (\Phi_{n+1} - \Phi_j) \lambda_g + (\Phi_j - \Phi_n) \lambda_j \quad (37)$$

Por compatibilidad de configuraciones, $\Phi_n = \mathbf{0}$. Luego, forzando

$$\Phi_j = \mathbf{0} \quad y \quad \Phi_{n+1} = \mathbf{0} \quad (38)$$

tenemos que el trabajo de las fuerzas de restricción resulta idénticamente nulo. Finalmente, para los dos sumandos restantes tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \frac{1}{h} \mathbf{G}_g (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)^T \frac{1}{h} \mathbf{G}_h (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (39)$$

por ser \mathbf{G}_g y \mathbf{G}_h matrices antisimétricas.

La energía total del sistema resulta

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = \mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_n + \mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n + c^2 \quad (40)$$

donde el término cuadrático es la *energía total del salto*

$$c^2 = \mathcal{E}_{nj} = \mathcal{K}_{nj} + \mathcal{V}_{nj} \geq 0 \quad (41)$$

Finalmente, vemos que

$$\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n - c^2 \longrightarrow \mathcal{E}_{n+1} \leq \mathcal{E}_n \quad (42)$$

es decir que el esquema (29) implica la desigualdad (42) si se cumplen (34), (35), (36) y (38) con lo cual se garantiza el decrecimiento de la energía total del sistema.

5. PARAMETRIZACIÓN DE LAS ROTACIONES

La eficiencia de la solución depende en gran medida de la parametrización de las rotaciones utilizada. Para definir la configuración “a mitad de camino” entre \mathbf{R}_n y \mathbf{R}_{n+1} , descomponemos el incremento de rotación de \mathbf{R}_n a \mathbf{R}_{n+1} en forma de dos rotaciones sucesivas

$$\mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{F}^2 \quad (43)$$

El operador resultante \mathbf{F} es tal que

$$\mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{R}_n \mathbf{F} = \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{F}^T \quad (44)$$

y verifica las propiedades de ortonormalidad

$$\mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} \quad (45)$$

Si aplicamos la regla del punto medio al incremento en el tiempo de las rotaciones finitas, la aproximación discreta de las velocidades angulares en el punto medio puede calcularse como

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^T \dot{\mathbf{R}}_{n+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h} \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^T (\mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{R}_n) \quad (46)$$

de donde

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{n+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h} (\mathbf{F} - \mathbf{F}^T) \quad (47)$$

de esta manera el incremento material de rotación toma la forma

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \simeq (\mathbf{F} - \mathbf{F}^T) \quad (48)$$

El operador \mathbf{F} puede describirse en términos de los invariantes de la rotación relativa $(\mathbf{n}, \Delta\phi)$, de la forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \frac{1}{2}\Delta\phi) \quad (49)$$

Eligiendo una parametrización por parámetros de Euler, tenemos

$$\text{vect}(\mathbf{F}) = \mathbf{n} \sin \frac{1}{2}\Delta\phi = \mathbf{e} \quad (50)$$

donde \mathbf{e} es la parte vectorial de los parámetros de Euler de la rotación relativa. Luego el operador \mathbf{F} tiene la forma explícita siguiente

$$\mathbf{F} = e_0 \mathbf{I} + \frac{1}{1+e_0} \mathbf{e} \mathbf{e}^T + \tilde{\mathbf{e}} \quad (51)$$

y logramos las siguientes aproximaciones simplificadas

$$\boldsymbol{\Omega}_{n+\frac{1}{2}} \simeq \frac{2}{h} \mathbf{e} \quad \Delta \boldsymbol{\Theta} \simeq 2\mathbf{e} \quad (52)$$

Para el caso disipativo tenemos las expresiones correspondientes para los incrementos de rotación de \mathbf{R}_n a \mathbf{R}_j y de \mathbf{R}_j a \mathbf{R}_{n+1}

$$\mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_j = \mathbf{F}_h^2 \quad \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{F}_g^2 \quad (53)$$

donde los operadores \mathbf{F}_h y \mathbf{F}_g tienen la siguiente forma explícita

$$\mathbf{F}_h = e_{h_0} \mathbf{I} + \frac{1}{1 + e_{h_0}} e_h e_h^T + \tilde{\mathbf{e}}_h \quad \mathbf{F}_g = e_{g_0} \mathbf{I} + \frac{1}{1 + e_{g_0}} e_g e_g^T + \tilde{\mathbf{e}}_g \quad (54)$$

y las expresiones simplificadas de velocidades angulares e incrementos de rotación resultan

$$\boldsymbol{\Omega}_h \simeq \frac{2}{h} \mathbf{e}_h \quad \Delta \boldsymbol{\Theta}_h \simeq 2e_h \quad \boldsymbol{\Omega}_g \simeq \frac{2}{h} \mathbf{e}_g \quad \Delta \boldsymbol{\Theta}_g \simeq 2e_g \quad (55)$$

Nótese que con esta parametrización, la matriz \mathbf{L} evaluada en el punto medio tiene la forma $\mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}} = 2\mathbf{I}$

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Aplicaremos los algoritmos de integración desarrollados a tres ejemplos: un sistema masa-resorte no lineal, un péndulo doble y un trompo simétrico en un campo gravitacional

6.1. Oscilador No Lineal de 1 gdl

El primer ejemplo que trataremos es un sistema masa-resorte no lineal. El sistema es de un grado de libertad sin restricciones. Las expresiones de las energías cinética y potencial son

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2} k \varepsilon^2 \quad (56)$$

donde la ley de deformación viene dada por $\varepsilon = x^2$. Para este ejemplo $m = 1$ y $k = 1$. La condición (20) implica que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{n+\frac{1}{2}}^* = (x_{n+1} + x_n) \frac{k}{2} (x_{n+1}^2 + x_n^2) \quad (57)$$

para el esquema conservativo y la (34) implica

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_g^* = (x_{n+1} + x_j) \frac{k}{2} (x_{n+1}^2 + x_j^2) \quad \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \right)_h^* = (x_j + x_n) \frac{k}{2} (x_j^2 + x_n^2) \quad (58)$$

para el esquema disipativo. Luego, reemplazando en (16) las ecuaciones discretas resultan

$$\frac{2}{h^2} m (x_{n+1} - x_n) - \frac{2}{h} m \dot{x}_n + (x_{n+1} + x_n) \frac{k}{2} (x_{n+1}^2 + x_n^2) = 0 \quad (59)$$

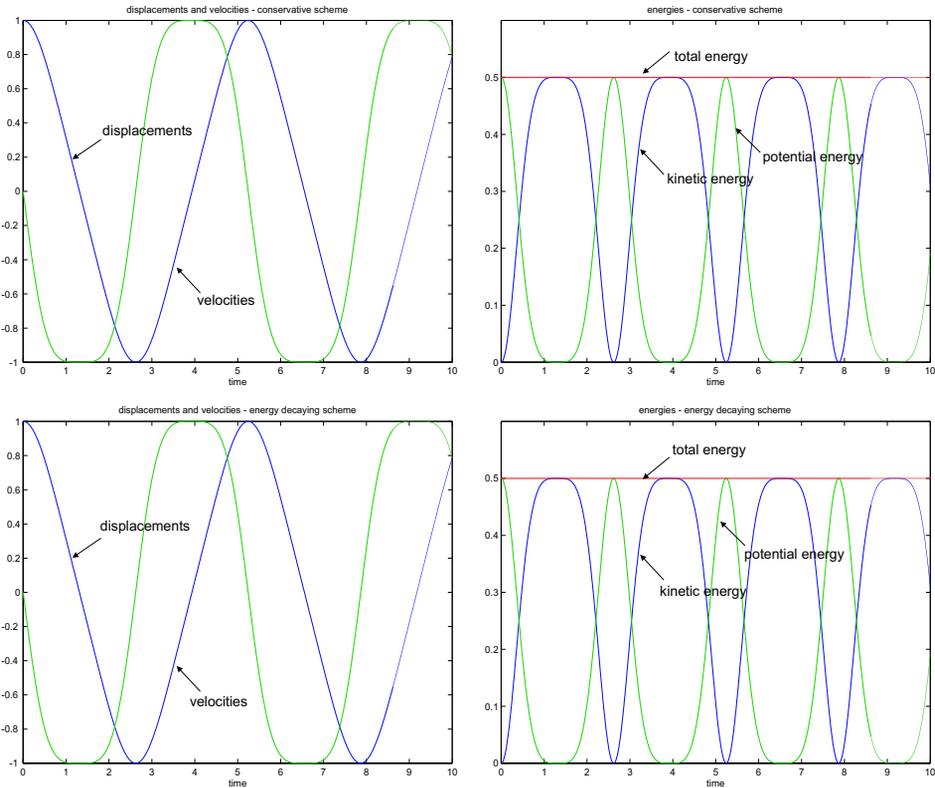


Figura 3: Respuestas del sistema masa-resorte no lineal: (a)desplazamientos y velocidades y (b) energías para el esquema conservativo; (c) desplazamientos y velocidades y (d) energías para el esquema disipativo

para el esquema conservativo. Para el caso disipativo reemplazamos en (29), de donde obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2}m[(x_{n+1} - x_j) - 2(x_j - x_n)] - \frac{1}{h}m\dot{x}_n + (x_{n+1} + x_j)\frac{k}{2}(x_{n+1}^2 + x_j^2) = 0 \\ & \frac{1}{h^2}m[(x_{n+1} - x_j) + 4(x_j - x_n)] - \frac{1}{h}m\dot{x}_n - \frac{1}{3}[(x_{n+1} + x_j)\frac{k}{2}(x_{n+1}^2 + x_j^2) - (x_j + x_n)kx_j^2] = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

La figura 3 muestra la respuesta del sistema para condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $\dot{x}_0 = 0$ y un paso de tiempo $h = 0,01$. Se muestran las evoluciones temporales de desplazamientos y velocidades (figuras 3-a y 3-c) y de la energía total del sistema (fig. 3-b y 3-d) para ambos esquemas. Como era previsible, la energía total del sistema se conserva de manera exacta

para el esquema conservativo. Vale remarcar que para un tiempo de aproximadamente 100 períodos, el decaimiento de la energía es del 0,01 % respecto de la energía total.

6.2. Péndulo Doble

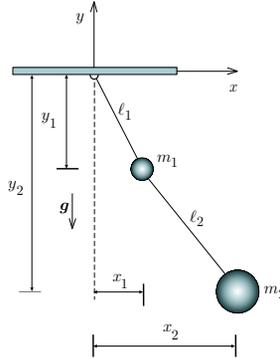


Figura 4: Péndulo Doble

El ejemplo que consideraremos ahora es el péndulo doble de la figura 4. Se trata de un sistema multicuerpos rígido con 4 grados de libertad, sujeto a dos restricciones cinemáticas. Los grados de libertad del sistema son

$$\mathbf{q}^T = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2] \tag{61}$$

y las energías cinética y potencial tienen la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ \mathcal{V} &= m_1gy_1 + m_2gy_2 \end{aligned} \tag{62}$$

Las restricciones cinemáticas son

$$\Phi = \left[\begin{array}{c} x_1^2 + y_1^2 - \ell_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell_2^2 \end{array} \right] \tag{63}$$

La matriz de masas y el vector velocidades:

$$\mathbf{M} = \text{diag} [m_1 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_2] \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \tag{64}$$

En este ejemplo la matriz \mathbf{L} es igual a la identidad y por lo tanto la matriz \mathbf{G} es nula. Los vectores de desplazamientos infinitesimales y de momento lineal tienen como expresión:

$$\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{q} \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M} \mathbf{v} \tag{65}$$

La energía potencial (62-b) genera el vector de fuerzas externas:

$$\mathbf{g}_{ext}^T = [0 \quad -m_1g \quad 0 \quad -m_2g] \quad (66)$$

La matriz Jacobiana de restricciones

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \end{bmatrix} \quad (67)$$

Reemplazando en (16), las ecuaciones discretas del movimiento resultan finalmente

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} \mathbf{M}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) - \frac{2}{h} \mathbf{M} \mathbf{v}_n + \mathbf{g}_{ext} + \mathbf{B}_{n+\frac{1}{2}}^T \boldsymbol{\lambda}_{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{0} \\ x_{1n+1}^2 + y_{1n+1}^2 - \ell_1^2 &= 0 \\ (x_{2n+1} - x_{1n+1})^2 + (y_{2n+1} - y_{1n+1})^2 - \ell_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (68)$$

para el esquema conservativo. Para el esquema disipativo, de (29) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \mathbf{M}[(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_j) - 2(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_n)] - \frac{1}{h} \mathbf{M} \mathbf{v}_n + \mathbf{g}_{ext} + \mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g &= \mathbf{0} \\ \frac{1}{h^2} \mathbf{M}[(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_j) + 4(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_n)] - \frac{1}{h} \mathbf{M} \mathbf{v}_n - \frac{1}{3}(\mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g - \mathbf{B}_h^T \boldsymbol{\lambda}_j) &= \mathbf{0} \\ x_{1j}^2 + y_{1j}^2 - \ell_1^2 &= 0 \\ (x_{2j} - x_{1j})^2 + (y_{2j} - y_{1j})^2 - \ell_2^2 &= 0 \\ x_{1n+1}^2 + y_{1n+1}^2 - \ell_1^2 &= 0 \\ (x_{2n+1} - x_{1n+1})^2 + (y_{2n+1} - y_{1n+1})^2 - \ell_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Los valores elegidos para los diferentes parámetros son $l_1 = 1$, $l_2 = 1$ y $g = 9,81$. Las condiciones iniciales son

$$\mathbf{x}_0^T = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1] \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_0^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (70)$$

En la figura 5 se muestran las respuestas de desplazamientos de ambos esquemas para el caso $m_1 = m_2 = 1$ y paso de tiempo $h = 0,001$. Puede verse que las respuestas son muy similares a pesar de la energía disipada por el esquema disipativo. Al variar la relación de masas (manteniendo $m_2 = 1$ y variando m_1), se observa el siguiente comportamiento: (a) para $m_1 = 0,005$ (relación de masas $r = 200$) y $h = 0,01$ el esquema conservativo no converge, en tanto que el disipativo sí; (b) para $r = 200$ y $h = 0,001$ el esquema conservativo converge pero presenta oscilaciones de origen numérico en las respuestas de velocidades y aceleraciones del tamaño del paso de tiempo (figura 6). Se puede ver en la figura 7-a como la respuesta de desplazamientos para el esquema conservativo es afectada por estas oscilaciones, mientras que con el esquema disipativo (fig. 7-b) la respuesta mejora. Vale citar que ambos casos de relación de masas $r = 200$ se probaron con el esquema HHT (software *Mecano*) sin lograr convergencia en ninguno de los dos casos. Nótese también que el decrecimiento de la energía es escalonado, coincidiendo con picos de aceleraciones, como se puede ver en la figura 8.

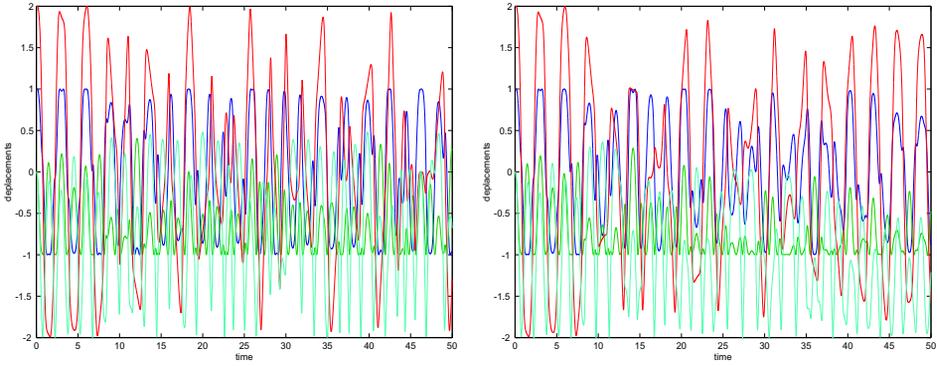


Figura 5: Respuesta de desplazamientos para ambos esquemas para $m_1 = m_2 = 1$ y $h = 0,001$

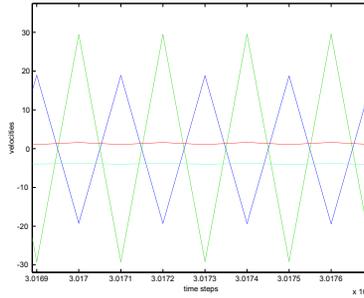


Figura 6: Oscilaciones de origen numérico para $m_1 = 0,005$, $m_2 = 1$ y $h = 0,001$

6.3. Trompo Simétrico en un Campo Gravitacional

El cuerpo se modela como un cuerpo rígido general con seis grados de libertad generalizados sujeto a tres restricciones cinemáticas (fig. 9). Adoptando el centro de masas como origen de coordenadas materiales, con posiciones instantáneas \mathbf{x} y su punto de fijación como origen de coordenadas espaciales, su energía cinética viene dada por

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} + m \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}}) \quad (71)$$

Asumiendo como referencia para la energía potencial el origen de coordenadas espaciales, la energía potencial del sistema se expresa como

$$\mathcal{V} = -m \mathbf{g}^T \mathbf{x} \quad (72)$$

donde \mathbf{g} es el vector de aceleración. Por ejemplo, si la gravedad actúa en la dirección del eje x_3 , $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -g]^T$ y $\mathcal{V} = +mgx_3$. Finalmente, identificamos con el vector $-\mathbf{X}_g$ la

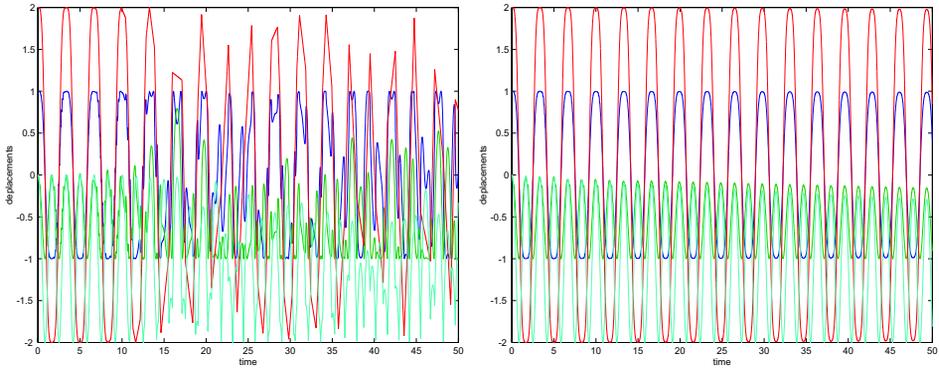


Figura 7: Respuesta de desplazamientos para ambos esquemas para $m_1 = 0,005$, $m_2 = 1$ y $h = 0,001$

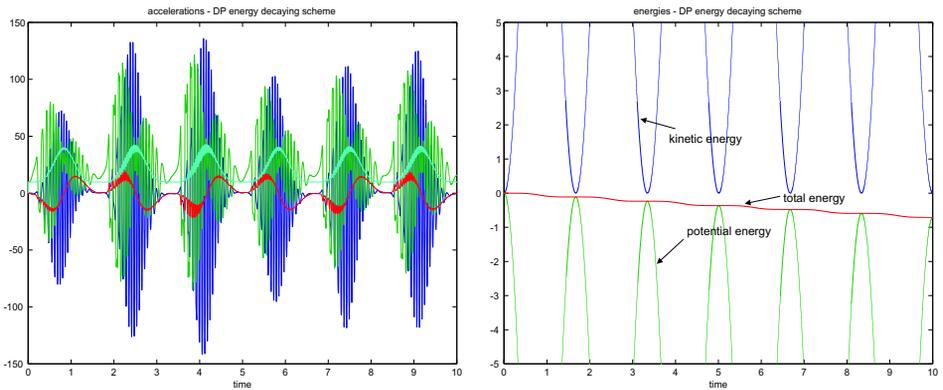


Figura 8: Esquema disipativo. Aceleraciones y detalle del decrecimiento de la energía para $r = 200$ en el arranque.

ubicación del punto de fijación del trompo en coordenadas materiales. Las restricciones cinemáticas son

$$\Phi = -\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (73)$$

Tenemos luego la matriz de masas y el vector de velocidades

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \end{bmatrix} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} \quad (74)$$

El vector de desplazamientos infinitesimales en traslación y rotación se expresa como

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\boldsymbol{\Psi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} = \mathbf{L}\delta\mathbf{q} \quad (75)$$

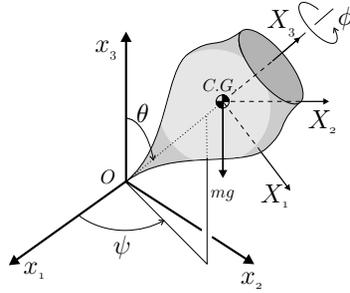


Figura 9: Trompo simétrico

El vector de momentos generalizados se descompone en momentos lineal y angular

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (76)$$

La energía potencial (72) debida a la gravedad depende sólo del movimiento de traslación y genera un vector de fuerzas externas

$$-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} m\mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (77)$$

Realizando la variación de las restricciones cinemáticas tenemos

$$\delta \boldsymbol{\Phi} = -\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{R} \mathbf{X} = - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \widetilde{\mathbf{R} \mathbf{X}} \end{bmatrix} \delta \mathbf{w} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q} \quad (78)$$

con el Jacobiano de la matriz de restricciones

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \widetilde{\mathbf{X} \mathbf{R}^T} \end{bmatrix}^T \mathbf{L} \quad (79)$$

Finalmente, la matriz \mathbf{G} contribuye sólo al movimiento de rotación y, debido a las propiedades específicas del operador tangente de rotaciones finitas, se simplifica en

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{L}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\widetilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \mathbf{L} \quad (80)$$

Si adoptamos parámetros de Euler, el operador \mathbf{F} puede escribirse como (51) y con las aproximaciones hechas en (52), el salto de parámetros de rotación en un paso de tiempo es

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \\ 2\mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (81)$$

y el operador tangente \mathbf{L} en el punto medio se expresa como

$$\mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (82)$$

Debido a la parametrización adoptada, tenemos que la matriz Jacobiana de restricciones evaluada en el punto medio coincide con la derivada direccional discreta (21) y tiene como expresión

$$\mathbf{B}_{n+\frac{1}{2}}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ 2\widetilde{\mathbf{X}}_g \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^T \end{bmatrix} \quad (83)$$

Finalmente de acuerdo con (80) la matriz \mathbf{G} sólo contribuye al movimiento de rotación dando

$$\mathbf{G}_{n+\frac{1}{2}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 4\widetilde{\mathbf{h}}_{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (84)$$

De manera análoga podemos escribir las expresiones discretas para los intervalos $[t_{n+1}, t_j]$ y $[t_j, t_n]$ del esquema disipativo

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_j \\ 2\mathbf{e}_g \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_n \\ 2\mathbf{e}_h \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\mathbf{L}_g = \mathbf{L}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\mathbf{B}_g^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ 2\widetilde{\mathbf{X}}_g \mathbf{R}_g^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_h^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ 2\widetilde{\mathbf{X}}_h \mathbf{R}_h^T \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\mathbf{G}_g = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 4\widetilde{\mathbf{h}}_g \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_h = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 4\widetilde{\mathbf{h}}_h \end{bmatrix} \quad (88)$$

Particularizando las ecuaciones de equilibrio (16) para el caso conservativo y las (29) para el disipativo al movimiento del trompo, y desacoplando los movimientos de traslación y rotación, llegamos al siguiente conjunto de ecuaciones discretas

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} m(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) - \frac{2}{h} m \mathbf{v}_n - \boldsymbol{\lambda}_{n+\frac{1}{2}} &= m \mathbf{g} \\ \frac{8}{h^2} \mathbf{J} \mathbf{e} - \frac{4}{h} \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_n + \frac{8}{h^2} \widetilde{\mathbf{e}} \mathbf{J} \mathbf{e} + 2\widetilde{\mathbf{X}}_g \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^T \boldsymbol{\lambda}_{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{X} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (89)$$

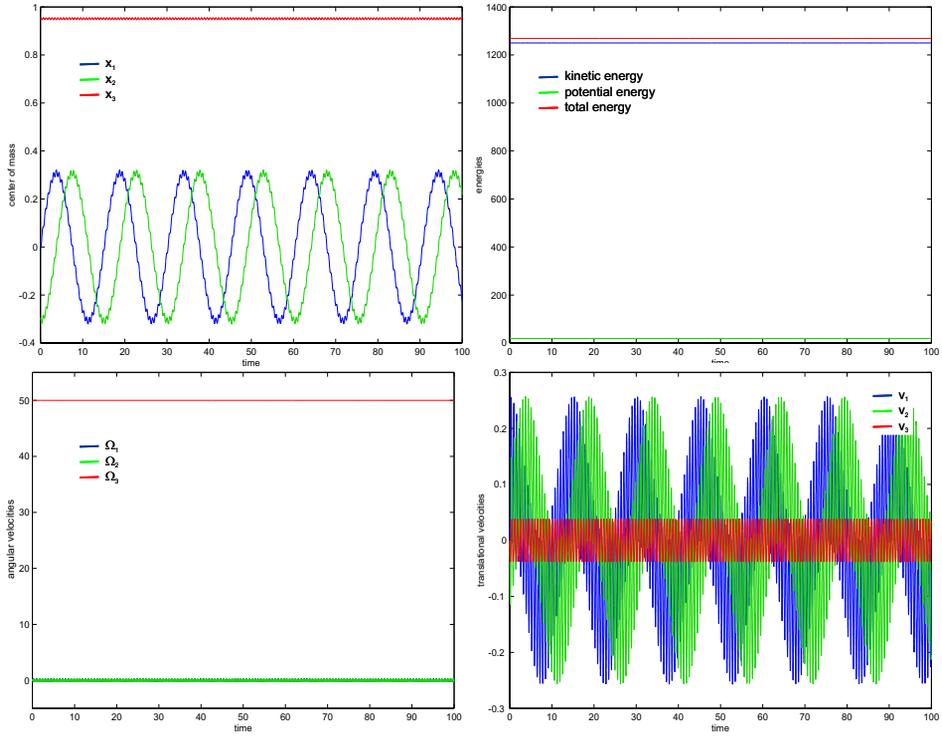


Figura 10: Respuestas del trompo para el esquema conservativo: (a) posición del centro de masas, (b) energías, (c) velocidad angular y (d) velocidad de traslación

para el esquema conservativo, y

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h^2} m [(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_j) - 2(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_n)] - \frac{1}{h} m \mathbf{v}_n - \boldsymbol{\lambda}_g = m \mathbf{g} \\
 & \frac{1}{h^2} m [(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_j) + 4(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_n)] - \frac{2}{h} m \mathbf{v}_n + \frac{1}{3} \boldsymbol{\lambda}_g - \frac{1}{3} \boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{0} \\
 & \frac{4}{h^2} \mathbf{J}(\mathbf{e}_g - 2\mathbf{e}_h) - \frac{2}{h} \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_n + 2 \widetilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g - \frac{4}{h} \widetilde{\mathbf{J}} \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_g (\mathbf{e}_g + \mathbf{e}_h) = \mathbf{0} \\
 & \frac{4}{h^2} \mathbf{J}(\mathbf{e}_g + 4\mathbf{e}_h) - \frac{2}{h} \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_n - \frac{2}{3} \widetilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}_g^T \boldsymbol{\lambda}_g + \frac{2}{3} \widetilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}_h^T \boldsymbol{\lambda}_j - \frac{4}{h} \widetilde{\mathbf{J}} \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_h \mathbf{e}_h = \mathbf{0} \\
 & \quad \quad \quad -\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{X} = \mathbf{0} \\
 & \quad \quad \quad -\mathbf{x}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{X} = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{90}$$

Tomemos como ejemplo un trompo simétrico con las siguientes propiedades: tensor de inercia $J_{11} = 5$, $J_{22} = 5$ y $J_{33} = 1$ evaluado desde el punto de fijación O , distancia del centro de masas al punto de fijación $L = 1$, gravedad $g = 9,81$ en la dirección negativa del eje x_3 y masa m tal que $mgL = 20$. La posición inicial del trompo en función de los ángulos de Euler es $\phi_0 = 0$, $\theta_0 = 0,3$, $\psi_0 = 0$. El trompo se suelta de su posición inicial con una velocidad de rotación sobre su eje de 50 rad/s. En las figuras 10 y 11 se

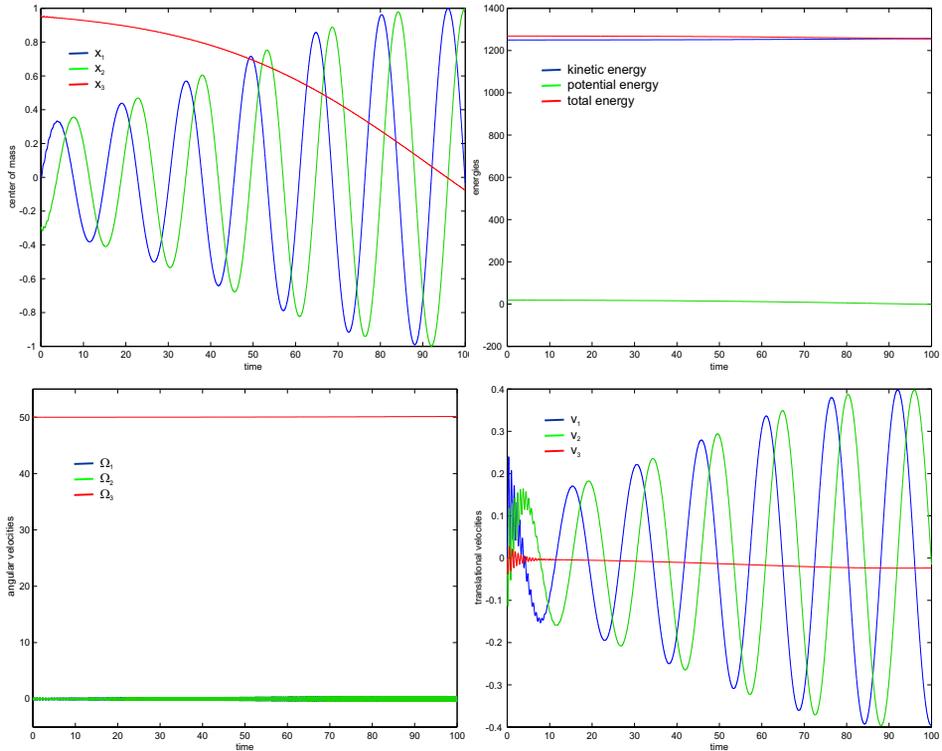


Figura 11: Respuestas del trompo para el esquema disipativo: (a) posición del centro de masas, (b) energías, (c) velocidad angular y (d) velocidad de traslación

muestran las respuestas calculadas para ambos esquemas para un paso de tiempo fijo de $h = 0,001$ a través de la evolución temporal de (a) la posición del centro de masas, (b) las energías cinética, potencial y total del sistema, (c) la velocidad angular y (d) la velocidad de traslación. Para el esquema conservativo, la energía total del sistema se conserva de acuerdo a lo esperado, debido al diseño del algoritmo. Todas las evoluciones temporales de la figura 10 muestran además que el carácter periódico es perfectamente conservado,

lo que puede verse como consecuencia directa de la propiedad de conservación de la energía. Para el esquema disipativo observamos un decaimiento excesivo de la respuesta en desplazamientos del trompo, no así de las demás respuestas. Es más, puede verse que la energía cinética y la velocidad angular presentan un crecimiento. El algoritmo responde bien ante la presencia de grandes rotaciones. En la figura 12 vemos la trayectoria del centro de masas del trompo para ambos esquemas.

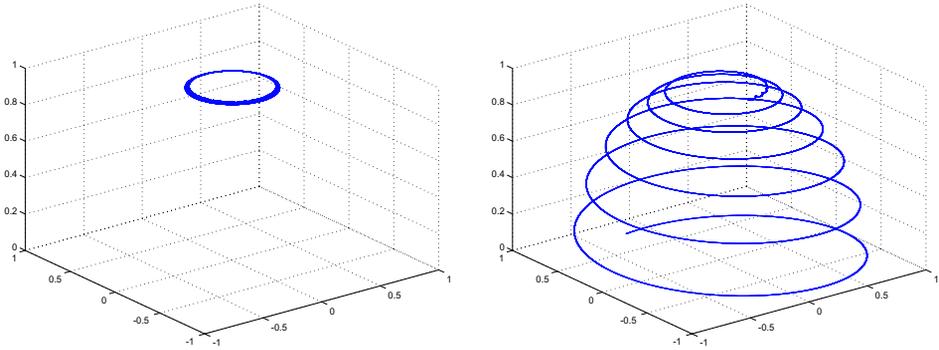


Figura 12: Respuesta del trompo para ambos esquemas: trayectorias del centro de masas (a) caso conservativo y (b) caso disipativo

7. CONCLUSIONES

Los métodos de integración que garantizan conservación de la energía representan una solución efectiva para la integración temporal de ecuaciones DAE de segundo orden, ya que proveen una forma natural de evitar la inestabilidad originada por la no linealidad del sistema y las restricciones cinemáticas. Pero ante la presencia de oscilaciones de origen numérico (por ejemplo debidas a un mal condicionamiento de la matriz de masas como en el caso del péndulo doble) la convergencia de la solución puede verse comprometida. Un aspecto a estudiar es la implementación de un parámetro que permita regular la cantidad de energía disipada.

Es importante remarcar que con la parametrización adoptada en este trabajo, la *derivada direccional discreta* de la matriz Jacobiana de restricciones coincide con la matriz Jacobiana de restricciones evaluada en el punto medio del intervalo para una gran variedad de restricciones holónomicas (para más detalles véase Lens y Cardona⁴). Además la matriz L en el punto medio del intervalo resulta constante, lo que simplifica los cálculos.

REFERENCIAS

- [1] A. Cardona. *An Integrated Approach to Mechanism Analysis*. PhD thesis, Faculté des Sciences Appliquées, Université of Liège, Belgique, (1989).

- [2] J. Chung and G. M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized α method. *Journal of Applied Mechanics*, **60**, 371–375 (1993).
- [3] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
- [4] E. Lens y A. Cardona. Integración temporal con conservación de la energía para sistemas multicuerpos con restricciones. SEMNI, España, (2002).
- [5] M. Géradin and A. Cardona. *Flexible Multibody Dynamics: a Finite Element Approach*. John Wiley & Sons Ltd, (2000).
- [6] O. Gonzalez. Mechanical systems subject to holonomic constraints: differential-algebraic formulations and conservative integration. *Physica D*, **132**, 165–174 (1999).