

## APLICAÇÃO DAS BASES DE KARHUNEN-LOÈVE A SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Rubens Sampaio\*, Claudio Wolter\*, and Marcelo A. Trindade\*

\*Departamento de Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
rua Rua Marquês de São Vicente 225, CEP 22453-900, Rio de Janeiro - RJ, Brasil  
e-mail: rsampaio@mec.puc-rio.br, web page: <http://www.mec.puc-rio.br>

**Key Words:** Expansão de Karhunen-Loève, análise modal, sistemas de vibroimpacto.

**Abstract.** *A expansão ou decomposição de Karhunen-Loève, também conhecida na literatura como decomposição ortogonal própria, trata-se de uma poderosa técnica espectral para análise e síntese de sistemas dinâmicos. Ela consiste em decompor um tensor autocorrelação espacial, o qual pode ser gerado através de simulações numéricas ou diretamente calculado de dados experimentais, neste caso sem qualquer conhecimento a priori sobre o sistema. A decomposição deste tensor produz autofunções chamadas de modos empíricos ou modos ortogonais próprios os quais formam uma base ortonormal, onde a dinâmica pode ser projetada, levando a uma redução ótima da dimensão do sistema. Os autovalores associados às autofunções fornecem uma medida da energia contida no respectivo modo empírico. Também deve-se ressaltar que a expansão de Karhunen-Loève possui a importante propriedade de ser uma expansão ótima, significando que, dado um mesmo número de modos, nenhuma outra decomposição linear é capaz de melhor representar aquela particular dinâmica que a gerou. Historicamente, ela começou a ser utilizada no estudo de escoamentos turbulentos e acabou permanecendo por muito tempo confinada ao âmbito da Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor. Entretanto, recentemente, ela começou a atrair a atenção da comunidade científica envolvida com dinâmica estrutural. O propósito do presente trabalho é apresentar toda a teoria envolvida na expansão com um enfoque voltado para a Mecânica dos Sólidos e aplicá-la a um sistema não-linear de vibroimpacto, discutindo suas vantagens e desvantagens.*

## 1 INTRODUÇÃO

A expansão ou decomposição de Karhunen-Loève (KL) surgiu na literatura de processamento de sinais, onde é costumeiramente chamada de análise de componentes principais. É uma poderosa ferramenta estatística para análise e compressão de dados. Posteriormente, encontraram-se muitas outras aplicações úteis como reconhecimento de voz e imagens. Em Engenharia Mecânica, onde também é conhecida como decomposição ortogonal própria (POD), ela foi, inicialmente, empregada na descrição de estruturas coerentes em escoamentos turbulentos [1]. Estruturas coerentes podem ser definidas como formas espaciais recorrentes no tempo e que são energeticamente dominantes [2]. Desde então, ela tem sido consistentemente empregada em problemas de dinâmica de fluidos [3]. Entretanto, apenas recentemente, a expansão passou a atrair a atenção daqueles trabalhando em dinâmica estrutural e que buscam abordagens alternativas para obtenção de modelos de ordem reduzida de sistemas dinâmicos lineares ou não-lineares [4, 5].

O método KL é, primariamente, um procedimento estatístico. Ele consiste na construção de um tensor autocorrelação espacial a partir de dados obtidos de experimentos físicos ou simulações numéricas e na realização da decomposição espectral deste tensor. Como o método lida apenas com dados, não há distinção entre sistemas lineares ou não-lineares. O tensor autocorrelação é, por definição, Hermitiano e positivo semi-definido. Portanto, sua decomposição provê um conjunto de autofunções ortogonais (chamadas de modos próprios ortogonais, POMs, ou modos empíricos) e autovalores reais não negativos (ou valores próprios ortogonais, POVs, ou autovalores empíricos). Estes POMs podem ser, então, usados como uma base para a projeção da dinâmica e na construção de um modelo reduzido, através da retenção de um número finito deles, juntamente com o método de Galerkin. Uma propriedade importante da expansão é que a magnitude de um POV é uma medida da energia contida no respectivo POM.

A relação entre POMs e modos de vibração de sistemas estruturais lineares foi mostrada em [6]. Neste presente artigo será estudado um sistema de vibroimpacto linear por partes, consistindo de uma viga em balanço cujo deslocamento transversal é limitado por batentes elásticos. Apesar de haver sistemas em engenharia em que impactos são parte do projeto [7], na maioria das vezes, este fenômeno relaciona-se com desgaste, fadiga e ruído [8]. O interesse em sistemas de vibroimpacto surge de sua característica não-linear a qual previne seu estudo através de métodos ortodoxos como análise modal. Na realidade, sistemas deste tipo possuem comportamento dinâmico complexo, algumas vezes até caótico [7, 9, 10]. Por isso, são, normalmente, estudados com diagramas de bifurcação e mapas de Poincaré. A maioria dos sistemas de vibroimpacto estudados até agora são simples, com um grau de liberdade [7]. Supõe-se que a flexibilidade de uma estrutura terá importante papel em sua resposta ao impacto, através da excitação de muitos dos seus graus de liberdade. O objetivo deste trabalho será analisar a dinâmica do sistema através da expansão KL, comparar os POMs obtidos com os modos de vibração do sistema linear associado e contruir um modelo reduzido via projeção de Galerkin.

## 2 A DECOMPOSIÇÃO DE KARHUNEN-LOÈVE

Seja  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  a variável de estado a qual define o campo vetorial que descreve a dinâmica de um sistema, em um domínio espacial  $\mathcal{D}$  e em um intervalo de tempo  $T = [0, \infty)$ .

### 2.1 Hipóteses principais

Para se definir o tensor autocorrelação do campo, é necessário modelá-lo como um processo estocástico de segunda ordem. Entretanto, é desejável evitar-se as descrições matemáticas do espaço de amostras, da  $\sigma$ -álgebra e da medida de probabilidade associadas ao campo. Uma grande vantagem desta metodologia é que tais descrições são desnecessárias, embora duas hipóteses adicionais façam-se necessárias: o campo é suposto como sendo estacionário no sentido estrito com relação ao parâmetro temporal e ergódico [11].

Seja  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  a variação com relação ao campo médio, i.e.,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - E[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]. \quad (1)$$

Logo,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  é um processo estocástico com média zero e, conseqüentemente, seu tensor autocorrelação iguala-se ao seu tensor autocovariância [12]. Se  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  é real, então a função autocorrelação espacial é definida pelo produto diádico

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}', t)]. \quad (2)$$

Uma hipótese final com relação aos campos  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  é que eles são contínuos na média quadrática, implicando na continuidade do tensor autocorrelação  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , em seu domínio espacial [11].

### 2.2 Redução de modelos

A fim de se encontrar um modelo de ordem reduzida do campo que ainda assim revele as principais características dinâmicas, pode-se procurar por uma expansão da forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_n A_n(t) \psi_n(\mathbf{x}), \quad (3)$$

com

$$E[A_k(t)A_l(t)] = \lambda_k \delta_{kl}, \quad (4)$$

i.e., os modos são descorrelatados e

$$\langle \psi_k, \psi_l \rangle = \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^N \psi_{k_j}(\mathbf{x}) \psi_{l_j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{kl}, \quad (5)$$

significando que o conjunto  $\{\psi_n\}$  é ortonormal e  $N = \dim \mathbf{v}$ . Inserindo-se a Eq. (3) na Eq. (2) e usando-se a relação dada em (4), obtém-se

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_n \lambda_n \psi_n(\mathbf{x}) \otimes \psi_n(\mathbf{x}'). \quad (6)$$

Como, por definição e de acordo com as hipóteses,  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  é positiva semi-definida, Hermitiana e contínua em  $\mathcal{D}$ , o Teorema de Mercer [11] garante a existência e unicidade da representação espectral de  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  dada pela Eq. (6), onde os elementos pertencentes ao conjunto ortonormal  $\{\psi_n\}$  são as autofunções do operador integral com núcleo  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  e o conjunto  $\{\lambda_n\}$  é formado pelos autovalores reais e não negativos, de maneira que

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi_n(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda_n \psi_n(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Então, o Teorema de Karhunen-Loève [11] diz que um processo estocástico com tensor autocovariância  $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  pode ser expandido em uma série análoga à (3), sendo  $\{\psi_n\}$  as autofunções do operador integral com núcleo  $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  e  $\{\lambda_n\}$  os autovalores correspondentes. Como para  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  a função autocovariância iguala-se à autocorrelação, prova-se que a expansão definida na Eq. (3) é realizável. O conjunto  $\{\psi_n\}$  é formado pelos POMs, também chamados de estruturas coerentes.

O campo original  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  pode, portanto, ser reconstruído com dimensão reduzida através do truncamento da série (3) e subseqüente adição do campo médio:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N A_n(t) \psi_n(\mathbf{x}) + E[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)], \quad (8)$$

sendo que os coeficientes temporais  $A_n$  são facilmente obtidas da projeção do campo em cada POM  $\psi_n$ , ou seja,

$$A_n(t) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \psi_n \rangle. \quad (9)$$

Finalmente, os autovalores podem ser escritos, usando-se a hipótese de ergodicidade, como

$$\lambda_n = \langle \psi_n, \mathbf{R} \psi_n \rangle = E[|\langle \psi_n, \mathbf{v} \rangle|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle \psi_n, \mathbf{v} \rangle|^2 dt, \quad (10)$$

indicando que são uma medida da energia média contida em cada modo. Além disso, pode-se mostrar que a energia total é igual à soma de todos os autovalores, isto é,  $E = \sum_n \lambda_n$  [3].

### 3 CONSTRUÇÃO PRÁTICA DOS POMS

Como anteriormente mencionado, há dois métodos práticos para a construção da expansão KL, o original método direto e o mais recente método dos retratos (*snapshot*). O direto é o usado neste artigo e, por isso, é brevemente descrito abaixo.

Neste método, os deslocamentos de um sistema dinâmico são medidos ou calculados em  $N$  posições e denotados por  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$ . Amostrando estes deslocamentos  $M$  vezes, pode-se formar a seguinte matriz de amostragem  $M \times N$ :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_N] = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & \dots & u_N(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & \dots & u_N(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t_M) & u_2(t_M) & \dots & u_N(t_M) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Logo, usando-se as hipóteses de estacionariedade e ergodicidade, a variação com relação à média pode ser calculada como

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} - \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M u_1(t_i) & \sum_{i=1}^M u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M u_N(t_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^M u_1(t_i) & \sum_{i=1}^M u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M u_N(t_i) \end{bmatrix} \quad (12)$$

e a matriz de autocorrelação espacial de dimensão  $N \times N$  formada segundo

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \mathbf{V}^T \mathbf{V}. \quad (13)$$

Os POMs são, então, dados pelos autovetores de  $\mathbf{R}$ , os quais são mutuamente ortogonais devido à sua simetria. Os autovalores serão os POVs. Obviamente, a dimensão da matrix é determinada pelo número de instantes de amostragem  $N$ . Para um campo tridimensional, i.e.  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ , o número de operações necessárias para a diagonalização de  $\mathbf{R}$  é  $O(N^3)$  [13].

#### 4 MODELAGEM DO SISTEMA DE VIBROIMPACTO

Considere a viga de aço em balanço mostrada na Fig. 1. Seu deslocamento transversal está limitado a partir de sua extremidade por dois batentes com 50 mm de comprimento situados a uma distância  $\epsilon$  das superfícies superior e inferior da viga. A tabela 1 lista as dimensões da viga.

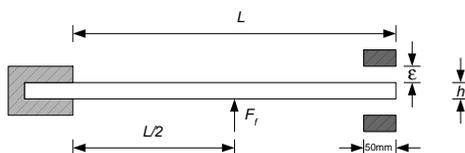


Figura 1: Sistema de vibroimpacto.

Comprimento	$L = 510 \text{ mm}$
Espessura	$h = 5,25 \text{ mm}$
Largura	$b = 24,85 \text{ mm}$
Área da seção reta	$A = 1,3046 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Momento de inércia da seção reta	$I = 2,9966 \times 10^{-10} \text{ m}^4$
Distância entre a viga e os batentes	$\epsilon = 5 \text{ mm}$

Tabela 1: Propriedades geométricas da viga

A modelagem dos batentes foi feita através de uma discretização que considera a existência de uma mola linear a cada espaço de 0,1 mm, de forma que a equação de movimento forçado do

sistema, desconsiderando-se, inicialmente, o amortecimento estrutural, é dada segunda a teoria de Euler-Bernoulli por [14]:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = F_f \sin(\omega_f t) \delta(x - x_f) + \sum_{i=1}^N F_{ci}(t) \delta(x - x_{ci}), \quad (14)$$

sendo  $F_f$  a amplitude do forçamento senoidal aplicado no meio da viga,  $\omega_f$  sua freqüência,  $x_f = L/2$  sua posição,  $x_{ci}$  as posições onde os batentes foram discretizados e, portanto, onde considera-se a existência das molas (neste caso  $x_{ci} = \{460; 460, 1; \dots 510\}$  mm), e  $F_{ci}$  as respectivas forças produzidas pelas molas em razão do choque da viga e que assumem os valores

$$F_{ci}(t) = \begin{cases} 0, & |u(x_{ci}, t)| \leq \varepsilon; \\ -k [u(x_{ci}, t) - \varepsilon \operatorname{sign}(u(x_{ci}, t))], & |u(x_{ci}, t)| > \varepsilon, \end{cases} \quad (15)$$

com  $k$  representando a constante elástica das molas que foi suposta igual a  $10^9$  N/m.

#### 4.1 Método de Galerkin

O método de Galerkin consiste em um método de discretização de equações diferenciais parciais que pode ser classificado genericamente como um método de resíduos ponderados [15]. A equação de movimento do sistema de vibroimpacto (14) pode ser reescrita de forma mais geral como

$$D(w(x,t)) - F(x,t) = 0, \quad (16)$$

sendo

$$D(w(x,t)) = EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

e

$$F(x,t) = F_f \sin(\omega_f t) \delta(x - x_f) + \sum_{i=1}^N F_{ci}(t) \delta(x - x_{ci}).$$

Baseado na abordagem de separação de variáveis, o método de Galerkin aproxima a solução exata  $w(x,t)$  pela série

$$\hat{w}(x,t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i(x), \quad (17)$$

sendo  $\phi_i(x)$  funções espaciais chamadas de funções de aproximação que serão supostas possuindo certas formas e atendendo às condições de contorno e  $q_i(t)$  coordenadas temporais.

Para o caso do presente sistema de vibroimpacto, foram tomados como funções de aproximação para o método de Galerkin os dez primeiros modos de vibração de uma viga em balanço, ou seja [16],

$$\phi_i(x) = \cosh \beta_i x - \cos \beta_i x - \frac{\sinh \beta_i L - \sin \beta_i L}{\cosh \beta_i L + \cos \beta_i L} (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x) \quad (18)$$

sendo  $\beta_i$  uma solução apropriada da equação

$$\cos \beta L \cosh \beta L = 1. \tag{19}$$

Obviamente, estes modos de vibração, por serem autofunções do operador auto-adjunto associado ao problema de vibração livre da viga em balanço, são ortogonais aos pares.

### 4.2 Amortecimento

Fatores de amortecimento modais foram, então, introduzidos na equação discretizada. Os seis primeiros foram calculados a partir da resposta em frequência medida experimentalmente em uma viga idêntica à descrita acima. Foi utilizado um martelo de impacto aplicado no centro da viga e sua resposta medida com um acelerômetro na extremidade livre, conforme a montagem experimental esquematizada na Fig. 2.

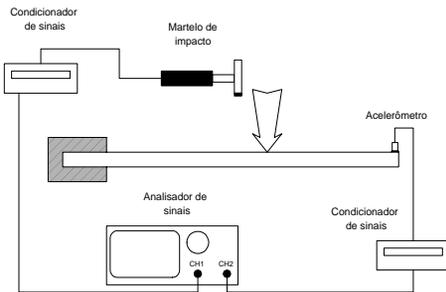


Figura 2: Esquema da montagem experimental.

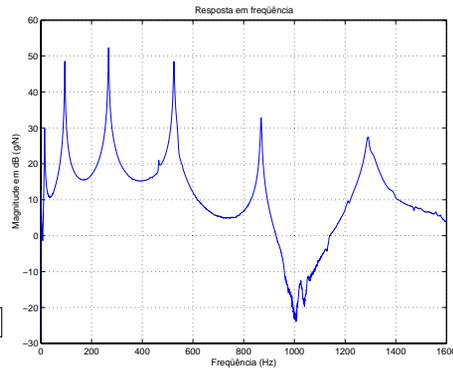


Figura 3: Resposta em frequência para viga da Fig. 1.

A resposta em frequência obtida é mostrada na Fig. 3. O cálculo dos fatores de amortecimento foi baseado na fórmula [16]:

$$\zeta_i = \frac{\omega_{bi} - \omega_{ai}}{2\omega_{di}}, \tag{20}$$

sendo  $\omega_{di}$  a frequência correspondente a cada pico ressonante e  $\omega_{ai}$  e  $\omega_{bi}$  as frequências imediatamente anterior e posterior, respectivamente, correspondentes a uma amplitude da resposta em frequência igual à do pico menos 3 dB. Os seis fatores de amortecimento assim calculados são mostrados na tabela 2. Os quatro fatores seguintes foram supostos iguais a 0,003.

### 4.3 Simulação

A viga foi submetida a um forçamento harmônico aplicado em seu ponto médio com amplitude de 140 N e frequência de 100 rad/s, ligeiramente inferior à primeira frequência natural da

$\zeta_1 = 0,0461$
$\zeta_2 = 0,0084$
$\zeta_3 = 0,0039$
$\zeta_4 = 0,0028$
$\zeta_5 = 0,0023$
$\zeta_6 = 0,0063$

Tabela 2: Fatores de amortecimento modais para a viga em balanço.

viga, como mostra a tabela 3. O sistema discreto foi resolvido usando-se a função ode45 do MATLAB® de forma a se encontrar os coeficientes modais  $q_i(t)$  da Eq. (17) e, conseqüentemente, a resposta aproximada  $\hat{w}(x, t)$ .

$\omega_1 = 103,74 \text{ rad/s}$
$\omega_2 = 650,13 \text{ rad/s}$
$\omega_3 = 1820,38 \text{ rad/s}$
$\omega_4 = 3567,21 \text{ rad/s}$
$\omega_5 = 5896,86 \text{ rad/s}$
$\omega_6 = 8808,89 \text{ rad/s}$
$\omega_7 = 12303,32 \text{ rad/s}$
$\omega_8 = 16380,16 \text{ rad/s}$
$\omega_9 = 21039,41 \text{ rad/s}$
$\omega_{10} = 26281,07 \text{ rad/s}$

Tabela 3: Freqüências naturais correspondentes aos dez modos usados no método de Galerkin para discretização da EDP.

A Fig. 4 mostra a simulação obtida para a extremidade livre da viga, isto é,  $\hat{w}(L, t)$ , no intervalo de 0 a 0,07 s. As curvas em azul indicam o deslocamento dos pontos nas superfícies superior e inferior da viga, enquanto as linhas vermelhas delimitam a posição dos batentes.

Observa-se, claramente, a existência de oscilações de alta freqüência na viga. Na realidade, o início do seu movimento tem a forma, praticamente, do primeiro modo de vibração, uma vez que a freqüência de excitação é muito próxima da ressonância. Entretanto, após acontecer o primeiro choque da viga com o batente e devido à flexibilidade do sistema, há uma excitação generalizada de todos os modos. Estas novas oscilações de alta freqüência acabam por ter como resultado uma série de impactos em intervalos de tempo extremamente pequenos. Estes microimpactos mostrados na Fig. 5 adicionam ainda mais complexidade à dinâmica do sistema.

## 5 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO

A fim de se calcularem os modos empíricos para este problema, a dinâmica da viga foi simulada até um tempo final de 30 s. Foram amostrados pontos ao longo do domínio espacial da viga separados por 1 mm e o intervalo de amostragem usado foi de 0,03 s, totalizando, portanto

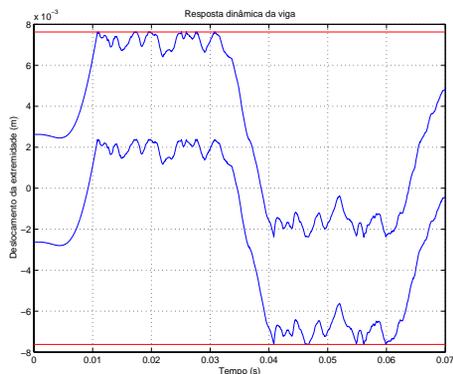


Figura 4: Resposta dinâmica da extremidade livre da viga para uma excitação harmônica com amplitude de 140 N e frequência de 100 rad/s.

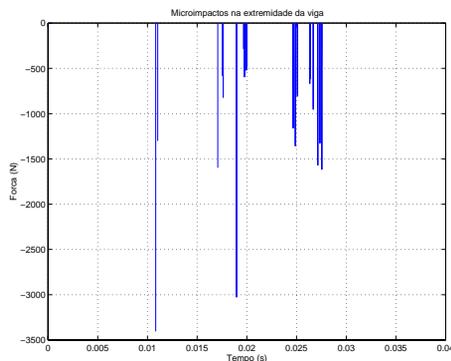


Figura 5: Microimpactos na extremidade da viga.

1000 amostras temporais. Deve-se notar que o requisito de um intervalo maior que o primeiro período de vibração como discutido em [17] pode ser um pouco relaxado neste caso, já que os impactos têm a propriedade de descorrelatar os dados. A KLE foi, então, obtida através do método direto.

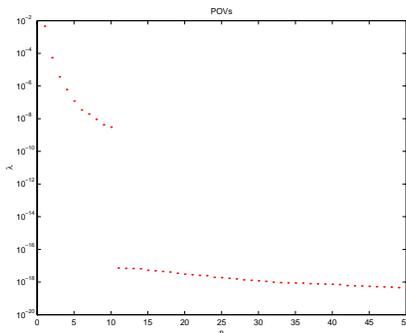


Figura 6: POVs obtidos para o problema de vibroimpacto e mostrados em escala semilogarítmica. Note que só há 10 POVs com significado físico.

A Fig. 6 mostra os 50 primeiros POVs. Como a energia está muito concentrada no primeiro deles (ver tabela 4), optou-se por mostrá-los em escala semilogarítmica. Fica claro da figura que apenas os 10 primeiros POMs terão significado físico, visto que os POVs correspondentes aos demais encontram-se abaixo da precisão numérica do MATLAB®. Esta é uma consequência direta de terem sido usados apenas 10 modos de vibração na aproximação via Galerkin e não é

de se esperar em um sistema de vibroimpacto real.

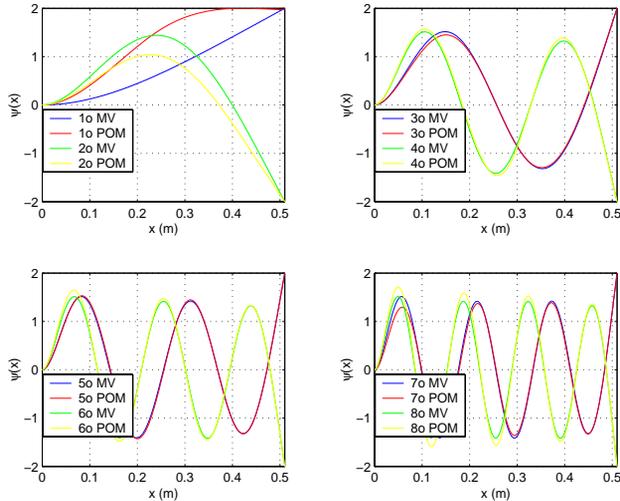


Figura 7: Comparação entre os oito primeiros modos empíricos e os modos de vibração para o sistema de vibroimpacto.

Já a Fig. 7 ilustra os oito primeiros modos empíricos encontrados para o sistema, assim como os oito primeiros modos de vibração. Nota-se que o primeiro POM difere significativamente do primeiro modo de vibração, refletindo claramente a influência que o batente tem sobre a dinâmica do sistema. O segundo POM ainda apresenta alguma diferença, porém os demais POMs são praticamente indistinguíveis dos respectivos modos de vibração, indicando que não foram afetados pela restrição física imposta pelo batente.

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 0,987 \\
 \lambda_2 &= 0,0117 \\
 \lambda_3 &= 7,85 \times 10^{-4} \\
 \lambda_4 &= 1,31 \times 10^{-4} \\
 \lambda_5 &= 2,61 \times 10^{-5} \\
 \lambda_6 &= 7,41 \times 10^{-6} \\
 \lambda_7 &= 4,13 \times 10^{-6} \\
 \lambda_8 &= 1,98 \times 10^{-6} \\
 \lambda_9 &= 9,21 \times 10^{-7} \\
 \lambda_{10} &= 6,55 \times 10^{-7}
 \end{aligned}$$

Tabela 4: Dez primeiros POVs normalizados.

A projeção da dinâmica nos POMs fornece-nos os coeficientes temporais que completam a expansão da parcela correspondente à variação em torno da média. A Fig. 8 mostra os oito primeiros coeficientes temporais correspondentes aos modos empíricos da Fig. 7.

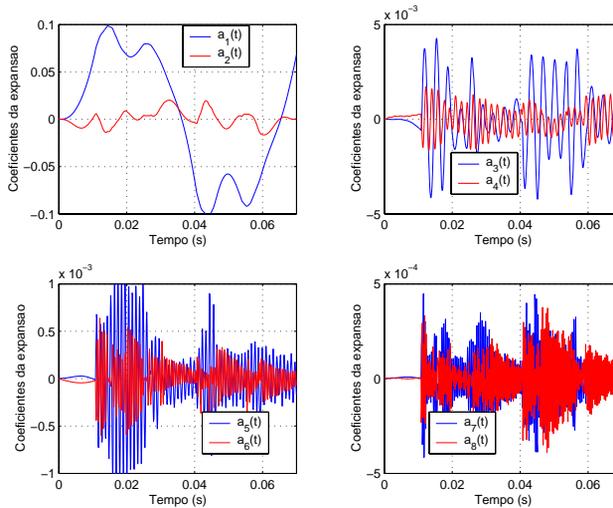


Figura 8: Oito primeiros coeficientes temporais da expansão de Karhunen-Loève para o problema de vibroimpacto.

É interessante notar que, logo no início, apenas os dois primeiros POMs respondem pela dinâmica. Entretanto, após o primeiro impacto, todos os outros modos são excitados. Além disso, os microimpactos seguintes parece ter a função de redistribuir a energia pelos POMs continuamente.

Finalmente, procedeu-se a reconstrução da dinâmica segundo a expansão de Karhunen-Loève. A Fig. 9 mostra esta reconstrução usando-se de 1 até 3 POMs. Observa-se que, apesar do primeiro POM ter quase 99 % da energia, uma reconstrução usando apenas este modo é muito pouco precisa. Todavia, com apenas 3 POMs consegue-se uma excelente precisão na reconstrução da dinâmica. Este resultado leva a crer que deve ser possível construir um modelo reduzido para o sistema usando-se um número pequeno de POMs como funções de aproximação no método de Galerkin. Isto será feito na próxima seção. Também foi investigada a robustez dos POMs na representação de dinâmicas diferentes daquela usada para seu cálculo. A Fig. 10 mostra o desempenho dos POMs na representação de uma dinâmica idêntica à original com exceção da distância entre as superfícias da viga e os batentes que foi dobrada para  $\epsilon = 10$  mm. Já a Fig. 11 apresenta o mesmo resultado para uma viga sujeita a um forçamento com frequência cinco vezes maior, ou seja,  $\omega_f = 500$  rad/s. Pode-se notar que, apesar de haver uma certa dificuldade neste último caso, de maneira geral a expansão mostrou-se robusta o suficiente para representar dinâmicas diferentes da original.

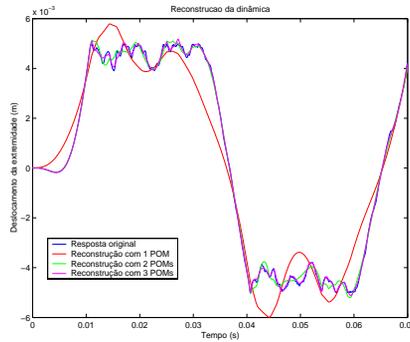


Figura 9: Reconstituição da dinâmica do sistema de vibroimpacto usando-se um, dois e três modos empíricos.

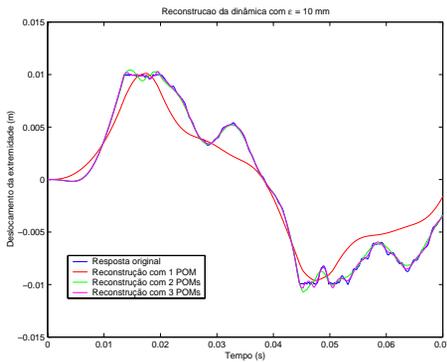


Figura 10: Reconstituição da dinâmica de vibroimpacto com  $\epsilon = 10$  mm utilizando-se os POMs originais.

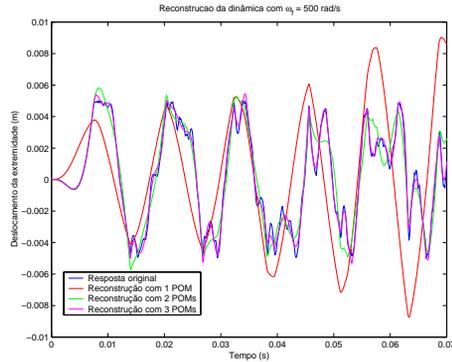


Figura 11: Reconstituição da dinâmica de vibroimpacto com  $\omega_f = 500$  rad/s utilizando-se os POMs originais..

## 6 FORMULAÇÃO DE UM MODELO REDUZIDO

Veremos, agora, como gerar um modelo reduzido a partir do método de Galerkin, porém tendo como funções de aproximação os POMs mostrados na Fig. 7. Podemos, mais uma vez, reescrever a equação que define a dinâmica do sistema de vibroimpacto (14) como

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = F(x,t) - D(w(x,t)), \quad (21)$$

sendo, neste caso,

$$D(w(x,t)) = EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}$$

e  $F(x, t)$  o mesmo que antes. No caso do uso dos POMs, a solução aproximada é dada por

$$\hat{w}(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \psi_i(x) + E[w(x, t)]. \quad (22)$$

Substituindo a expressão acima na Eq. (21), multiplicando por  $\psi_j(x)$  e integrando no domínio espacial, chega-se no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\rho A \ddot{a}_j(t) = \int_0^L F(x, t) \psi_j(x) - \sum_{i=1}^L a_i(t) \int_0^L D(\psi_i(x)) \psi_j(x) dx - \int_0^L D(E[w(x, t)]) \psi_j(x) dx, \quad (23)$$

sendo que fez-se uso da ortonormalidade dos modos empíricos e do fato da média do campo não variar com o tempo segundo a hipótese de estacionariedade. Nota-se que a existência da média na expansão (22), diferentemente do que ocorria quando usavam-se os modos de vibração como funções de aproximação (17), produz, na discretização, um vetor de forçamento estático no sistema de EDOs representado pelo último termo na Eq. (23).

Um modelo reduzido utilizando os cinco primeiros POMs foi construído através do método de Galerkin. Neste caso, surge o problema de como inserir o amortecimento no novo modelo. Lembrando que o amortecimento não consta da EDP e foi introduzido no primeiro modelo *a posteriori*, isto é, após a discretização, temos o problema de que fatores de amortecimento usar no caso dos POMs. Como a Fig. 7 mostrou, à exceção do primeiro POM, os outros são muito semelhantes aos modos de vibração e, por isso, optou-se por usar aqui os mesmos fatores de amortecimento modais. A Fig. 12 mostra uma comparação entre o desempenho deste novo modelo reduzido e o inicial usando os 10 modos de vibração da viga em balanço.

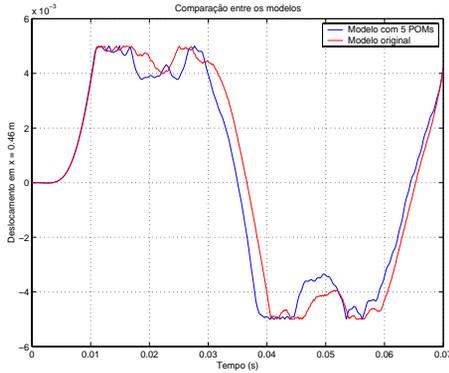


Figura 12: Desempenho do modelo reduzido com 5 POMs.

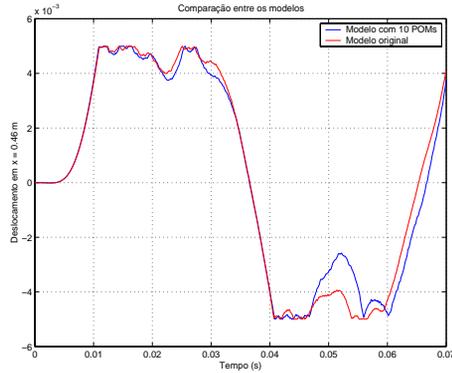


Figura 13: Desempenho do modelo com 10 POMs.

Nota-se que, neste caso, o resultado não é bom, apesar de que apenas três POMs foram necessários para realizar uma excelente reconstrução da dinâmica. Da mesma maneira, um

modelo completo utilizando os dez POMs também não consegue se igualar ao modelo original como mostrado na Fig. 13. Como pode ser visto, o resultado melhora e as oscilações de alta frequência são bem representadas. No entanto, as oscilações de baixa frequência diferem bastante. Uma hipótese para esta diferença reside no fato de ter-se usado o fator de amortecimento dos dois primeiros modos de vibração como fatores de amortecimento para os dois primeiros POMs, quando fisicamente estes são bem distintos. Desta forma, espera-se que uma boa coincidência poderia ser obtida usando uma projeção dos fatores de amortecimento modais na base formada pelos POMs. Em outras palavras, como o primeiro POM não corresponde exatamente a nenhum modo de vibração, sendo, portanto, uma combinação deles, seu fator de amortecimento também deveria ser uma ponderação dos fatores de amortecimento destes modos.

## 7 CONCLUSÕES

Este capítulo apresentou a aplicação da KLE a um sistema de vibroimpacto, linear por partes. Mostrou-se que a modelagem do sistema flexível estudado consegue reproduzir a existência de microimpactos, tendo estes importante influência na dinâmica. Além disso, os modos empíricos e coeficientes temporais associados podem ajudar a entender o fluxo de energia pelo sistema. Como a dinâmica da viga foi simulada com dez modos de vibração, a KLE também só conseguiu capturar dez POMs. Entretanto, apenas três são necessários para a representação dinâmica do sistema.

Finalmente, construiu-se um modelo reduzido usando os POMs no método de Galerkin mas, infelizmente, sua precisão não foi muito boa, devido ao fato de se ter usado o mesmo amortecimento modal para os POMs como discutido. Isto teria sido evitado se o amortecimento já estivesse incluído na EDP através de um termo  $c\partial w(x,t)/\partial t$ , como proposto em [14]. Todavia, neste caso, haveria o problema de se estimar o coeficiente  $c$  a partir dos fatores de amortecimento modais experimentalmente obtidos.

## REFERÊNCIAS

- [1] J.L. Lumley. *Stochastic tools in turbulence*. Academic Press, (1971).
- [2] P. Holmes, J.L. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge University Press, (1996).
- [3] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures part I: coherent structures. *Quart. App. Math.*, **45**(3), 561–571 (1987).
- [4] X. Ma and A.F. Vakakis. Karhunen-Loève decomposition of the transient dynamics of a multibay truss. *AIAA Journal*, **37**(8), 939–946 (1999).
- [5] A. Steindl, H. Troger, and J.V. Zemann. Nonlinear Galerkin method in the dimension reduction of nonlinear dynamical systems. In F.C. Moon, editor, *IUTAM Symposium on New Applications of Nonlinear and Chaotic Dynamics in Mechanics*, pages 1–10, Ithaca, EUA, (1997). Kluwer Academic Publishers.
- [6] L. Feeny and R. Kappagantu. On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. *J. Sound Vib.*, **211**(4), 607–616 (1998).

- [7] J.P. Cusumano and B.-Y. Bai. Period-infinity periodic motions, chaos, and spatial coherence in a 10 degree of freedom impact oscillator. *Chaos, Solit. Frac.*, **3**(5), 515–535 (1993).
- [8] C. Wolter, M.A. Trindade, and R. Sampaio. Analyzing vibroimpacts of slender beams through Karhunen-Loève expansion. In *Anais do II Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2002)*, João Pessoa, Brasil, (2002). ABCM.
- [9] M.I. Friswell, J.E.T. Penny, and S.D. Garvey. The application of the IRS and balanced realization methods to obtain reduced models of structures with local non-linearities. *J. Sound Vib.*, **196**(4), 453–468 (1996).
- [10] G. Luo and J. Xie. Bifurcations and chaos in a system with impacts. *Physica D*, **148**, 183–200 (2001).
- [11] A.J. Newman. Model reduction via the Karhunen-Loeve expansion part I: an exposition. Technical report 96-32, Institute for Systems Research, (1996).
- [12] A. Papoulis. *Probability, random variables, and stochastic processes*. McGraw-Hill, (1991).
- [13] K.S. Breuer and L. Sirovich. The use of the Karhunen-Loève procedure for the calculation of linear eigenfunctions. *J. Comp. Phys.*, **96**, 277–296 (1991).
- [14] M.F.A. Azeez and A.F. Vakakis. Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations. *J. Sound Vib.*, **240**(5), 859–889 (2001).
- [15] A.A. Shabana. *Theory of vibration volume II: discrete and continuous systems*. Springer-Verlag, (1991).
- [16] D.J. Inman. *Engineering vibration*. Prentice-Hall, (1996).
- [17] C. Wolter, M.A. Trindade, and R. Sampaio. Obtaining mode shapes through the Karhunen-Loève expansion for distributed-parameter linear systems (to appear). *Shock and Vib.*, (2002).