

DETECCIÓN DE MÚLTIPLES FISURAS EN VIGAS VIBRANTES USANDO MASAS PUNTUALES

DETECTION OF MULTIPLE CRACKS IN VIBRATING BEAMS USING POINT MASSES

Maximiliano Carnelutto, Lucas, P. Manera y Javier, L. Raffo

*Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San
Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar,
<https://www.frd.utn.edu.ar/mecanica-computacional/>*

Palabras clave: Detección, fisuras, masas puntuales, vibraciones, restricciones elásticas.

Resumen. Se presenta un método para la detección de múltiples fisuras a partir de analizar el efecto que causa la presencia de una masa puntual en las vibraciones de vigas. Se utiliza un modelo de viga con masas puntuales y condiciones elásticas generales para desarrollar un método de detección de tres fisuras ubicadas en diferentes posiciones y profundidades. Se obtienen las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno de forma natural aplicando las técnicas del cálculo de variaciones, y se desarrolla el algoritmo de detección, a partir de los resultados numéricos obtenidos con el método variacional de Ritz.

Keywords: Detection, cracks, point masses, vibrations, elastic constraints.

Abstract. A detection method is presented for multiple cracks by analyzing the effect caused by the presence of a point mass in the vibration of beams. A beam model with point masses and general elastic restrictions is used to develop a detection method for three cracks located at different positions and crack depths. The differential equations and boundary conditions are obtained naturally with the application of the calculus of variations techniques, and the detection algorithm is developed based on the numerical results obtained with the Ritz variational method.

1. INTRODUCCIÓN

Las frecuencias naturales de una estructura, al igual que sus correspondientes formas modales son afectadas ante la presencia de fisuras en vigas. Mucho fue el esfuerzo realizado en la bibliografía para el desarrollo de métodos de detección de fisura asociado al cambio en los valores de las frecuencias naturales. A continuación se presenta solo algunos.

Raffo y Carrizo (2015), proponen un método analítico de detección de fisuras, a partir de valores de frecuencias naturales, obtenidos con la solución exacta, experimentalmente y por medio de elementos finitos. Por su parte, Nguyen (2016), propone un método de detección de fisuras en vigas dobles, con vínculos elásticos y una masa adosada, analizando el cambio en la frecuencia natural, utilizando una transformada para amplificarlo, y así detectar la fisura. Khiem y Hang (2018), obtienen una expresión exacta en el dominio de la frecuencia para la respuesta de una viga con múltiples fisuras sometida a una carga en movimiento armónico. Lupu et al. (2021), proponen un modelo de detección de fisuras utilizando las curvaturas modales de una viga intacta y la medición de las frecuencias naturales para la viga intacta y dañada para la evaluación de fisuras.

Por otro lado, Khiem et al. (2023), desarrollan un nuevo indicador para la identificación de fisuras, extraído de la función de respuesta de frecuencia de las estructuras de vigas. Analiza un coeficiente de coherencia calculado a partir de la función de respuesta en frecuencia de vigas intactas y dañadas y denomina un índice de daño espectral (SDI) para examinar la sensibilidad de la función de respuesta de frecuencia a las grietas. Origina un indicador de daño denominado criterio de garantía espectral (SAC) a partir del criterio de garantía de modo. Luego utiliza el SAC calculado para diferentes funciones de respuesta de frecuencia de la misma estructura dañada para detectar fisuras mediante el método de contorno.

Se observa en Carnelutto y Raffo (2023) un método de detección de fisuras analítico, directo utilizando una masa puntual adosada para condiciones de contorno generales para el caso de la presencia de una única fisura. En la bibliografía analizada, se observa que no hay desarrollado un método de detección de múltiples fisuras utilizando el efecto que causa la presencia de masas puntuales. Es por eso que en este trabajo se utiliza el modelo de viga que permite representar múltiples fisuras y masas puntuales combinado con condiciones de contorno elásticas. El problema de contorno y las ecuaciones diferenciales se obtuvieron de manera natural, utilizando la técnica del cálculo de variaciones, (Grossi, 2010). Y los resultados son obtenidos utilizando el método variacional de Ritz.

En el presente trabajo se utiliza el efecto que causa la presencia de una masa puntual en las vibraciones de vigas para la detección de múltiples fisuras, por medio de un método para detectar la presencia de varias fisuras en vigas vibrantes.

2. MODELO ANALÍTICO

Se plantea una viga Timoshenko, de longitud l y altura h con N tramos o subdominios, a distancias c_i arbitrarias se ubica una masa puntual m_i y resortes rotacionales conectados a ambos lados de la viga $r_{i,i+1}$ con $i = 1, \dots, N$ tal como se muestra en la figura 1. Para analizar el desplazamiento transversal de la viga, se supone que la posición de la viga en cualquier instante t está descripta por la función $w = w(x, t), \forall x \in [0, l]$.

Por otro lado la función que describe las rotaciones de la sección perpendicular a la línea neutra por flexión es: $\psi = \psi(x, t), \forall x \in ([0, c_1), (c_1, c_2), (c_2, l])$.

El problema de contorno del sistema se obtuvo mediante las técnicas del cálculo de variaciones (Raffo y Carnelutto, 2022), luego de aplicar al mismo las técnicas de métodos variacionales,

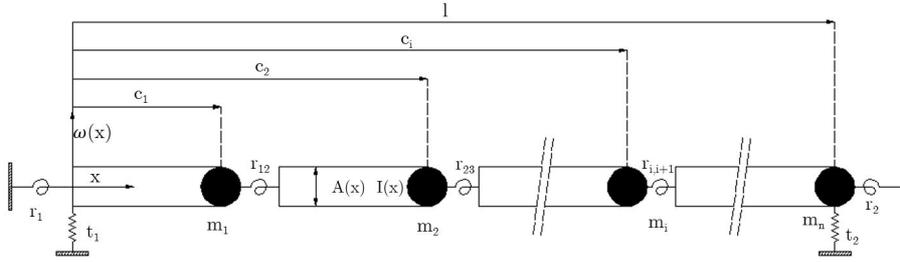


Figura 1: Sistema mecánico del método analítico propuesto.

y el método de separación de variables,

$$w(x, t) = l\bar{W}(x)e^{j\omega t} \quad (1)$$

$$\psi(x, t) = \Psi(x)e^{j\omega t} \quad (2)$$

Por simplicidad se adopta $\bar{W} = W$ y ω representa la frecuencia de oscilación en su estado libre. Se obtiene el siguiente problema de contorno variacional, donde $(\rho A)_i(x)$ denota la masa por unidad de longitud de cada tramo, $(EI)_i(x)$ corresponde a la rigidez a la flexión de cada tramo, $(\kappa GA)_i(x)$ a la rigidez axial de cada tramo.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[\frac{(\kappa GA)_i}{EI} l^2(\bar{x}) \left[\left(\Psi(\bar{x}) - \frac{dW}{d\bar{x}}(\bar{x}) \right) \bar{\Psi}(\bar{x}) + \left(\frac{dW}{d\bar{x}}(\bar{x}) - \Psi(\bar{x}) \right) \frac{d\bar{W}}{d\bar{x}}(\bar{x}) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(EI)_i}{EI} l^2(\bar{x}) \frac{d\Psi}{d\bar{x}}(\bar{x}) \frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}}(\bar{x}) \right] d\bar{x} + R_{i,i+1} (\Psi(\bar{c}_i^-) - \Psi(\bar{c}_i^+)) \bar{\Psi}(\bar{c}_i^-) + R_{i,i+1} (\Psi(\bar{c}_i^+) \right. \\ & \left. - \Psi(\bar{c}_i^-)) \bar{\Psi}(\bar{c}_i^+) \right] + R_1 \Psi(0) \bar{\Psi}(0) + R_2 \Psi(1) \bar{\Psi}(1) + T_1 W(0) \bar{W}(0) + T_2 W(1) \bar{W}(1) = \\ & = \sum_{i=1}^N \lambda_n^4 \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} \left(W(\bar{x}) \bar{W}(\bar{x}) + \frac{I_i}{A_i l^2} \Psi(\bar{x}) \bar{\Psi}(\bar{x}) \right) d\bar{x} + M_i W(\bar{c}_i^-) \bar{W}(\bar{c}_i^-) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

donde: $\bar{c}_i = c_i/l$, $R_{i,i+1} = \frac{r_{i,i+1}l}{(EI)_i}$, $M_i = \frac{m_i}{l(\rho A)_i}$, con $i = 1, 2, \dots, N$, $T_1 = \frac{t_1 l^3}{(EI)_1}$,
 $R_1 = \frac{r_1 l}{(EI)_1}$, $R_2 = \frac{r_2 l}{(EI)_3}$, $T_2 = \frac{t_2 l^3}{(EI)_3}$.

El coeficiente $\Omega_n = \sqrt{\frac{(\rho A)_i}{(EI)_i}} \omega_n l^2$, está relacionado con λ_n de la forma $\Omega_n = (\lambda_n)^2$, y corresponde al modo n de vibración.

Se desarrolla el algoritmo de cálculo aplicando el método de Ritz y utilizando polinomios simples como funciones aproximantes.

Para representar las fisuras abiertas se utiliza el modelo de [Khaji et al. \(2009\)](#), el cual define un valor de $R_{i,i+1}$ en función de la profundidad de la fisura y la esbeltez de la viga. Para una profundidad de fisura del 70%, con una relación de esbeltez $h/l = 0,25$, se obtiene $R_{i,i+1} = 0,5185$. Estos valores de $R_{i,i+1}$ y esbeltez, son los utilizados para todos los resultados presentados.

3. DETECCIÓN DE N FISURAS UTILIZANDO UNA MASA PUNTUAL

El objetivo del método es obtener una mayor amplitud de diferencia en las frecuencias de vibrar entre la viga sin fisura y con fisura. Para esto es que se agrega una masa puntual y se analiza en múltiples posiciones a esta diferencia, logrando así una mayor diferencia de amplitud de respuesta entre las vigas con y sin fisura. De esta manera, se logra identificar con mejor precisión a la fisura (Carrizo y Raffo, 2022).

El procedimiento realizado consiste en utilizar los primeros dos valores de coeficiente de frecuencia de la viga con fisura, variando la ubicación de la masa puntual, desde $\bar{x} = 0$ hasta $\bar{x} = 1$ con un paso $\Delta\bar{x}$. Luego se obtiene $\lambda(\bar{x}) = \frac{\lambda_c(\bar{x})}{\lambda}$, donde $\lambda_c(\bar{x})$ corresponde a los coeficientes de frecuencia de la viga con fisura y masa adosada, mientras que λ son los valores del coeficiente para una viga sin fisura y sin masa adosada.

Por otra parte, los coeficientes correspondientes a una viga sin fisura pero con masa adosada están dados por $\lambda_s(\bar{x}) = \frac{\lambda_n(\bar{x})}{\lambda}$, donde $\lambda_n(\bar{x})$ corresponde a los coeficientes de frecuencias obtenidos para la viga sin fisura pero con masa adosada.

Por otro lado, se calcula λ_f , que es

$$\lambda_f(\bar{x}) = \lambda(\bar{x}) - \lambda_s(\bar{x}). \quad (4)$$

Luego se obtiene la derivada primera y segunda de $\lambda_f(\bar{x})$, utilizando el método de aproximación por diferencia finita, que permitirán evidenciar los cambios de pendiente que se producen alrededor de las distintas fisuras, y así identificar los puntos donde existen máximos.

Se presenta el método y procedimiento de identificación de fisuras para el caso de una viga empotrada libre, con fisuras del 70% de profundidad, ubicadas en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, la masa $M_i = 1$, se irá colocando en las distintas posiciones \bar{x} , con un paso $\Delta\bar{x} = 0,025$, se presentan los primeros dos valores del coeficiente $\lambda(\bar{x})$ para cada posición \bar{x} de la masa puntual presentados en las tablas 1 a 4.

\bar{x}	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2	0,225	0,25
λ_1	0,637442	0,637441	0,637439	0,637434	0,637425	0,637409	0,637386	0,637353	0,636738	0,635526
λ_2	0,641937	0,641862	0,641684	0,641344	0,64077	0,639900	0,638619	0,636811	0,627063	0,614090

Tabla 1: Primeros dos valores de λ para una viga empotrada libre con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, con \bar{x} desde 0,025 a 0,25.

\bar{x}	0,275	0,3	0,325	0,35	0,375	0,4	0,425	0,45	0,475	0,5
λ_1	0,633709	0,631282	0,628252	0,624633	0,620447	0,615727	0,61051	0,604849	0,598791	0,59421
λ_2	0,599394	0,58412	0,569051	0,554677	0,541277	0,528981	0,517826	0,50778	0,498801	0,496015

Tabla 2: Primeros dos valores de λ para una viga empotrada libre con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, con \bar{x} desde 0,275 a 0,5.

\bar{x}	0,525	0,55	0,575	0,6	0,625	0,65	0,675	0,7	0,725	0,75
λ_1	0,59421	0,59585	0,597299	0,557343	0,547341	0,537363	0,527465	0,517692	0,508084	0,498672
λ_2	0,496015	0,501526	0,507353	0,522126	0,545670	0,568737	0,590336	0,609306	0,624497	0,635068

Tabla 3: Primeros dos valores de λ para una viga empotrada libre con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, con \bar{x} desde 0,525 a 0,75.

\bar{x}	0,775	0,8	0,825	0,85	0,875	0,9	0,925	0,95	0,975
λ_1	0,489480	0,480527	0,471827	0,463387	0,455213	0,447305	0,439663	0,432282	0,425157
λ_2	0,640735	0,641839	0,63917	0,63371	0,626388	0,617943	0,608952	0,59980	0,590777

Tabla 4: Primeros dos valores de λ para una viga empotrada libre con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, con \bar{x} desde 0,775 a 0,975.

Se procede a realizar la diferencia entre los valores obtenidos, para la viga fisurada con masa puntual ($\lambda(\bar{x})$) y los correspondientes a la viga sin fisura pero con masa puntual ($\lambda_s(\bar{x})$). Estos valores, $\lambda_f(\bar{x})$, se presentan en la Figura 2 en función de la posición \bar{x} de la masa, donde la curva azul corresponde al primer modo y la naranja al segundo modo.

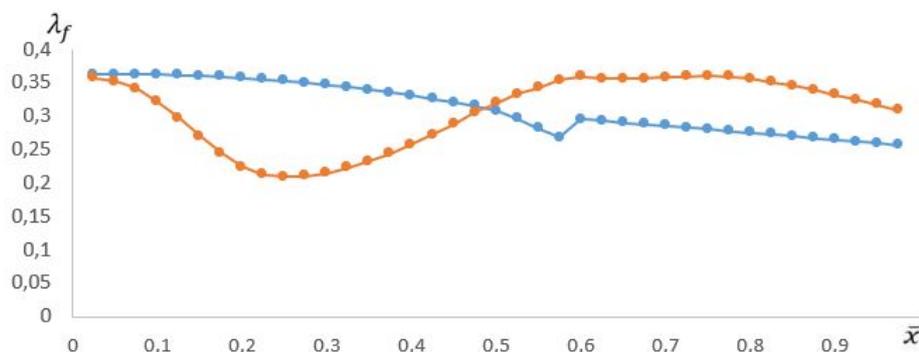


Figura 2: Gráfica de λ_f para distintas posiciones de la masa, con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, donde la curva azul corresponde al modo 1 y la naranja al modo 2.

En la Figura 3 se presenta la derivada de la función diferencia, $\lambda_f'(\bar{x})$ normalizada.

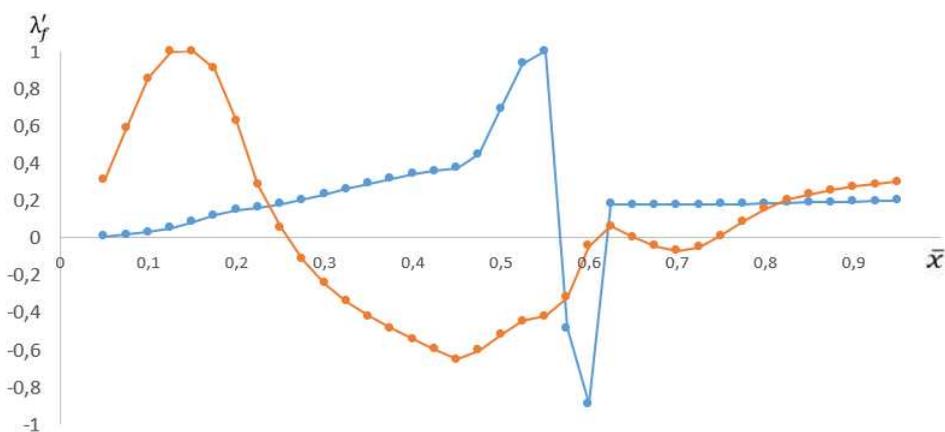


Figura 3: Gráfica de λ'_f para distintas posiciones de la masa, con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, donde la curva azul representa el resultado del modo 1 y la naranja del modo 2.

Por otro lado, se calcula la derivada segunda de $\lambda_f(\bar{x})$, y se normaliza. Al tener mas de una fisura, en el caso del primer modo, se amplifica la zona del gráfico en $x = 0,2$ para poder tener mayor apreciación. Tal como se muestra en la Figura 4.

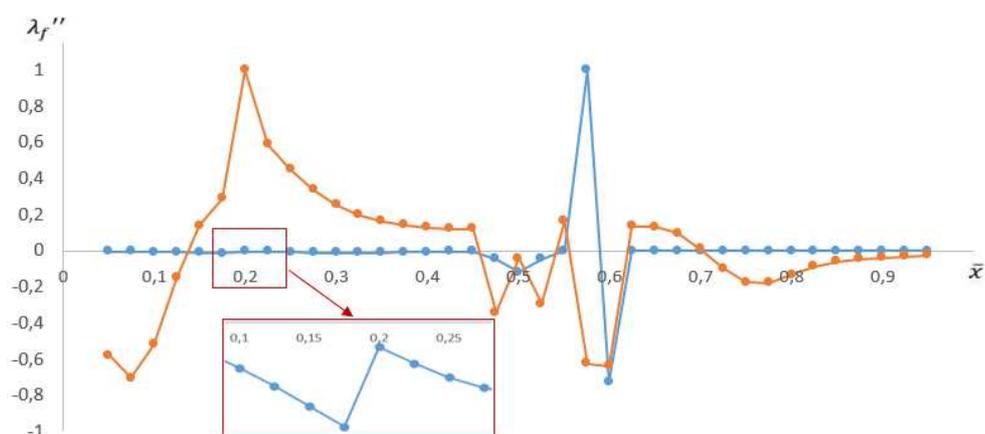


Figura 4: Gráfica de λ_f'' para distintas posiciones de la masa, con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, donde la curva azul representa el resultado del modo 1 y la naranja del modo 2.

De esta manera el procedimiento permite identificar las posiciones de las fisuras presentes en vigas al observar los saltos o picos presentes en las derivadas primera y segunda del coeficiente λ_f .

4. RESULTADOS Y COMENTARIOS

Se presentan resultados obtenidos para la viga con distintas condiciones de borde y posiciones de fisuras.

4.1. Viga Empotrada-Libre

En primer lugar se ven los resultados para un caso Empotrado-libre, donde $T_1 = R_1 = \infty$ y $T_2 = R_2 = 0$, con fisuras en $\bar{x} = 0,3$, $\bar{x} = 0,6$ y $\bar{x} = 0,7$.

Tal como se puede apreciar, analizando el caso empotrada-libre, en la Figura 5, en $\bar{x} = 0,3$, $\bar{x} = 0,6$ y $\bar{x} = 0,7$, se producen cambios muy leves en cierto punto de la función pero no nos permite apreciar nada relevante en principio. En la Figura 6, se aprecian con mayor claridad cuales son los puntos de interés que evidencian cambios en la pendiente de la función original, mientras que en la Figura 7, se producen picos más marcados, en los puntos de interés, debido a la derivada segunda, lo que nos permite determinar la existencia de fisuras en dichos puntos.

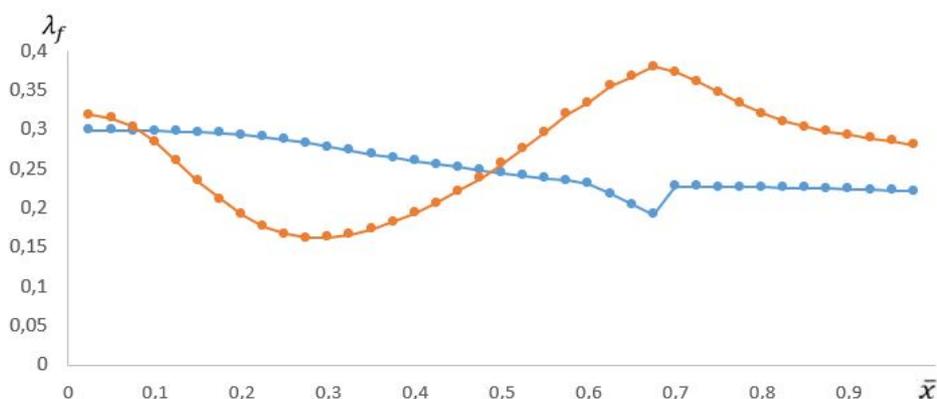


Figura 5: Gráfica de λ_f para distintas posiciones de la masa, para una viga empotrada-libre con fisuras en $\bar{x} = 0,3$, $\bar{x} = 0,6$ y $\bar{x} = 0,7$, donde la curva azul representa el valor del modo 1 y la naranja del modo 2.

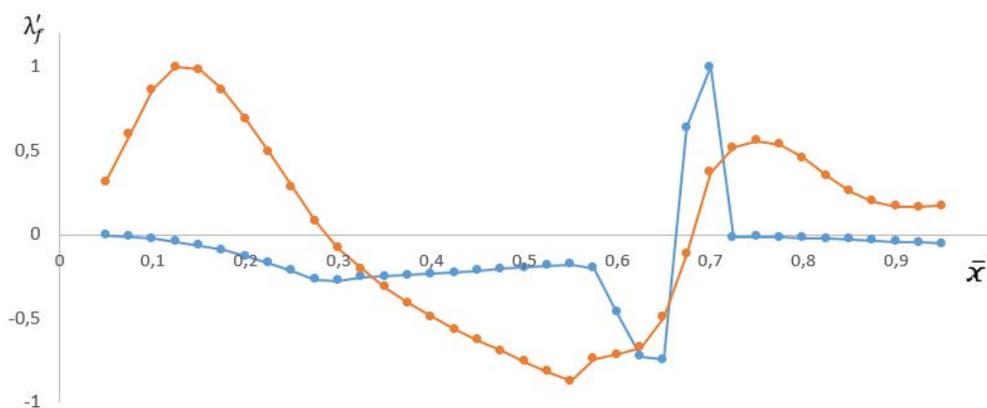


Figura 6: Gráfica de λ'_f para distintas posiciones de la masa, para una viga empotrada-libre con fisuras en $\bar{x} = 0,3$, $\bar{x} = 0,6$ y $\bar{x} = 0,7$, donde la curva azul representa al modo 1 y la naranja al modo 2.

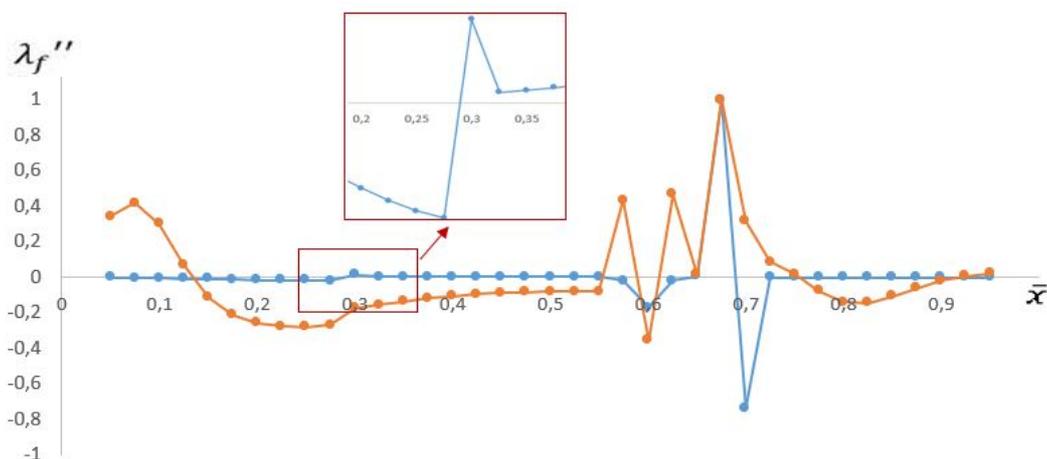


Figura 7: Gráfica de λ''_f para distintas posiciones de la masa, para una viga empotrada-libre con fisuras en $\bar{x} = 0,3$, $\bar{x} = 0,6$ y $\bar{x} = 0,7$, donde la curva azul representa al modo 1 y la naranja al modo 2.

4.2. Viga Simplemente apoyada

Se muestran las gráficas para un caso simplemente apoyado, donde $T_1 = T_2 = \infty$ y $R_1 = R_2 = 0$, con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,4$ y $\bar{x} = 0,8$.

Al analizar las Figuras 8, 9 y 10, que corresponden al caso de una viga simplemente apoyada, se observa que se producen saltos y picos en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,4$ y $\bar{x} = 0,8$, y de esta manera determina que dichas posiciones corresponden con las ubicaciones de las fisuras.

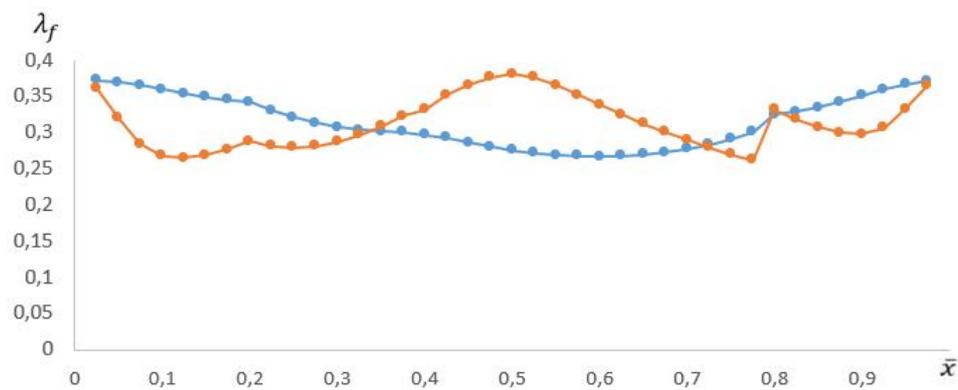


Figura 8: Gráfica de λ_f para distintas posiciones de la masa, para una viga simplemente apoyada con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,4$ y $\bar{x} = 0,8$, donde la curva azul representa el valor del modo 1 y la naranja del modo 2.

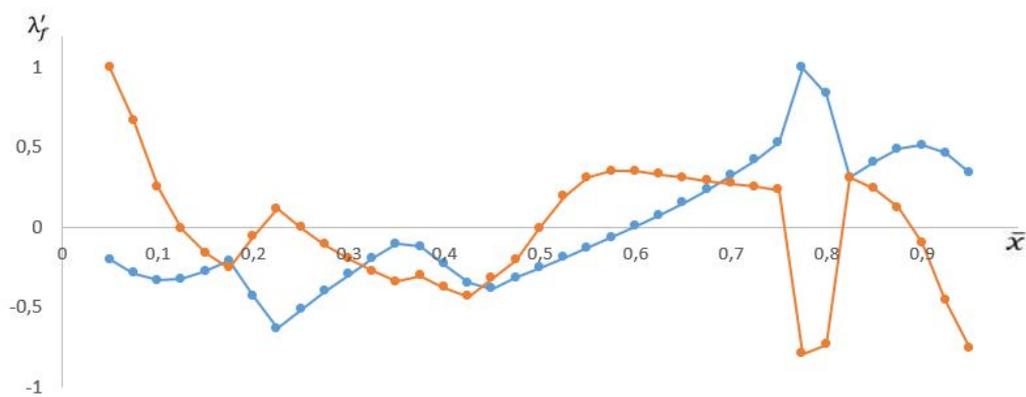


Figura 9: Gráfica de λ'_f para distintas posiciones de la masa, para una viga simplemente apoyada con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,4$ y $\bar{x} = 0,8$, donde la curva azul representa al modo 1 y la naranja al modo 2.

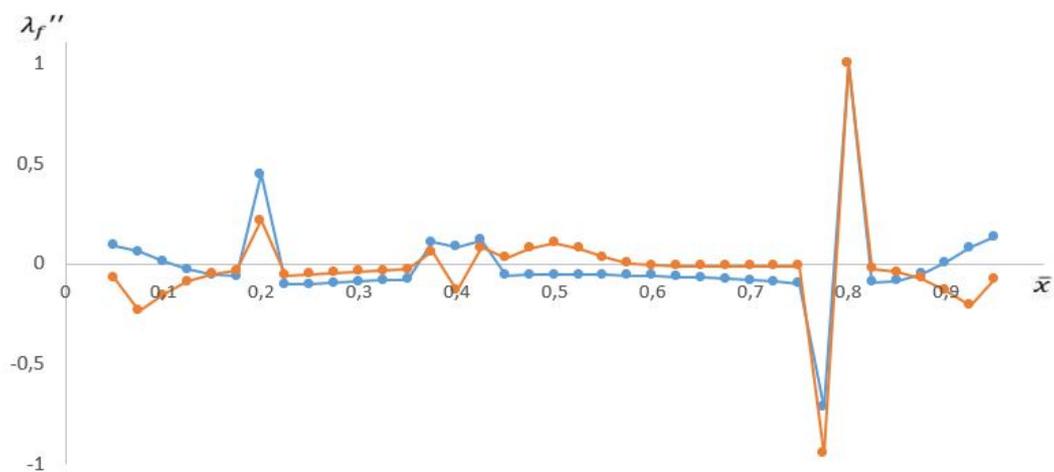


Figura 10: Gráfica de λ''_f para distintas posiciones de la masa, para una viga simplemente apoyada con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,4$ y $\bar{x} = 0,8$, donde la curva azul representa al modo 1 y la naranja al modo 2.

4.3. Viga Empotrada-Simplemente apoyada

Por otro lado, se presentan los resultados para un caso Empotrado-Simplemente apoyado, donde $T_1 = R_1 = \infty$ y $T_2 = \infty$ y $R_2 = 0$, con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$.

Si se analizan las Figuras 11, 12 y 13, del caso empotrado-simplemente apoyado, se puede observar, tal como en los casos anteriores, que los cambios de pendiente y picos de las funciones, corresponden a las posiciones de las fisuras.

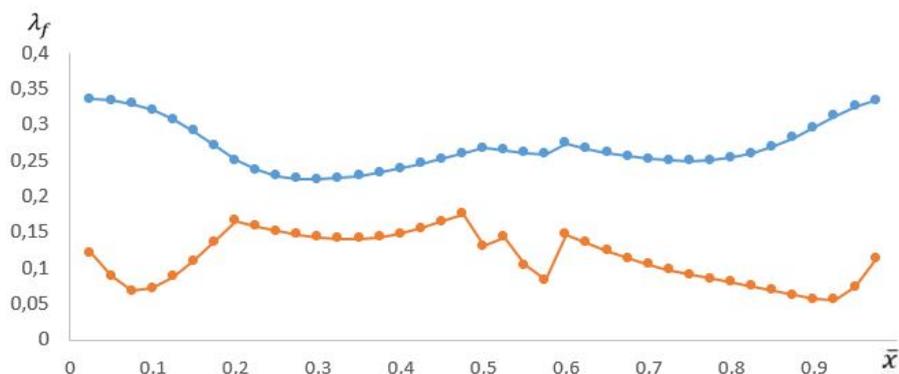


Figura 11: Gráfica de λ_f para distintas posiciones de la masa, para una viga empotrada-simplemente apoyada con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, donde la curva azul representa el valor de modo 1 y la naranja del modo 2.

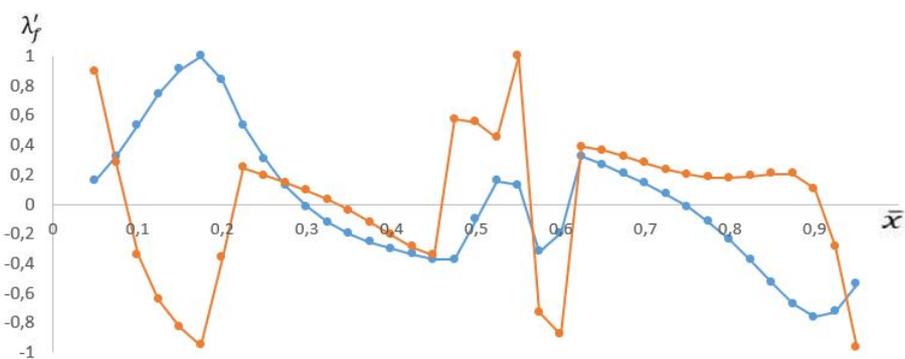


Figura 12: Gráfica de λ'_f para distintas posiciones de la masa, para una viga empotrada-simplemente apoyada con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, donde la curva azul representa al modo 1 y la naranja al modo 2.

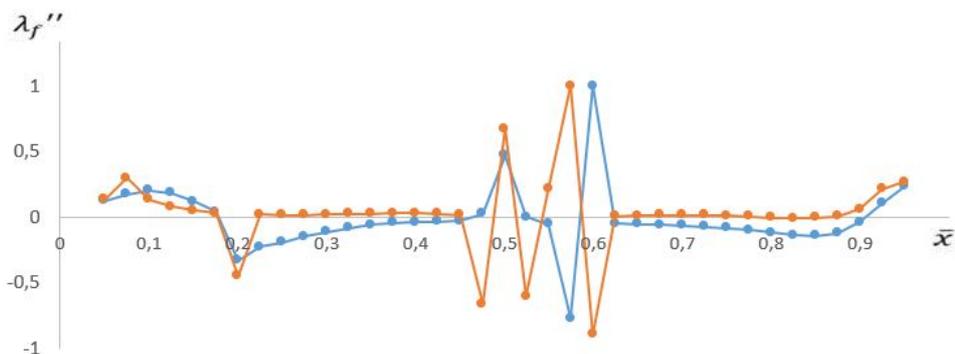


Figura 13: Gráfica de λ''_f para distintas posiciones de la masa, para una viga empotrada-simplemente apoyada con fisuras en $\bar{x} = 0,2$, $\bar{x} = 0,5$ y $\bar{x} = 0,6$, donde la curva azul representa al modo 1 y la naranja al modo 2.

5. CONCLUSIONES

El método presentado permite identificar la ubicación de múltiples fisuras abiertas en una viga de tipo Timoshenko, con distintas condiciones de borde.

El método propone obtener la frecuencia natural de una viga con fisuras para una masa puntual que se ubica en diferentes posiciones a lo largo de la viga. Estos resultados son comparados respecto a la viga sin fisura y obtenidas sus primeras dos derivadas. Al hacer un análisis de los tres gráficos que se presentan, $\lambda_f(\bar{x})$, $\lambda'_f(\bar{x})$ y $\lambda''_f(\bar{x})$ se demuestra que para los casos analizados, se detecta con muy buena precisión la ubicación de las fisuras.

Se analizó una viga empotrada-libre, simplemente apoyada y empotrada-simplemente apoyada, con tres fisuras en posiciones asimétricas. Las vigas presentan una esbeltez $h/l = 0,25$, una profundidad de fisura de 70 % y se utilizó una masa adimensional $M_i = 1$.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado gracias al apoyo del CONICET y de la Facultad Regional Delta de la Universidad Tecnológica Nacional, dentro de los proyectos ECTCDE0008719 y ASTC-DE0010205TC

REFERENCIAS

- Carnelutto M. y Raffo J.L. Detección de fisuras en vigas vibrantes utilizando masas puntuales. *AMCA*, 40:111–120, 2023.
- Carrizo M.R. y Raffo J.L. A direct based method with an analytical capability parameter to detect open cracks on free vibrating beams. *NED University Journal of Research*, 19:49–60, 2022.
- Grossi R. *Cálculo de variaciones. Teoría y Aplicaciones*. CIMNE, Barcelona, 2010.
- Khaji N., Shafiei M., y Jalalpour M. Closed-form solutions for crack detection problem of timoshenko beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51:667–681, 2009.
- Khiem N.T., Hai T.T., K. T.L., Lan N., y Quyet H. A novel criterion for crack detection beam structures by frequency response functions. *Vietnam Journal of Mechanics*, 45:273–286, 2023.
- Khiem N.T. y Hang P.T. Analysis and identification of multiple-cracked beam subjected to moving harmonic load. *Journal of Vibration and Control*, 24:2782–2801, 2018.
- Lupu D., Gillich G.R., Nedelcu D., Gillich N., y Manescu T. A method to detect cracks in the beams with imperfect boundary conditions. En *International Conference of Applied Sciences, Journal of Physics*. 2021.
- Nguyen K.V. Crack detection of a double-beam carrying a concentrated mass. *Mechanics Research Communications*, 75:20–28, 2016.
- Raffo J.L. y Carnelutto M. Análisis de vibraciones libres de soportes cortos con masas y restricciones elásticas generales. *AMCA*, 39:231–240, 2022.
- Raffo J.L. y Carrizo M.R. Método analítico de detección de fisuras en vigas vibrantes. *Revista Argentina de Ingeniería CONFEDI*, 5, 2015.