

## ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (GFEM) NA ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS LAMINADAS

Oscar A. Garcia, Eduardo A. Fancello, Paulo de Tarso R. Mendonça

GRANTE - Grupo de Análise e Projeto Mecânico

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, SC - BRASIL

e-mail: oscar@grante.ufsc.br fancello@grante.ufsc.br mendonca@grante.ufsc.br

**Key Words:** Placas, cascas, material composto, GFEM.

### **Abstract.**

*An application of the Generalized Finite Element Method (GFEM) to laminated composite plates and shells problems is presented in this work. Two kinematical models are considered: the Mindlin-type model, known as first order model, and a third order model with deformable thickness. The approximation space is hierarquically constructed following the main ideas of the GFEM using globals defined enrichment functions. In the case of shells, the definition of an adequate support for the enrichment functions made it necessary to introduce a special procedure in order to take into account curved surfaces in the 3D physical space. Some examples illustrate the numerical performance of the model. Convergence curves as well as locking analysis are compared with analytical solutions when available.*

## 1 INTRODUÇÃO

As estruturas de material composto laminado estão ocupando um espaço crescente na construção de componentes mecânicos estruturais devido a suas singulares características de resistência, rigidez e peso.

Sua simulação requer um tratamento diferenciado em relação aos modelos de materiais isotrópicos, assim como critérios de falha específicos dependentes de valores precisos de tensões e deformações.

Por outro lado, a automatização do processo de análise cada vez mais requer esforços na redução da responsabilidade do analista na escolha de aspectos técnicos relacionados ao método numérico. Neste ponto são citados a escolha de refino adequado de malha e ou a ordem das funções e interpolação dos elementos mediante técnicas adaptativas.

Baseado nestas observações, este trabalho coloca em foco a análise de problemas estáticos de componentes materiais compostos laminados. A abordagem deste problema é feita a partir do tratamento de dois aspectos fundamentais que são o modelo cinemático e a construção do espaço de interpolação.

Em relação ao primeiro aspecto, são abordadas as teorias de ordem superior capazes de contornar os problemas característicos de laminados, garantir uma distribuição quadrática das tensões cisalhantes transversais, satisfazer as condições de Poisson e levar em consideração as tensões transversais normais às fibras do laminado.

O segundo aspecto da problemática será abordado utilizando o *Generalized Finite Elements Method* (GFEM) de *Duarte, Babuska & Oden*<sup>5</sup>. Esta técnica é oriunda dos métodos sem malha que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento da partição da unidade apresenta características peculiares relevantes em problemas de simulação numérica. Dentre estas são citadas a possibilidade de um refino “*p*” direcionado, a inclusão de funções que fazem parte dos modos de solução do problema de valores no contorno e utilização total ou parcial do caráter sem malha do método (funções de aproximação associadas ou não à uma malha). As características supracitadas conferem a esta metodologia a possibilidade de construir espaços de aproximação flexíveis com capacidade de contornar problemas de refino adaptativo de forma versátil bem como livrar-se total ou parcialmente da perda de precisão acarretada pela distorção da malha.

Embora existam vantagens incontestáveis no emprego de materiais compostos, o processo de simulação de seu comportamento estrutural apresenta detalhes complexos. Os efeitos de deformações transversais normais e de cisalhamento são mais acentuados numa estrutura laminada que noutra similar constituída de material homogêneo. Isto se deve ao fato do módulo de elasticidade na direção das fibras apresentar um valor muito elevado em relação às outras direções. Além disto torna-se indispensável a utilização de uma modelagem adequada da distribuição de tensões transversais, já que as tensões cisalhantes são responsáveis pela transmissão de esforços entre as lâminas. Dentre as teorias que tentam modelar os problemas estruturais de material composto laminado encontram-se as abordagens micro-mecânicas (os modelos possuem informações dos materiais constituintes do

laminado) e as teorias macro-mecânicas onde são utilizadas propriedades médias de cada lâmina.

Nas teorias macro-mecânicas a primeira modelagem foi feita utilizando a Teoria Clássica da Laminação (TCL) que assume as hipóteses cinemáticas de *Kirchhoff* para placas e *Love* para cascas. Estas teorias não leva em conta o efeito da deformação cisalhante nem as deformações normais as fibras e portanto, são incapazes de prever ruptura por cisalhamento na resina e delaminação. Sua utilização limita-se a modelos com razão largura média espessura  $L/h \geq 100$ . As teorias de primeira ordem, também conhecidas como teorias de *Reissner-Mindlin* para placas e cascas, modelam o campo de deslocamento com funções lineares da variável " $\zeta$ " da espessura. Estas teorias levam em consideração a deformação cisalhante mas apresentam inconsistência física provenientes do próprio modelo cinemático. Neste caso, além de não serem consideradas as tensões transversais normais às fibras, por hipóteses do modelo, não são satisfeitas as condições de contorno de *Poisson*. É necessário, nesta situação, a introdução de coeficientes de correção, para considerar o efeito da energia de deformação de uma distribuição parabólica das tensões (*Reissner*<sup>6</sup>). Para relações largura média espessura  $L/h < 10$  começam a surgir diferenças significativas nos resultados de deslocamentos e tensões com relação a solução analítica da elasticidade tridimensional de *Pagano & Hatfield*<sup>15</sup>. Uma proposta para modelar de forma mais realista o comportamento de materiais compostos laminados consiste na extensão do modelo de primeira ordem por funções polinomiais da variável " $\zeta$ " da espessura. Conseguem-se com isto uma distribuição parabólica das tensões cisalhantes, considerar o efeito das deformações normais às fibras e satisfazer as condições de contorno nas superfícies livres do laminado. Numa abordagem cronológica das teorias utilizadas com as características enunciadas distinguem-se os modelos clássicos que utilizam soluções analíticas e os modelos numéricos como elementos finitos (FEM). Dentre os primeiros encontram-se os trabalhos de *Pipes & Pagano*<sup>19</sup>, *Lo, Christensen & Wu*<sup>12</sup>, *Reddy*<sup>10</sup>, *Pagano & Hatfield*<sup>15</sup>, *Pandya & Kant*<sup>2</sup>, *Kant & Manjunatha*<sup>24</sup>, *Xiao-Ping*<sup>21</sup> entre outros. A simulação numérica de campos primais empregando estas teorias é apresentada nos trabalhos de *Sivakumaran, Chaudury & Vajarasathira*<sup>13</sup>, *Kant & Kommineni*<sup>23</sup>, *Tessler & Saether*<sup>1</sup> dentre outros. Os modelos supracitadas caracterizam-se por ter a função cinemática do campo de deslocamento e o espaço de interpolação fixos para um determinado problema. Estes modelos embora apresentem resultados satisfatórios em problemas estáticos e dinâmicos, com soluções regulares não são adequados para contornar soluções com singularidades. Os modelos hierárquicos construídos por um refino do modelo cinemático e do espaço de funções de aproximação constituem um passo a frente na abordagem de problemas de camada limite, de singularidades geométricas e de carregamento. Dentre deste foco encontra-se o trabalho de *Babuska, Szabo & Actis*<sup>7</sup> e *Actis, Szabo & Schwab*<sup>18</sup>. A proposta destes autores constitui-se de um refino hierárquico para o modelo cinemático e para o espaço de elementos finitos que satisfaz os requisitos de aproximabilidade, consistência assintótica e taxas de convergência ótimas. O trabalho apresentado neste artigo segue a linha dos modelos hierárquicos. Aqui a hierarquia no

modelo cinemático será levada a cabo pelas teorias de primeira ordem de Mindlin e de terceira ordem com normal extensível Kant<sup>22</sup>. O enriquecimento do espaço de aproximação será levado a cabo por refino “ $h$ ”, “ $p$ ” e “ $hp$ ” construídos segundo a técnica do GFEM. Os aspectos teóricos resultados e conclusões do trabalho são abordados nas seções a seguir.

## 2 CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO

A construção do espaço de aproximação segue a filosofia do *Generalized Finite Element Methods* (GFEM) proposto por Duarte, Babuska & Oden<sup>5</sup>. Esta técnica apresentada independentemente por Melenk & Babuska<sup>8</sup> com o nome de *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM) e por Duarte & Oden<sup>4</sup> sob o nome de *hp-Clouds*, engloba os métodos que constroem o espaço de aproximação por produto da partição da unidade com funções que apresentam boas propriedades de aproximação. Dentre estas são frequentemente utilizadas as construídas por produto tensorial de polinômios de Legendre, produto completo de polinômios definidos no domínio real ou modos conhecidos da solução.

Neste trabalho é utilizado especificamente o método *hp-Clouds*, com a partição da unidade construída com funções lagrangeanas bilineares definidas sobre o domínio do elemento. Conseguem-se com isto funções com propriedade delta de *Kronecker* de sumo interesse no tratamento de condições de contorno nos problemas de Dirichlet. Em contrapartida o espaço de aproximação resultante é de baixa regularidade e com as dificuldades inerentes da utilização da malha.

A construção do espaço de aproximação com estas características é mostrado a seguir.

### 2.1 Espaço de Aproximação $\mathcal{F}_N^p$ .

A idéia fundamental do *hp-Clouds* consiste na construção do espaço de aproximação  $\mathcal{F}_N^p$  por enriquecimento da partição da unidade com o conjunto  $\mathcal{L}_p$  obtido pelo produto tensorial de polinômios de Legendre ou mediante conjuntos completos de polinômios  $\Pi_p$ , que podem ser de Legendre ou funções polinomiais definidas no domínio real  $\mathbb{R}^2$ . Os espaços obtidos desta forma tem a propriedade de  $\mathcal{P} \subset \text{span}\{\mathcal{F}_N^p\}$  onde  $\mathcal{P}$  é o conjunto dos polinômios de grau  $g \leq p$ .

No caso de construir  $\mathcal{F}_N^p$  por produto tensorial, se tem:

$$\mathcal{F}_N^p = \{ \{ \varphi_\alpha L_{ij}(\mathbf{x}) \} : 1 \leq \alpha \leq N, 0 \leq i, j \leq p, i, j \geq 0, p \geq 0 \} \quad (1)$$

Se for construído o espaço  $\text{span}\{\mathcal{F}_N^p\}$  através de enriquecimento por conjuntos completos de polinômios  $\Pi_p$ , a família  $\mathcal{F}_N^p$  é dada por:

$$\mathcal{F}_N^p = \{ \{ \varphi_\alpha L_{ij}(\mathbf{x}) \} : 1 \leq \alpha \leq N, 0 \leq i, j \leq p, 0 \leq i + j \leq p \} \quad (2)$$

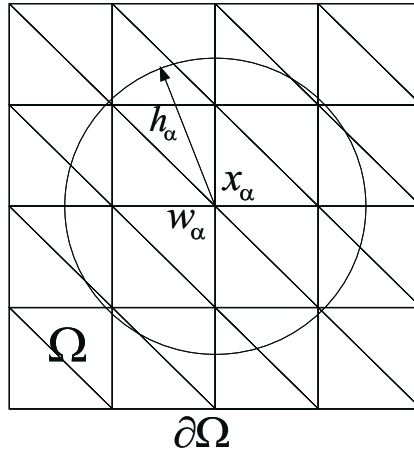


Figure 1: Domínio circular  $\Omega_\alpha$  das funções de enriquecimento da nuvem centrada em  $\mathbf{x}_\alpha$

As funções de enriquecimento  $L_{ij}(\mathbf{x})$  são construídas num domínio circular Fig.1 definido por  $w_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|_{\mathbb{R}^2} < h_\alpha\}$ . Quando o enriquecimento é feito usando base polinomial de Legendre é necessário mapear o subdomínio  $w_\alpha$  para o subdomínio padrão  $\hat{w}_\alpha$ , já que as funções  $\hat{L}_{ij}$  ficam definidas em  $[-1, 1]^2$ . Sendo assim,  $\hat{w}_\alpha = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \|\xi\|_{\mathbb{R}^2} < 1\}$  e  $F_\alpha : \hat{w}_\alpha \rightarrow w_\alpha$  é uma função mapeamento definida por  $F_\alpha(\xi) = h_\alpha\xi + \mathbf{x}_\alpha$ ,  $\xi \in \hat{\Omega}_\alpha$ . Desta forma, as funções ficam finalmente definidas por  $\varphi_\alpha L_{ij}(\mathbf{x}) := \varphi_\alpha \hat{L}_{ij} \circ F_\alpha^{-1}(\mathbf{x})$ , onde,  $F_\alpha^{-1} : w_\alpha \rightarrow \hat{w}_\alpha$  é dado por  $F_\alpha^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha}{h_\alpha}$  e  $\hat{L}_{ij}(\xi)$  é o produto tensorial de polinômios de Legendre definidos em  $[-1, 1]^2$ .

De forma genérica a base de funções  $\mathcal{F}_N^p$  tem a seguinte definição

$$\mathcal{F}_N^p = \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_N \\ \varphi_1 L_{s=1} & \varphi_2 L_{s=1} & \dots & \varphi_N L_{s=1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1 L_{s=M} & \varphi_2 L_{s=M} & \dots & \varphi_N L_{s=M} \end{array} \right\}, \quad (3)$$

onde, se for usado produto tensorial com polinômios de Legendre, o número de produtos para cada função partição da unidade é dado por  $M = ((p + 1)^2 - 1)$ . Se, ao contrário, forem utilizados conjuntos completos  $\Pi_p$  o valor de  $M$  é dado por,  $M = \binom{p+2}{n} - \binom{2}{n}$ , onde  $n = 1, 2, 3$ . Neste caso  $n = 2$  já que se trata de uma abordagem em  $\mathbb{R}^2$ .

A família  $\mathcal{F}_N^p$  descrita acima apresenta sua fundamentação matemática descrita por três teoremas apresentados em Duarte & Oden<sup>4</sup>.

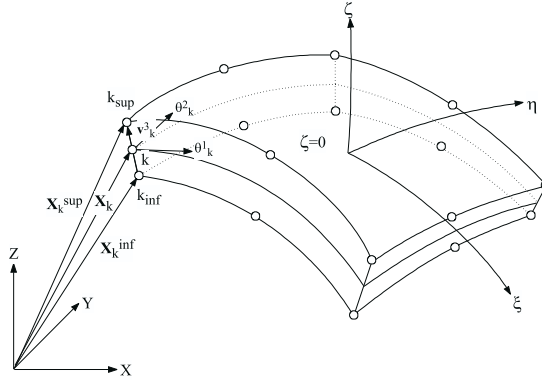


Figure 2: Base pseudo-normal  $[\theta_k^1, \theta_k^2, \mathbf{v}_k^3]$ , associada aos nós  $k_{inf}$  e  $k_{sup}$ .

### 3 MODELOS DE ORDEM SUPERIOR ADAPTADOS AO ELEMENTO DE AHMAD

O trabalho apresentado neste artigo, utiliza as teorias de primeira ordem Mindlin e terceira ordem com normal extensível *Kant*<sup>22</sup>, para modelar o campo de deslocamento associado a uma metodologia de enriquecimento "p" para o espaço de elementos finitos.

O item fundamental deste trabalho consiste na técnica de abordagem da problemática de construção do espaço de aproximação em superfícies com curvatura não nula utilizando o método *hp-Clouds* (Duarte & Oden<sup>4</sup>).

A seguir será feita uma breve introdução da discretização do domínio utilizando o elemento finito sólido degenerado (elemento de *Ahmad et alli*<sup>20</sup>) para cascas e finalmente é apresentada a técnica dos planos tangentes para adaptar a metodologia do *hp-Clouds* ao tratamento de superfícies curvas.

O elemento sólido degenerado, introduzido na literatura por *S. Ahmad, B. M. Irons & O. C. Zienkiewicz*<sup>20</sup>, consiste em um elemento de casca obtido a partir de um elemento sólido 3D, como ilustrado na Fig.2. Será apresentado a seguir a adaptação dessa formulação para adequá-la à formulação do *hp-Clouds* com enriquecimento hierárquico e às teorias de ordem superior de primeira e terceira ordem com normal extensível.

#### 3.1 Definição Geométrica do Elemento

Para obter a função de mapeamento da geometria do elemento parte-se definindo um sistema de coordenadas locais associadas aos nós extremos de cada elemento como indicado na Fig.2. Este sistema de coordenadas é chamado de pseudo-normal com relação à superfície de referência do elemento, já que o vetor relativo a espessura é obtido em função dos vetores de posição  $\mathbf{X}_k^{sup}$  e  $\mathbf{X}_k^{inf}$ , referentes aos nós  $k_{sup}$  e  $k_{inf}$  do elemento. Portanto o

vetor pseudo-normal associado ao nó  $k$  é obtido por:

$$\mathbf{V}_{3k} = \mathbf{X}_k^{\text{sup}} - \mathbf{X}_k^{\text{inf}}, \quad \mathbf{v}_{3k} = \frac{\mathbf{V}_{3k}}{\|\mathbf{V}_{3k}\|}. \quad (4)$$

Define-se o nó  $k$  na posição intermediária por  $\mathbf{X}_k = (\mathbf{X}_k^{\text{sup}} + \mathbf{X}_k^{\text{inf}})/2$ . O vetor  $\mathbf{V}_{3k}$  pode ser também escrito em função da espessura  $t_k$  associada ao nó  $k$  e o seu vetor normalizado  $\mathbf{v}_{3k} \mathbf{V}_{3k} = \mathbf{v}_{3k} t_k$ . Uma das formas de obter os demais vetores componentes da base é através do produto vetorial com os versores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  do sistema global de coordenadas.

Supondo que  $\mathbf{j}$  seja um vetor unitário não paralelo a  $\mathbf{v}_{3k}$ , definem-se os vetores  $\theta_k^1$  e  $\theta_k^2$  como:

$$\theta_k^1 = \mathbf{j} \times \mathbf{v}_{3k}, \quad \theta_k^2 = \mathbf{v}_{3k} \times \theta_k^1. \quad (5)$$

As coordenadas globais de um ponto  $\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta)$  são dadas pela expressão

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} X(\xi, \eta, \zeta) \\ Y(\xi, \eta, \zeta) \\ Z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{Bmatrix}_{ref} + \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \frac{t_k}{2} \mathbf{v}_{3k} \zeta. \quad (6)$$

onde "n" corresponde ao número de nós do elemento de casca, situados sobre a superfície de referência,  $\mathbf{X}_{ref}(X_k, Y_k, Z_k)$  são as coordenadas nodais sobre a superfície de referência e  $\mathcal{N}_k(\xi, \eta)$  as funções de interpolação do elemento associada a cada nó.

### 3.2 Modelo de primeira ordem ou modelo de Mindlin

O modelo de primeira ordem proposto aqui utiliza polinômios lineares na variável  $z$  da base local ao longo de cada pseudo normal do elemento para aproximar os deslocamentos membranais:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix}_{ref} + \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \zeta \frac{t_k}{2} \begin{bmatrix} \theta_{kx}^1 & -\theta_{kx}^2 \\ \theta_{ky}^1 & -\theta_{ky}^2 \\ \theta_{kz}^1 & -\theta_{kz}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Na expressão (7)  $u_k, v_k$  e  $w_k$  são as componentes do deslocamento do nó  $k$  da superfície de referência nas direções globais  $X, Y$  e  $Z$ . Os vetores  $\theta_k^1$  e  $\theta_k^2$  formam a base ortonormal associada à pseudo-normal de direção  $\mathbf{v}_{3k}$ , que são definidos pelas expressões (5). As constantes  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  são os ângulos de rotação da pseudo-normal em torno das direções  $\theta_k^2$  e  $\theta_k^1$  respectivamente conforme Fig.2.

### 3.3 Modelo de Terceira Ordem com Normal Extenssível

A teoria de terceira ordem usada neste trabalho é aquela apresentada por *Kant*<sup>22</sup>. Os deslocamentos membranais são aproximados por funções polinomiais cúbicas incompletas

da variavel local  $z$  associada a cada pseudo-normal e os deslocamentos transversais por uma polinomial quadrática. De forma geral pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{k=1}^n \left\{ \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \left(\frac{t_k}{2}\zeta\right)^2 \begin{Bmatrix} v_{3kx} \\ v_{3ky} \\ v_{3kz} \end{Bmatrix} \right\} w_k^* \\
 & + \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \zeta \frac{t_k}{2} \begin{bmatrix} \theta_{kx}^1 & -\theta_{kx}^2 \\ \theta_{ky}^1 & -\theta_{ky}^2 \\ \theta_{kz}^1 & -\theta_{kz}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \\
 & + \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \left(\zeta \frac{t_k}{2}\right)^3 \begin{bmatrix} \theta_{kx}^1 & -\theta_{kx}^2 \\ \theta_{ky}^1 & -\theta_{ky}^2 \\ \theta_{kz}^1 & -\theta_{kz}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_k \\ \lambda_k \end{Bmatrix} \Bigg\}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

Embora não leve em consideração as condições de contorno de Poisson nas superfícies livres da estrutura esta teoria consegue uma distribuição parabólica para as tensões cisalhantes e leva em consideração a deformação na direção normal.

Uma das dificuldades no tratamento de superfícies com curvaturas não nulas (casca) é a de construir o enriquecimento "p" do espaço de aproximação no domínio real (característica básica dos métodos sem malha). Uma forma de vencer este desafio foi apresentada por *Petr Krysl & Ted Belytschko*<sup>17</sup> na aplicação do *Element Free Galerkin Method* na análise de cascas finas. Naquela ocasião os autores propuseram a construção de uma parametrização para a superfície em questão utilizando funções obtidas por Moving Least Square. A técnica utilizada no presente trabalho é apresentada na seção seguinte.

#### 4 ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO EM SUPERFÍCIES COM CURVATURA NÃO NULA

Um dos aspectos importantes dos métodos chamados "sem malha" e a separação entre o domínio de integração e o espaço de aproximação.

Nos elementos isoparamétricos, pela propria definição, são utilizadas as mesmas funções de interpolação tanto para mapear a geometria quanto para aproximar os campos de interesse. Nos elementos finitos hierárquicos, por outro lado, geometria e funções de interpolação são desvinculadas, porém todo o espaço de enriquecimento é construído a partir das funções elementares, definidas sobre o sistema de coordenadas naturais deste. Diferentemente desta abordagem, o *hp-Clouds* constroi as funções de enriquecimento no domínio físico das casca, de forma idêntica ao que é realizado nos métodos sem malha.

Nesta metodologia a partição da unidade será automaticamente definida pelas funções de interpolação lagrangeanas usuais, com a ressalva que serão utilizadas funções independentemente da ordem de aproximação geométrica. As funções partição de unidade utilizadas neste trabalho são bilineares associadas aos nos de vértice do elemento. Denomina-se "nuvem" ao suporte da função partição da unidade e será formada pelos elementos adjacentes a um nó de vértice. A representação geométrica é dada pelo mapeamento de



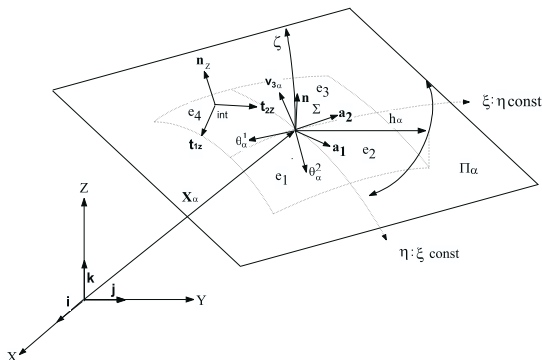


Figure 3: Sistemas de coordenadas, (a) ortogonais, globais  $(X, Y, Z)$ , (b) pseudo-normal associados à nuvem com direções dadas pelos vetores  $(\theta_\alpha^1, \theta_\alpha^2, \mathbf{v}_\alpha^3)$ , (c) associadas ao ponto de integração com direções  $(\mathbf{t}_{1z}, \mathbf{t}_{2z}, \mathbf{n}_z)$  e (d) covariantes no ponto  $\mathbf{X}_\alpha$  com direções  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ .

cada elemento através da localização dos nós deste. Assim cada elemento possui uma regra de mapeamento própria, diferente dos elementos adjacentes.

Por outro lado, as funções de enriquecimento da partição da unidade deverão ser definidas no domínio físico da casca (diferentemente do FEM padrão onde estas funções são construídas no domínio paramétrico). Para realizar este procedimento, utilizou-se um mapeamento único para o suporte da nuvem ao longo dos diversos elementos associados. Isto é levado a cabo pela construção das funções de enriquecimento da partição da unidade num plano aproximadamente tangente ao centro da nuvem.

A estratégia proposta para o enriquecimento “ $p$ ” das funções de interpolação fundamenta-se na definição de uma base para cada suporte de nuvem. Para cada nó  $\mathbf{X}_\alpha$  centro de nuvem é estabelecido um plano  $\pi_\alpha$  pseudo-tangente à superfície através da base ortonormal associada  $\theta_\alpha^1, \theta_\alpha^2, \mathbf{v}_\alpha^3$ . Neste plano define-se um raio  $h_\alpha$  de forma tal que a projeção de todos os pontos do suporte sobre o plano  $\pi_\alpha$  estejam dentro do círculo de raio  $h_\alpha$  e centro  $\mathbf{X}_\alpha$  Fig.3. As funções de enriquecimento  $L_{ij}(\bar{\mathbf{x}}) \in \mathcal{L}_p$  ou  $\Pi_\alpha$  são construídas sobre o plano  $\pi_\alpha$  utilizando um sistema local de coordenadas  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{x}, \bar{y})$  normalizado em função do raio do círculo  $h_\alpha$ . Assim o suporte local das funções de enriquecimento é definido por  $\omega_\alpha = \{\bar{\mathbf{x}}(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq h_\alpha\}$ , tal que para um ponto de coordenadas globais  $\mathbf{X}(X, Y, Z)$  se tem  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{x}, \bar{y}) = \mathbf{P}\mathbf{Q}_\alpha^T(\mathbf{X} - \mathbf{X}_\alpha)$ , onde  $\mathbf{P}$  é a matriz de projeção e  $\mathbf{Q}_\alpha$  é a matriz de rotação ambas definidas respectivamente por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_\alpha = \begin{bmatrix} \theta_{\alpha x}^1 & \theta_{\alpha x}^2 & v_{\alpha x}^3 \\ \theta_{\alpha y}^1 & \theta_{\alpha y}^2 & v_{\alpha y}^3 \\ \theta_{\alpha z}^1 & \theta_{\alpha z}^2 & v_{\alpha z}^3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

A forma final do gradiente das funções de enriquecimento no domínio intrínscico do

elemento é dada pela expressão

$$\nabla_{\xi} L_{ij}(\xi, \eta) = \mathbf{PJ} [\mathbf{Q}_{\alpha} \nabla_{\bar{x}} L_{ij}(\bar{\mathbf{x}})] \tag{10}$$

onde  $\nabla_{\bar{x}} L_{ij}(\bar{\mathbf{x}})$  é o gradiente da função construído no domínio local da nuvem  $\alpha$ ,  $\mathbf{J}$  é matriz jacobiana do elemento ao qual pertence o ponto analisado e  $\nabla_{\xi} L_{ij}(\xi, \eta)$  é o gradiente da função de enriquecimento no domínio intrínscio do elemento.

Definidas as funções de enriquecimento e seus gradientes no domínio paramétrico, a construção do espaço local de elementos finitos dá origem às funções de interpolação  $\varphi_{\alpha}(\xi, \eta) L_{ij}(\xi, \eta)$  obtidas pelo procedimento abordado nas expressões (1) e (2). Partindo do exposto acima define-se o problema discretizado para um enriquecimento “ $p$ ” do espaço de elementos finitos no domínio paramétrico.

#### 4.1 Problema Discretizado com Enriquecimento “ $p$ ” no Domínio Paramétrico

O modelo cinemático utilizado na discretização do exemplo a seguir é o de terceira ordem com normal extensível já que o de primeira ordem é uma particularização deste último.

Supondo que existem  $n_{\alpha}$  funções associadas ao nó  $\alpha$  do elemento e que existem  $n_n$  nós ativos por elemento (nós associados à nuvens), o campo de deslocamento para um ponto de integração  $(\xi_i, \eta_i)$  no interior de um elemento é definido por:

$$\mathbf{u}_i \cong \mathbf{u}_{h(i)} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{n_n} \sum_{k=1}^{n_{\alpha}} \psi_k^{\alpha}(\xi_i, \eta_i) \begin{Bmatrix} u_k^{\alpha} \\ v_k^{\alpha} \\ w_k^{\alpha} \end{Bmatrix} + \sum_{\alpha=1}^{n_n} \sum_{k=1}^{n_{\alpha}} \psi_k^{\alpha}(\xi_i, \eta_i) \zeta^2 \frac{t_{\alpha}^2}{4} \begin{Bmatrix} v_{3kx} \\ v_{3ky} \\ v_{3kz} \end{Bmatrix} w_k^{\alpha*} \\ + \sum_{\alpha=1}^{n_n} \sum_{k=1}^{n_{\alpha}} \psi_k^{\alpha}(\xi_i, \eta_i) \zeta^2 \frac{t_{\alpha}}{2} [\theta_{\alpha}^1 - \theta_{\alpha}^2] \begin{Bmatrix} \alpha_k^{\alpha} \\ \beta_k^{\alpha} \end{Bmatrix} + \sum_{\alpha=1}^{n_n} \sum_{k=1}^{n_{\alpha}} \psi_k^{\alpha}(\xi_i, \eta_i) \zeta^3 \frac{t_{\alpha}^3}{8} [\theta_{\alpha}^1 - \theta_{\alpha}^2] \begin{Bmatrix} \gamma_k^{\alpha} \\ \lambda_k^{\alpha} \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

Escrevendo (11) em forma matricial se obtém  $\mathbf{u}_{h(i)} = \mathbf{N}_i \mathbf{U}_i$ , onde,

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \psi_k^{\alpha} & 0 & 0 & \psi_k^{\alpha} \zeta^2 \frac{t_{\alpha}^2}{4} v_{3\alpha x} & \theta_{\alpha x}^1 \zeta \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}}{2} & -\theta_{\alpha x}^2 \zeta \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}}{2} \\ \dots & \dots & 0 & \psi_k^{\alpha} & 0 & \psi_k^{\alpha} \zeta^2 \frac{t_{\alpha}^2}{4} v_{3\alpha y} & \theta_{\alpha y}^1 \zeta \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}}{2} & -\theta_{\alpha y}^2 \zeta \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}}{2} \\ \dots & \dots & 0 & 0 & \psi_k^{\alpha} & \psi_k^{\alpha} \zeta^2 \frac{t_{\alpha}^2}{4} v_{3\alpha z} & \theta_{\alpha z}^1 \zeta \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}}{2} & -\theta_{\alpha z}^2 \zeta \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}}{2} \\ \theta_{\alpha x}^1 \zeta^3 \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}^3}{8} & -\theta_{\alpha x}^2 \zeta^3 \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}^3}{8} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{\alpha y}^1 \zeta^3 \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}^3}{8} & -\theta_{\alpha y}^2 \zeta^3 \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}^3}{8} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{\alpha z}^1 \zeta^3 \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}^3}{8} & -\theta_{\alpha z}^2 \zeta^3 \psi_k^{\alpha} \frac{t_{\alpha}^3}{8} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{12}$$

e

$$\mathbf{U}_i^T = \{ \dots \quad \dots \quad u_k^{\alpha} \quad v_k^{\alpha} \quad w_k^{\alpha} \quad w_k^{\alpha*} \quad \alpha_k^{\alpha} \quad \beta_k^{\alpha} \quad \gamma_k^{\alpha} \quad \lambda_k^{\alpha} \quad \dots \quad \dots \}$$

é o vetor  $\mathbf{U}$  é o vetor de parâmetros de deslocamento.

As componentes do tensor gradiente de deslocamento pode ser analisadas de forma vetorial como:

$$\mathbf{D}_\xi^T(\mathbf{u}) = \{ u_{,\xi} \quad u_{,\eta} \quad u_{,\zeta} \quad v_{,\xi} \quad v_{,\eta} \quad v_{,\zeta} \quad w_{,\xi} \quad w_{,\eta} \quad w_{,\zeta} \}. \quad (13)$$

Estas componentes podem ser obtidas em termos dos valores no ponto de integração como  $\mathbf{D}_\xi(\mathbf{u}) = \mathcal{D}\mathbf{N}\mathbf{U}$ , onde  $\mathcal{D}$  é um operador diferencial. A expressão do vetor  $\mathbf{D}_\xi(\mathbf{u})$  é escrita de forma mais adequada introduzindo a matriz  $\mathbf{G}$  que é definida tal que  $\mathbf{G} = \mathcal{D}\mathbf{N}$ , o que leva a  $\mathbf{D}_\xi(\mathbf{u}) = \mathbf{G}\mathbf{U}$ .

O vetor de derivadas do deslocamento em relação às coordenadas globais  $\mathbf{D}(\mathbf{u})_{\mathbf{x}}$  é obtido por  $\mathbf{D}_\xi(\mathbf{u}) = \mathbb{J}\mathbf{D}_\xi(\mathbf{u}) = \mathbb{J}\mathbf{G}\mathbf{U}$ , onde o operador jacobiano  $\mathbb{J}$  tem a forma

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Como a integração numérica é feita no sistema local de coordenadas é necessário determinar uma base ortonormal local associada a cada ponto de integração. A matriz de rotação entre a base local e global é obtida de forma direta a partir dos vetores da base ortonormal no ponto de integração que permite construir o operador de rotação  $\mathcal{R}_i$ . Assim, o vetor  $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$  rotado para o sistema de coordenadas locais ortonormais do ponto de integração  $i$  tem a forma

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{u}) = \mathcal{R}_i \mathbf{D}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}), \quad \text{isto é,} \quad \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{u}) = \mathcal{R}_i \mathbb{J} \mathbf{G} \mathbf{U}. \quad (15)$$

A partir das derivadas do deslocamento, calculam-se as componentes de deformação na base local,  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{H} \mathcal{R}_i \mathbb{J} \mathbf{G} \mathbf{U}$ , sendo  $\mathbf{H}$  uma matriz booleana usual de indexação. As deformações  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  são nas direções locais  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  e  $\tilde{z}$  definidas pelos vetores  $\mathbf{t}_{1z}$ ,  $\mathbf{t}_{2z}$  e  $\mathbf{n}_z$  da Fig.3. O tensor de deformação  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é usualmente expresso em função da matriz de deformação  $\tilde{\mathbf{B}}_i$  e coeficientes de deslocamentos como  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{U}$ , onde,  $\tilde{\mathbf{B}}_i = \mathbf{H} \mathcal{R}_i \mathbb{J} \mathbf{G}$ . Portanto a matriz de rigidez de um elemento de material composto por laminados, utilizando quadratura numérica é dada por:

$$\mathbf{K}e = \sum_{l=1}^{Nl} \sum_{i=1}^{Ni} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \overline{\mathbf{C}}^l \tilde{\mathbf{B}}_i \det \mathbb{J} W_\xi W_\eta W_\zeta \quad (16)$$

Na expressão (16)  $Nl$  é o número de lâminas,  $Ni$  é o número de pontos de integração por lâmina,  $\overline{\mathbf{C}}^l$  é a matriz de elasticidade do material para a lâmina  $l$  e  $W_\xi$ ,  $W_\eta$  e  $W_\zeta$  são os pesos da quadratura numérica no ponto de integração correspondente às coordenadas curvilineas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ .

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Na apresentação de resultados serão denominados de GFEM(1) e GFEM(3) os obtidos com os modelos cinemáticos de primeira e terceira ordem respectivamente. Na primeira análise é avaliado o desempenho do GFEM(1) frente ao de travamento (*locking*) e a convergência de campos primais e duais para o problema de placas de material homogêneo e isotrópico. Como resultado complementar e de caráter ilustrativo é analisado o comportamento dos modelos GFEM(1) e GFEM(3) na simulação do deslocamento radial de uma casca cilíndrica. A mesma é constituída de material composto laminado, engastada nas extremidades e sujeita a uma carga de pressão interna. A apresentação de resultados obedece a seguinte sequência:

- i. Verificação de travamento (*locking*) em placas quadradas e circulares ambas em condições críticas de carregamento e vinculação modeladas com GFEM(1).
- ii. Verificação de convergência em norma  $L^2(\Omega)$  e de valores máximos normalizados dos campos primais e duais com relação à solução analítica de placas semi-espessas modeladas com GFEM(1).
- iii. Resultados de deslocamento radial para um cilindro de material composto laminado engastado nas extremidades e sob pressão interna uniforme.

### 5.1 Verificação de Travamento (*locking*)

O fenômeno de travamento (*locking*) que se apresenta com um aumento da rigidez quando a espessura do elemento estrutural tende a zero ocorre devido a incapacidade do espaço de aproximação cumprir a restrição de deformação cisalhante nula para o caso de flexão. Neste trabalho são mostrados a influência da forma e das condições de contorno do elemento estrutural na análise deste fenômeno através dos seguintes exemplos:

- i. placas quadradas simplesmente apoiadas e engastadas no contorno em ambos os casos sob um carregamento uniformemente distribuído.
- ii. placa circular engastada no contorno sujeita a uma carga uniformemente distribuída. Neste exemplo é analisada além da influência da forma o efeito da distorção da malha.

Com o objetivo de evitar problemas de sub integração todos os casos analisados utilizam 36 pontos de *Gauss*.

#### 5.1.1 Placa Quadrada Simplesmente Apoiada

O resultado desta análise corresponde a uma placa com dimensões carregamento e propriedades materiais mostradas na Fig.4. Dada as condições de simetria de carregamento

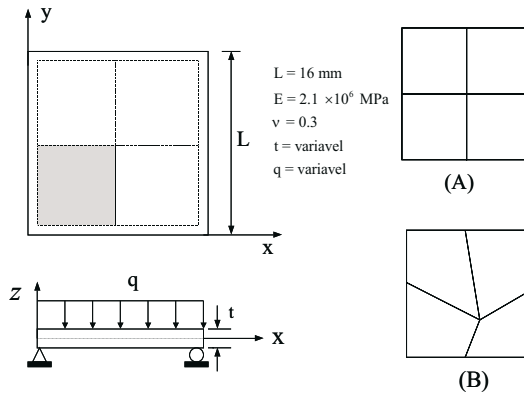


Figure 4: Placa quadrada simplesmente apoiada dimensões, vinculação e carregamento; A) malha regular de quatro elementos, B) malha distorcida de quatro elementos

e geometria, será analisado o quadrante inferior da placa, discretizado com quatro elementos quadriláteros Fig.4(A). Para este exemplo os espaços de aproximação utilizados são de ordem  $p = 3$  e  $p = 4$ .

Os resultados analisados correspondem aos valores máximos do deslocamento transversal normalizado com relação à solução analítica de *Kirchhoff* para a condição de vínculo de simples apoio Fig.5(a) e de engaste Fig.5(b). Nesta análise constatou-se o surgimento de locking nas duas situações de vinculação para razões largura/espessura superiores a  $10^2$  para  $p = 3$  e  $10^4$  para  $p = 4$  como é mostrado na Fig.5(a) e Fig. 5(b).

### 5.1.2 Placa Circular Engastada no Contorno

Este exemplo tem por objetivo verificar o efeito da geometria e da distorção da malha no comportamento do modelo GFEM(1) frente ao fenômeno de travamento. Para tal é utilizada uma placa circular com características indicadas na Fig.6. Devido à simetria de geometria e carregamento à análise será feita para o quarto superior como indicado na Fig.6(a) discretizado com 12 elementos quadriláteros. Os resultados obtidos correspondem ao deslocamento transversal máximo normalizado pela solução analítica de placa semi-espessa para espaços construídos com  $p = 3$  e  $p = 4$ . Verifica-se através da análise dos resultados do gráfico das Fig.7, a ocorrência de travamento para valores da razão diâmetro/espessura maiores do que  $10^2$  para  $p = 3$  e  $10^4$  para  $p = 4$ .

## 5.2 Resultados de Convergência

A análise de convergência será levada a cabo através da norma  $L^2(\Omega)$  do erro relativo em deslocamentos, esforços e valores máximos normalizados destes campos. Em ambas

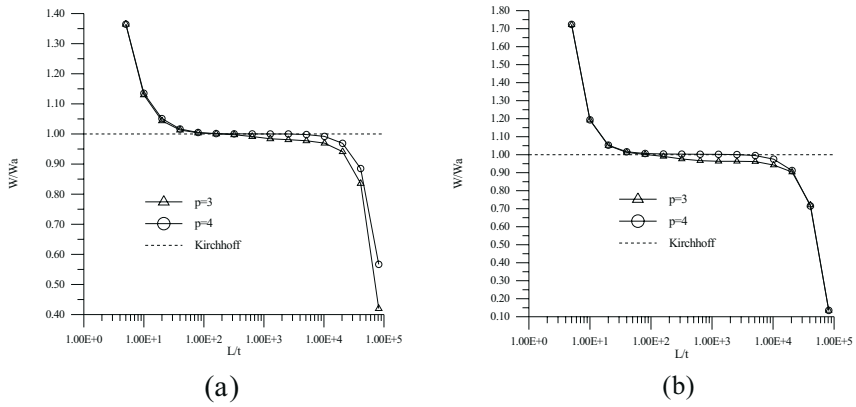


Figure 5: Deslocamento central normalizado; a) placa simplesmente apoiada; b) placa engastada

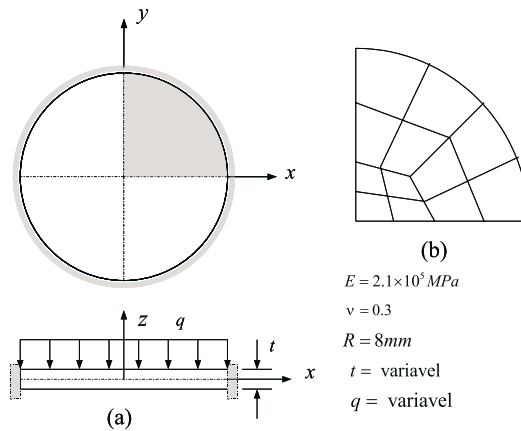


Figure 6: a) Placa circular engastada no contorno; b) Malha de 12 elementos.

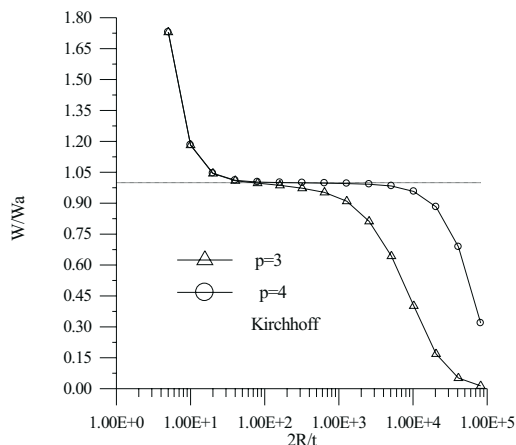


Figure 7: Deslocamento transversal máximo normalizado

as situações os resultados serão relacionados com a solução analítica de placas semi-espessas (*Woernie & Marquerre*<sup>13</sup>). Um dos testes a serem levados a cabo e a sensibilidade dos resultados à distorção da malha, utilizando para este fim as malhas da Fig.4(A) e 4(B). Nesta análise será utilizada uma espessura de 0.1mm e uma carga uniformemente distribuída no domínio de 0.1MPa. A integração é feita com 64 pontos de *Gauss*. Os resultados a seguir correspondem a convergência em norma  $L^2(\Omega)$  do erro relativo e valores máximos normalizados para um refino  $p$  homogêneo, como indicado na Fig.8(a) e (b).

Os resultados em norma  $L^2(\Omega)$  do erro relativo em deslocamento transversal mostram o bom desempenho do espaço de aproximação em ambas as situações onde mesmo com o efeito de distorção da malha se atinge resultados da ordem de  $10^{-3}$  com ordem polinomial  $p = 6$ . Para a situação de valores máximos normalizados o comportamento é semelhante, onde pode ser observada elevada precisão de resultados para as duas situações. Também pode ser notado que para  $p = 4$  mesmo para a situação crítica de discretização da malha da Fig.4(B) se atinge resultados normalizados de 0.9971 e 0.9999874 para a malha da Fig.4(A).

A seguir são mostrados na Fig.9, os resultados em norma  $L^2(\Omega)$  de momentos  $M_{xx}$  para as malhas da Fig.4(A) e 4(B). Na análise de resultados da Fig.9(a) constata-se a influência da distorção da malha (Fig.4(B)) evidenciada por um aumento acentuado do erro relativo em norma  $L^2(\Omega)$  do momento  $M_{xx}$  quando comparados com aqueles obtidos com a malha regular da Fig.4(A).

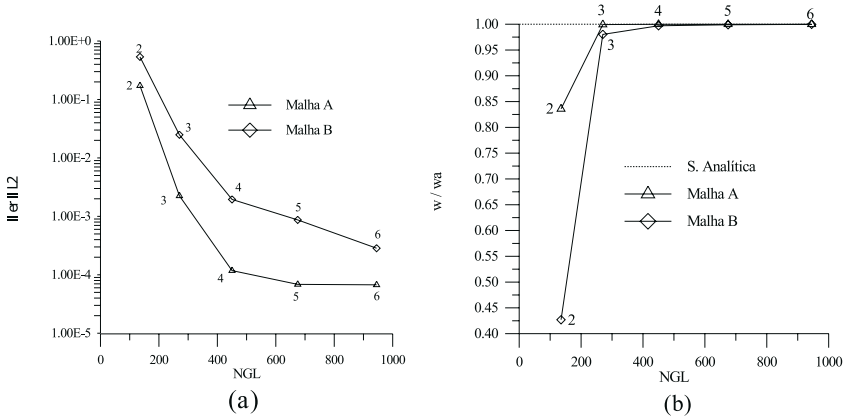


Figure 8: a) Norma  $L^2(\Omega)$  do erro relativo do deslocamento transversal para as malhas da Fig. 4(A) e 4(B); b) deslocamento transversal normalizado máximo para as malhas da Fig. 4(A) e 4(B).

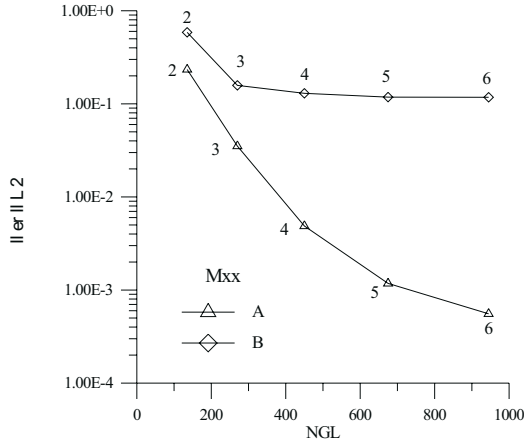


Figure 9: Norma  $L^2(\Omega)$  do erro relativo para o momento  $M_{xx}$  das malhas da Fig.4(A) e 4(B).

Esc.Lami.	GFEM(1) p=2	GFEM(3) p=2	K. P. Rao 1978	Análítica 1959
$0^\circ$	$3.694 \times 10^{-4}$	$3.719 \times 10^{-4}$	$3.666 \times 10^{-4}$	$3.670 \times 10^{-4}$

Table 1: Resultados para deslocamento radial central do cilindro engastado



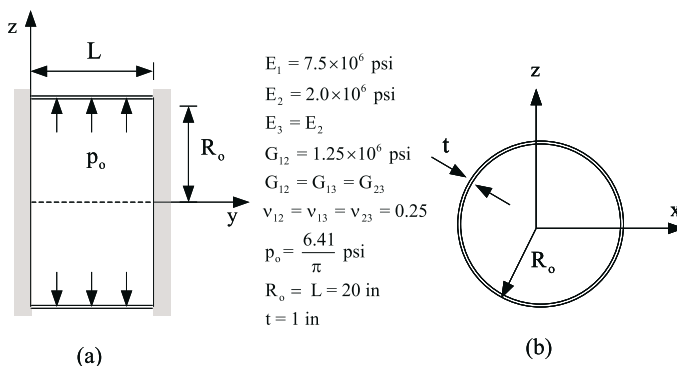


Figure 10: Cilindro engastado sob pressão interna ; a) corte longitudinal; b) corte transversal.

### 5.3 Casca Cilíndrica Composta.

O exemplo mostrado a seguir tem caráter meramente ilustrativo já que carece de um calibre adequado para a comparação. O mesmo constitui-se de um cilindro de material composto engastado nas extremidades com propriedades geométricas, materiais e de carregamento dadas na Fig.10. Esta análise será levada a cabo utilizando dois modelos construídos com GFEM(1) e GFEM(3) com ordem polinomial  $p=2$ . Devido a simetria de carregamento, geometria e condições de contorno foi analisado o octante superior do cilindro. A parcela analisada será discretizada com 4 elementos quadrilaterais com regra de quadratura de 36 pontos de *Gauss*.

Os resultados obtidos foram comparados com os de *K. P. Rao*(1978) e a solução analítica obtida por *Timoshenko & Woinowski-Krieger* (1959) para uma lâmina a zero graus. Os valores do deslocamento radial central do cilindro obtidos pelo GFEM(1) e GFEM(3) e pelos autores acima citados são mostrados na Tab.1. Os resultados da tabela foram complementados pela distribuição de deslocamentos radiais obtidos para ambos os modelos e dois esquemas de laminação como indicado no gráfico da Fig.11. Os valores plotados nos gráficos da Fig.11 foram determinados com a discretização do octante superior da casca com 36 elementos quadrilaterais. Em ambas as situações foi utilizada integração completa de 36 pontos de integração de Gauss. A análise da Tab.1, mostra resultados do deslocamento radial no centro do cilindro próximos aos obtidos por *K. P. Rao* (1978) e *Timoshenko Woinowski-Krieger* (1959).

Os resultados correspondentes ao GFEM (1) e GFEM (3) embora próximos dos obtidos pela solução analítica (1959) não convergem para este valor. Isto se deve a diferença atribuída pela deformação cisalhante levada em consideração por GFEM (1) e de forma mais realista por GFEM (3) onde para uma relação  $R/t=20$  é relevante.

Os gráficos da Fig.11 (a) e (b) evidenciam a ausência da perturbação de borda car-

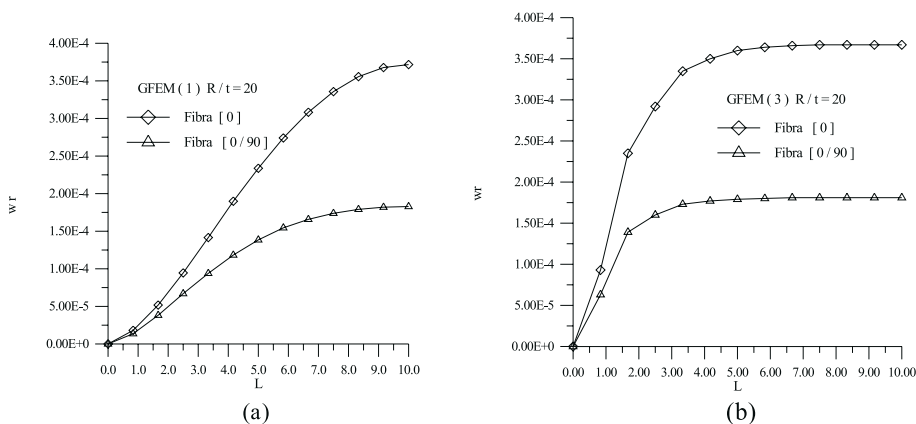


Figure 11: Deslocamento radial ao longo do meridiano; a) resultados GFEM(1); b) resultados GFEM(3).

acterística do modelo de *Love* para casca fina. Isto mostra o comportamento diferencial dos modelos para a razão radio/espessura supracitada. Além disto é notado para ambas as situações um aumento esperado da rigidez da estrutura para o esquema de laminação  $[0^\circ/90^\circ]$ , onde o deslocamento radial se reduz para a metade do valor com uma lâmina a  $0^\circ$ .

## 6 CONCLUSÃO

Os testes da verificação de *locking* evidenciam um desempenho satisfatório do modelo GFEM(1) para as espessuras de interesse prático, embora apresentem um espaço menos eficaz para contornar este problema que aquele obtido pelo hp-clouds *Garcia et alli*<sup>15</sup>. Os resultados de convergência em placas isotrópicas, em norma, e para valores locais normalizados, mostram um bom desempenho do espaço de aproximação, além de pouca influência da distorção da malha. Os resultados para a casca cilíndrica de material composto laminado, embora tendo um caráter ilustrativo como foi observado, mostram um comportamento satisfatório dos modelos GFEM (1) e GFEM (3) na análise da problemática proposta. Não obstante pela brevidade do artigo não tenha sido possível explorar maiores detalhes dos modelos apresentados, de forma geral observou-se que os resultados apresentados estão dentro das expectativas.

## REFERENCES

- [1] A. Tessler and E. Saether, 'A computationally viable higher-order theory for laminated composite plates', International Journal of Numerical Methods in Engineering, 31, 1069-1086, (1991)

- [2] B. N. Pandya and T. Kant, '*A refined higher-order generally orthotropic  $C^0$  plate bending element*', Computer & Structures, 28(2): 119-133, (1988)
- [3] C. A. Duarte & J. T. Oden, '*An Adaptive Method Using Clouds*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 139, 237-262, (1996).
- [4] C. A. Duarte & J. T. Oden, '*Hp Clouds A Meshless Methods to Solve Boundary Value Problems*', TICAM Reports, (1995).
- [5] C. A. Duarte, I. Babuska and J. Oden, '*Generalized Finite Element Methods Three Dimensional Structural Mechanics Problems*', Computer & Structures, 77(2): 215-232, 2000.
- [6] E. Reissner, '*The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*', Journal of Applied Mechanics, 12(2): 69-77, (1945)
- [7] I. Babuska, B. Szabó and R. Actis, '*Hierarchic Models for Laminated Composites*', International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33, 503-535, (1992)
- [8] J. M. Melenk & I. Babuska, '*The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 139, 289-314, (1996)
- [9] J. N. Reddy, '*A simple higher-order theory for laminated composite plates*', Journal of Applied Mechanics, 51, 745-752(1984)
- [10] J. N. Reddy, '*A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation*', International Journal of Solids and Structures, 20(9-10): 881-886, (1984)
- [11] J. N. Reddy, '*Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*', John Wiley & Sons, New York, 1984
- [12] K. H. Lo, R. M. Cristensen and E. M. Wu, '*A higher theory of plate deformation, Part2: Laminated Plates*', Journal of Applied Mechanics, 44(5): 669-676, (1977)
- [13] K. S. Sivakumaran, S. H. Chowdhury and K. Vajarasathira, '*Some studies on finite elements for laminated composited plates*', Computer & Structures, 52(4): 729-741, (1994)
- [14] Marguerre, K. & Woernie, H. T., '*Elastic Plates*', Blaisdell Publishing Co., Walthom, 1969
- [15] N. J. Pagano and S. J. Hatfield; '*Elastic Behavior of multilayered bidirectional composite*', A. I. A. A. J., 10, 931-933, (1972)
- [16] O. Garcia, E. A. Fancello, Clovis S. Barcellos & C. A. Duarte, '*hp-Clouds in Mindlin's thick plate model*', International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47, 1381-1400, (2000)
- [17] P. Kryls & T. Belytschko, '*Analysis of Thin Shells by Element-Free Galerkin Method*', International Journal of Solids Structures, 33(20 22): 3057-3080, (1996).
- [18] R. Actis, B. Szabó & Schwab, '*Hierarchic Models for Laminated plates and shells*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 172, 79-107, (1999)
- [19] R. B. Pipes & N. J. Pagano; '*Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension*', Journal of Compsite Materials, 538-548, (1970)
- [20] S. Ahmad, B. M. Irons & O. C. Zienkiewicz, '*Analysis of thick and thin shell struc-*

- tures by curved finite elements* ', International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2, 419-451, (1970).
- [21] Shu Xiao-Ping, '*An improve simple higher-order theory for laminated composite shells* ', Computer & Structures, 60(3): 343-350, (1996)
- [22] T. Kant, D. R. J. Owen & O. C. Zienkiewicz, '*A refined higer-order  $C^0$  plate bending element* ', Computers and Structures, Vol.15,pag.177-183,(1982)
- [23] T. Kant & J. R. Kommineni, '*Geometrically non linear transient analysis of laminated and sandwich shells with a refined theory and  $C^0$  finite elements* ', Computer & Structures, 52(6): 1124-1252, (1994)
- [24] T. Kant & B.S. Manjunatha, '*On accurate estimation of transverse stress in multi-layer laminates* ', Computer & Structures, 50(3): 351-365, (1994)