

SOLUCIONES ANALÍTICAS Y NUMÉRICAS PARA UN PROBLEMA DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN MATERIALES BICAPA

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS FOR A HEAT TRANSFER PROBLEM IN TWO-LAYER MATERIALS

Domingo A. Tarzia^{a,b}, Guillermo F. Umbricht^{a,b} y Diana Rubio^c

^aConsejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Godoy Cruz 2290, CABA,
C1425FQB Buenos Aires, Argentina, DTarzia@austral.edu.ar, <https://www.conicet.gov.ar>

^bDepartamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay
1950, Rosario, S2000FZF Santa Fe, Argentina, guilleungs@yahoo.com.ar, //
<https://www.austral.edu.ar/rosario>

^cInstituto de Tecnologías Emergentes y Ciencias Aplicadas (UNSAM-CONICET), Centro de
Matemática Aplicada, Escuela de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de San Martín, 25 de
mayo y Francia, B1650 San Martín, Buenos Aires, drubio@unsam.edu.ar, <https://iteca.conicet.gov.ar>

Palabras clave: Transferencia de calor, Materiales compuestos, Resistencia térmica.

Resumen. Este artículo presenta un análisis teórico de un problema de transferencia de calor unidimensional en un material bicapa con difusión, advección, generación o pérdida de calor interna linealmente dependiente de la temperatura en cada capa, y generación de calor debido a fuentes externas. Además, se considera la resistencia térmica ofrecida por la interfaz entre los materiales. La situación de interés se modela matemáticamente, se encuentran soluciones analíticas explícitas utilizando técnicas de Fourier, y se formula un esquema de diferencias finitas convergente para simular casos particulares. La solución es coherente con resultados previos. Se incluye un ejemplo numérico que muestra coherencia entre los resultados obtenidos y la física del problema. Las conclusiones extraídas en este trabajo amplían la comprensión teórica de la transferencia de calor en materiales bicapa y también pueden contribuir a mejorar el diseño térmico de sistemas de ingeniería multicapa.

Keywords: Heat transfer, Composite materials, Thermal resistance.

Abstract. This article presents a theoretical analysis of a heat transfer problem in bilayer material with diffusion, advection, internal heat generation or loss linearly dependent on temperature in each layer, and heat generation due to external sources. Additionally, the thermal resistance offered by the interface between the materials is considered. The situation of interest is modeled mathematically, explicit analytical solutions are found using Fourier techniques, and a convergent finite difference scheme is formulated to simulate particular cases. The solution is consistent with previous results. A numerical example is included that shows coherence between the obtained results and the physics of the problem. The conclusions drawn in this work expand the theoretical understanding of two-layer heat transfer and may also contribute to improving the thermal design of multilayer engineering systems.

1. INTRODUCCIÓN

El modelado matemático de problemas de transferencia de calor en materiales multicapa ha sido muy estudiado recientemente (Yuan et al., 2022; Carson, 2022; Zhou et al., 2021; Yavaraj, 2023) debido a las numerosas aplicaciones en diversos campos de la ciencia, ingeniería e industria. La variedad de aplicaciones es evidente en los numerosos artículos encontrados en la literatura en diferentes campos. Por ejemplo: técnicas de limpieza de lana (Caunce et al., 2008), contaminación en medios porosos (Liu y Ball, 1998; Liu y Si, 2008), estudio de la permeabilidad de la piel (Mitragotri et al., 2011), análisis de liberación de fármacos en stents (McGinty et al., 2011), estudio de emisiones de gases de efecto invernadero (Liu y Si, 2009), estudio de la humedad en tejidos compuestos (Pasupuleti et al., 2011), crecimiento de tumores (Mantzavinos et al., 2016), conducción de calor a través de la piel (Becker, 2012), análisis de celdas de ion-litio (Bandhauer et al., 2011), microelectrónica (Choobineh y Jain, 2015), entre otros.

Un estado del arte relevante y actualizado en la transferencia de materiales multicapa y las técnicas matemáticas utilizadas se puede ver en (Monte, 2000, 2002; Jain et al., 2021). Estos problemas han sido abordados analíticamente por diferentes métodos, entre ellos el método de imágenes recursivas (Dias, 2015), el método de separación de variables (Zhou et al., 2021; Hickson et al., 2009; Monte, 2000, 2002; Rubio et al., 2021), la solución usando funciones integrales (Rodrigo y Worthy, 2016). También se han utilizado técnicas numéricas, el método de soluciones fundamentales (Johansson y Lesnic, 2009), diferencias finitas y elementos finitos (Yuan et al., 2022; Hickson et al., 2009; Rubio et al., 2021).

Aunque la bibliografía sobre problemas de transporte de materiales multicapa es abundante, es incompleta porque carece de generalidad. La mayoría de los artículos citados anteriormente consideran solo la difusión, descuidando términos disipativos y fuentes de la ecuación parabólica completa. Además, la mayoría de ellos no consideran la resistencia ofrecida por la interfaz. Como ejemplo, ver (Jain et al., 2021), donde los autores hacen un buen trabajo estudiando un proceso de transferencia de calor en materiales multicapa pero no incluyen en el análisis ni la presencia de fuentes externas ni la resistencia térmica de contacto. Otros artículos consideran problemas de transferencia de calor en materiales multicapa pero solo tienen en cuenta el estado estacionario (Umbrecht et al., 2022a; Rubio et al., 2022; Umbrecht et al., 2022b, 2021, 2020b).

Es necesario analizar la influencia de la fuente externa, los términos disipativos y la resistencia térmica por contacto, ya que los procesos físicos clave en transferencia de calor en materiales multicapa incluyen la difusión, la advección, la generación o consumo interno de calor y la generación de calor debido a fuentes externas. La tasa de generación interna de calor o consumo a menudo se considera proporcional a la temperatura local. Algunos procesos modelados de esta manera son: una reacción química con cinética de primer orden (Shah et al., 2016; Esho et al., 2018), el término de perfusión de la ecuación de biocalor (Pennes et al., 1948), y la ecuación de aletas (Becker y Herwing, 2013). El término advectivo es común en varios procesos de transferencia, como en una batería de flujo (Skylas-Kazacos et al., 2011). Por otro lado, el término fuente es útil para modelar diferentes procesos donde se entrega calor al sistema (Kim, 2020).

Este trabajo propone estudiar matemáticamente la transferencia de calor transitoria de un cuerpo bicapa gobernado por una ecuación de Convección-Difusión-Reacción-Fuente (CDRS). Se consideran la difusión, la advección, la generación o pérdida interna de calor, la generación de calor a partir de fuentes externas y la resistencia térmica por contacto ofrecida por la interfaz. Se obtiene una expresión analítica para la solución del problema estudiado, que es consistente con resultados previos. Además, el enfoque numérico propuesto tiene como objetivo simular soluciones para estudios de casos específicos utilizando métodos de diferencias finitas.

2. MODELADO MATEMÁTICO

Se estudia la transferencia de calor en un cuerpo bicapa unidimensional. Se tiene en cuenta la ganancia o pérdida de calor dentro de cada capa a una tasa proporcional a la temperatura local y la advección impulsada por un flujo unidimensional de fluido. Además, se asume que se genera calor desde fuentes externas. La longitud del cuerpo bicapa es $x = L$ y la interfaz se encuentra en $x = l$, donde $L > l$. La ecuación de conservación de energía que representa un equilibrio entre la difusión, la advección, la ganancia o pérdida interna de calor, y la generación de calor a partir de fuentes externas puede escribirse como:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial t}(x, t) = D_1 T_1(x, t) + s_1(x, t), & (x, t) \in (0, l) \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial T_2}{\partial t}(x, t) = D_2 T_2(x, t) + s_2(x, t), & (x, t) \in (l, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (1)$$

donde D_m [Umbricht y Rubio \(2021\)](#) es un operador diferencial definido por:

$$D_m T_m(x, t) := \alpha_m \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2}(x, t) - \beta_m \frac{\partial T_m}{\partial x}(x, t) + \nu_m T_m(x, t), \quad m = 1, 2. \quad (2)$$

En las ecuaciones (CDRS) (1)-(2), los subíndices se refieren al número de capa, donde x y t representan las variables espacial y temporal, respectivamente. Las funciones T_1 y T_2 representan la temperatura sobre la temperatura ambiente. Los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación (2) representan la transferencia de calor debido a la difusión y la advección, respectivamente, y el tercer término representa la ganancia o consumo interno de calor proporcional a la temperatura local. El coeficiente α_m denota la difusividad térmica, β_m representa la velocidad de flujo, y ν_m corresponde a la tasa de ganancia o pérdida interna de calor. Las funciones diferenciables s_i dadas en (1) modelan una fuente externa que entrega calor al cuerpo. Se asume, además, que todas las propiedades son independientes de la temperatura.

Se genera calor debido a las fuentes externas y se pierde o se gana calor dentro de cada capa a una tasa proporcional a la temperatura local. La transferencia de calor ocurre dentro de este cuerpo debido a la difusión y la advección impulsada por un flujo unidimensional impuesto en cada capa de izquierda a derecha. Se asumen condiciones de frontera convectivas generales en los límites izquierdo y derecho, respectivamente.

$$\begin{cases} \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(x, t) = h_1 T_1(x, t) + \rho_1 C_1 \beta_1 T_1(x, t), & x = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x, t) = -h_2 T_2(x, t) + \rho_2 C_2 \beta_2 T_2(x, t), & x = L, \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3)$$

donde κ_m , h_m , ρ_m y C_m denotan: la conductividad térmica, el coeficiente convectivo, la densidad y el calor específico a presión constante. Las condiciones de interfaz se obtienen a partir del salto térmico y la conservación de energía que se describen mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} T_2(x, t) = T_1(x, t) + R \frac{\partial T_1}{\partial x}(x, t), & x = l, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x, t) - \rho_2 C_2 \beta_2 T_2(x, t) = \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(x, t) - \rho_1 C_1 \beta_1 T_1(x, t), & x = l, \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4)$$

donde R denota el valor de la resistencia térmica de contacto ofrecida por la unión de los materiales. Finalmente, se asume una distribución espacial inicial de temperatura en cada capa.

$$\begin{cases} T_1(x, t) = T_{1,0}(x), & x \in [0, l], \quad t = 0, \\ T_2(x, t) = T_{2,0}(x), & x \in [l, L], \quad t = 0. \end{cases} \quad (5)$$

3. SOLUCIÓN ANALÍTICA

Se puede adimensionalizar el problema (1)-(5), a partir de los siguientes parámetros:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{L}, & \bar{l} = \frac{l}{L}, & \bar{R} = \frac{R}{L}, & \tau = \frac{\alpha_2}{L^2} t, & \theta_m = \frac{T_m}{T_r}, & \bar{\alpha} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, & Pe_m = \frac{L}{\alpha_2} \beta_m, \\ \bar{\nu}_m = \frac{L^2}{\alpha_2} \nu_m, & \bar{s}_m = \frac{L^2}{T_r \alpha_2} s_m, & \bar{\kappa} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, & Bi_m = \frac{L}{\kappa_2} h_m, \end{cases} \quad (6)$$

donde Pe_m y Bi_m ($m = 1, 2$) denotan los números de Péclet y Biot, respectivamente, y el parámetro T_r representa cualquier temperatura de referencia. Esta transformación de variables se introduce en las ecuaciones (1)-(5), y se obtiene el siguiente sistema adimensional:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau}(y, \tau) = \bar{D}_1 \theta_1(y, \tau) + \bar{s}_1(y, \tau), & (y, \tau) \in (0, \bar{l}) \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}(y, \tau) = \bar{D}_2 \theta_2(y, \tau) + \bar{s}_2(y, \tau), & (y, \tau) \in (\bar{l}, 1) \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial y}(y, \tau) = Bi_1^* \theta_1(y, \tau), & y = 0, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial y}(y, \tau) = Bi_2^* \theta_2(y, \tau), & y = 1, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \theta_2(y, \tau) = \theta_1(y, \tau) + \bar{R} \frac{\partial \theta_1}{\partial y}(y, \tau), & y = \bar{l}, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial y}(y, \tau) = \gamma \theta_1(y, \tau) + \sigma \frac{\partial \theta_1}{\partial y}(y, \tau), & y = \bar{l}, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \theta_1(y, \tau) = \theta_{1,0}(y), & y \in [0, \bar{l}], \tau = 0, \\ \theta_2(y, \tau) = \theta_{2,0}(y), & y \in [\bar{l}, 1], \tau = 0, \end{cases} \quad (7)$$

donde

$$\begin{cases} \bar{D}_1 \theta_1(y, \tau) = \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2}(y, \tau) - Pe_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y}(y, \tau) + \bar{\nu}_1 \theta_1(y, \tau), \\ \bar{D}_2 \theta_2(y, \tau) = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2}(y, \tau) - Pe_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y}(y, \tau) + \bar{\nu}_2 \theta_2(y, \tau) \end{cases} \quad (8)$$

y

$$Bi_1^* = \frac{Pe_2}{\bar{\alpha}} + \frac{Bi_1}{\bar{\kappa}}, \quad Bi_2^* = Pe_2 - Bi_2, \quad \gamma = Pe_2 - Pe_1 \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\alpha}}, \quad \sigma = \bar{\kappa} + \bar{R} Pe_2. \quad (9)$$

El término advectivo puede eliminarse de la ecuación (8). Para ello, se utiliza,

$$\begin{cases} \theta_1(y, \tau) = \exp(\chi_1 y) \Theta_1(y, \tau), & (y, \tau) \in [0, \bar{l}] \times [0, +\infty), \\ \theta_2(y, \tau) = \exp(\chi_2 y) \Theta_2(y, \tau), & (y, \tau) \in [\bar{l}, 1] \times [0, +\infty), \end{cases} \quad (10)$$

donde

$$\chi_1 = \frac{Pe_1}{2\bar{\alpha}}, \quad \chi_2 = \frac{Pe_2}{2}. \quad (11)$$

El cambio de variables (10)-(11) se utiliza en (7)-(9), dando lugar al siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau}(y, \tau) = \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y^2}(y, \tau) + \psi_1 \Theta_1(y, \tau) + \hat{s}_1(y, \tau), & (y, \tau) \in (0, \bar{l}) \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau}(y, \tau) = \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial y^2}(y, \tau) + \psi_2 \Theta_2(y, \tau) + \hat{s}_2(y, \tau), & (y, \tau) \in (\bar{l}, 1) \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial y}(y, \tau) = \bar{B}i_1 \Theta_1(y, \tau), & y = 0, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial y}(y, \tau) = \bar{B}i_2 \Theta_2(y, \tau), & y = 1, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \Theta_2(y, \tau) = \phi \Theta_1(y, \tau) + \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial y}(y, \tau), & y = \bar{l}, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial y}(y, \tau) = \eta \Theta_1(y, \tau) + \varphi \frac{\partial \Theta_1}{\partial y}(y, \tau), & y = \bar{l}, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \Theta_1(y, \tau) = \Theta_{1,0}(y), & y \in [0, \bar{l}], \tau = 0, \\ \Theta_2(y, \tau) = \Theta_{2,0}(y), & y \in [\bar{l}, 1], \tau = 0, \end{array} \right. \quad (12)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = \bar{\nu}_1 - \bar{\alpha} \chi_1^2, \quad \psi_2 = \bar{\nu}_2 - \chi_2^2, \quad \hat{s}_1(y, \tau) = \bar{s}_1(y, \tau) \exp(-\chi_1 y), \\ \hat{s}_2(y, \tau) = \bar{s}_2(y, \tau) \exp(-\chi_2 y), \quad \bar{B}i_1 = Bi_1^* - \chi_1, \quad \bar{B}i_2 = Bi_2^* - \chi_2, \\ \phi = \xi \delta, \quad \mu = \xi \bar{R}, \quad \eta = \xi (\gamma + \sigma \chi_1 - \delta \chi_2), \quad \varphi = \xi (\sigma - \bar{R} \chi_2), \\ \xi = \exp(\bar{l}(\chi_1 - \chi_2)), \quad \delta = 1 + \bar{R} \chi_1, \quad \Theta_{1,0}(y) = \theta_{1,0}(y) \exp(-\chi_1 y), \\ \Theta_{2,0}(y) = \theta_{2,0}(y) \exp(-\chi_2 y). \end{array} \right. \quad (13)$$

El sistema homogéneo asociado a (12)-(13) es considerado, es decir, sin los términos fuente $\hat{s}_1(y, \tau)$ y $\hat{s}_2(y, \tau)$. Este sistema homogéneo se aborda mediante el método de separación de variables. Se asume que existen funciones $f_{1,n}, f_{2,n}$ y g_n tales que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Theta_1^H(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1,n}(y) g_n(\tau), & (y, \tau) \in (0, \bar{l}) \times \mathbb{R}^+, \\ \Theta_2^H(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2,n}(y) g_n(\tau), & (y, \tau) \in (\bar{l}, 1) \times \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en el sistema homogéneo asociado a (12)-(13), se puede demostrar que $g_n(\tau) = K_n \exp(-\lambda_n^2 \tau)$, donde λ_n son los autovalores. Además, las funciones $f_{m,n}$ satisfacen

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_{1,n} = \cos(\omega_{1,n} y) + \frac{\bar{B}i_1}{\omega_{1,n}} \sin(\omega_{1,n} y), & y \in [0, \bar{l}], \\ f_{2,n} = A_n \cos(\omega_{2,n} y) + B_n \sin(\omega_{2,n} y), & y \in [\bar{l}, 1]. \end{array} \right. \quad (15)$$

donde

$$A_n = \frac{\sin(\omega_{1,n} \bar{l})}{\cos(\omega_{2,n} \bar{l})} \left(\phi \frac{\bar{B}i_1}{\omega_{1,n}} - \mu \omega_{1,n} \right) + \frac{\cos(\omega_{1,n} \bar{l})}{\cos(\omega_{2,n} \bar{l})} (\phi + \mu \bar{B}i_1) - \tan(\omega_{2,n} \bar{l}) B_n, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} B_n = & \sin(\omega_{2,n} \bar{l}) \left[\sin(\omega_{1,n} \bar{l}) \left(\phi \frac{\bar{B}i_1}{\omega_{1,n}} - \mu \omega_{1,n} \right) + \cos(\omega_{1,n} \bar{l}) (\phi + \mu \bar{B}i_1) \right] \\ & + \frac{\cos(\omega_{2,n} \bar{l})}{\omega_{2,n}} \left[\sin(\omega_{1,n} \bar{l}) \left(\eta \frac{\bar{B}i_1}{\omega_{1,n}} - \varphi \omega_{1,n} \right) + \cos(\omega_{1,n} \bar{l}) (\eta + \varphi \bar{B}i_1) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

con $\omega_{m,n}$ con $m = 1, 2$ son los valores propios espaciales, dados por

$$\begin{cases} \omega_{1,n} = \omega_{1,n}(\lambda_n) = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + \psi_1}{\bar{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + \bar{\nu}_1 - \bar{\alpha}\chi_1^2}{\bar{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + \bar{\nu}_1 - \frac{Pe_1^2}{4\bar{\alpha}}}{\bar{\alpha}}}, \\ \omega_{2,n} = \omega_{2,n}(\lambda_n) = \sqrt{\lambda_n^2 + \psi_2} = \sqrt{\lambda_n^2 + \bar{\nu}_2 - \chi_2^2} = \sqrt{\lambda_n^2 + \bar{\nu}_2 - \frac{Pe_2^2}{4}}. \end{cases} \quad (18)$$

Los autovalores λ_n son las soluciones de la ecuación trascendental de autovalores dada por:

$$\tan(\omega_{2,n}) = \frac{\omega_{2,n} B_n - \bar{B}i_2 A_n}{\bar{B}i_2 B_n + \omega_{2,n} A_n}, \quad (19)$$

Para encontrar la solución del sistema no homogéneo (12)-(13), se utiliza el método de Fourier. Es decir, se asume que existen $\bar{A}_n(\tau)$ y $\bar{B}_n(\tau)$ tales que

$$\begin{cases} \Theta_1(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n(\tau) f_{1,n}(y), & (y, \tau) \in [0, \bar{l}] \times \mathbb{R}^+, \\ \Theta_2(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n(\tau) f_{2,n}(y), & (y, \tau) \in [\bar{l}, 1] \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (20)$$

Las fuentes $\hat{s}_1(y, \tau)$ y $\hat{s}_2(y, \tau)$ en (12) se desarrollan en serie de autofunciones.

$$\begin{cases} \hat{s}_1(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{1,n}(\tau) f_{1,n}(y), & (y, \tau) \in [0, \bar{l}] \times \mathbb{R}^+, \\ \hat{s}_2(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{2,n}(\tau) f_{2,n}(y), & (y, \tau) \in [\bar{l}, 1] \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (21)$$

donde $S_{1,n}(\tau)$ y $S_{2,n}(\tau)$ se definen de la siguiente manera:

$$S_{1,n}(\tau) = \frac{\int_0^{\bar{l}} \hat{s}_1(y, \tau) f_{1,n}(y) dy}{\int_0^{\bar{l}} f_{1,n}^2(y) dy}, \quad S_{2,n}(\tau) = \frac{\int_{\bar{l}}^1 \hat{s}_2(y, \tau) f_{2,n}(y) dy}{\int_{\bar{l}}^1 f_{2,n}^2(y) dy}. \quad (22)$$

Reemplazando las expresiones (20)-(22) en la ecuación (12), se obtiene

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{A}_n'(\tau) + (\bar{\alpha}\omega_{1,n}^2 - \psi_1) \bar{A}_n(\tau) - S_{1,n}(\tau)] = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{B}_n'(\tau) + (\omega_{2,n}^2 - \psi_2) \bar{B}_n(\tau) - S_{2,n}(\tau)] = 0, \end{cases} \quad (23)$$

cuya solución se obtiene por integración directa:

$$\begin{cases} \bar{A}_n(\tau) = \exp((\psi_1 - \bar{\alpha}\omega_{1,n}^2)\tau) \left[K_n + \int_0^{\tau} S_{1,n}(s) \exp((\bar{\alpha}\omega_{1,n}^2 - \psi_1)s) ds \right], \\ \bar{B}_n(\tau) = \exp((\psi_2 - \omega_{2,n}^2)\tau) \left[K_n + \int_0^{\tau} S_{2,n}(s) \exp((\omega_{2,n}^2 - \psi_2)s) ds \right], \end{cases} \quad (24)$$

La sucesión K_n se obtiene a partir de las condiciones iniciales de (12)

$$K_n = \frac{\frac{\varphi\phi - \eta\mu}{\bar{\alpha}} \int_0^{\bar{l}} \Theta_{1,0}(y) f_{1,n}(y) dy + \int_{\bar{l}}^1 \Theta_{2,0}(y) f_{2,n}(y) dy}{\frac{\varphi\phi - \eta\mu}{\bar{\alpha}} \int_0^{\bar{l}} [f_{1,n}(y)]^2 dy + \int_{\bar{l}}^1 [f_{2,n}(y)]^2 dy}. \quad (25)$$

4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

El método de diferencias finitas es a menudo una herramienta eficaz para este tipo de problemas. Al tratar con cuerpos multicapa, la unión de cada par de materiales presenta un desafío, especialmente si no hay continuidad de temperatura. Algunos autores han abordado esta situación incorporando capas virtuales o artificiales; ver, por ejemplo, [Yuan et al. \(2022\)](#).

En este trabajo, proponemos un enfoque explícito de diferencias finitas de segundo orden, hacia adelante en el tiempo y centrado en la variable espacial (excepto en la interfaz y en los bordes del cuerpo). En el borde derecho, las diferencias se calculan hacia atrás, y en el borde izquierdo, hacia adelante. El problema en la interfaz se aborda tomando diferencias hacia adelante o hacia atrás, dependiendo de si se considera el primer o segundo material.

Para llevar a cabo el ejemplo numérico, se programa un esquema computacional en Matlab. En todos los casos, se asume que el fluido disipativo es aire a presión normal. Los coeficientes de transferencia de calor por convección h_1 y h_2 se determinan según [Umbricht et al. \(2020a\)](#), y los parámetros térmicos de los materiales se resumen en la siguiente tabla.

Materiales	Simbolos	$\alpha^2 (\times 10^4) [m^2/s]$	$\kappa [W/m^\circ C]$
Lead	Pb	0.23673	35
Iron	Fe	0.20451	73
Nickel	Ni	0.22663	90
Aluminium	Al	0.84010	204
Copper	Cu	1.12530	386
Silver	Ag	1.70140	419

Tabla 1: Propiedades térmicas de diferentes materiales.

Para este ejemplo se consideran los siguientes parámetros: $L = 1 m$, $l = 0.4 m$, $t_\infty = 72000 s = 20 h$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.02 m/s$, $\nu_1 = \nu_2 = -0.0003 1/s$, $R = 0.05 m$. La condición inicial es nula $T_{1,0}(x) = T_{2,0}(x) = 0$ y la fuente de generación de calor $s(x, t)$ es una función continua y diferenciable dada por:

$$\begin{cases} s_1(x, t) = \frac{25}{l T^2} \frac{^\circ C}{m s} x (x - l) t (t - t_\infty), & (x, t) \in [0, l] \times [0, t_\infty], \\ s_2(x, t) = \frac{25}{(L - l) T^2} \frac{^\circ C}{m s} (x - l) (x - L) t (t - t_\infty), & (x, t) \in [l, L] \times [0, t_\infty]. \end{cases} \quad (26)$$

La figura 1 muestra los perfiles espaciales de temperatura para $t = 10 h$. A la izquierda, se trazan los perfiles espaciales para *Pb – Material*, mientras que a la derecha se muestran los perfiles correspondientes para *Material – Fe* (para todos los materiales dados en la tabla 1). En ambas situaciones, se observan discontinuidades de temperatura en la interfaz; que aumentan con la diferencia en conductividad y difusividad térmica. Esta observación es consistente con la física del problema.

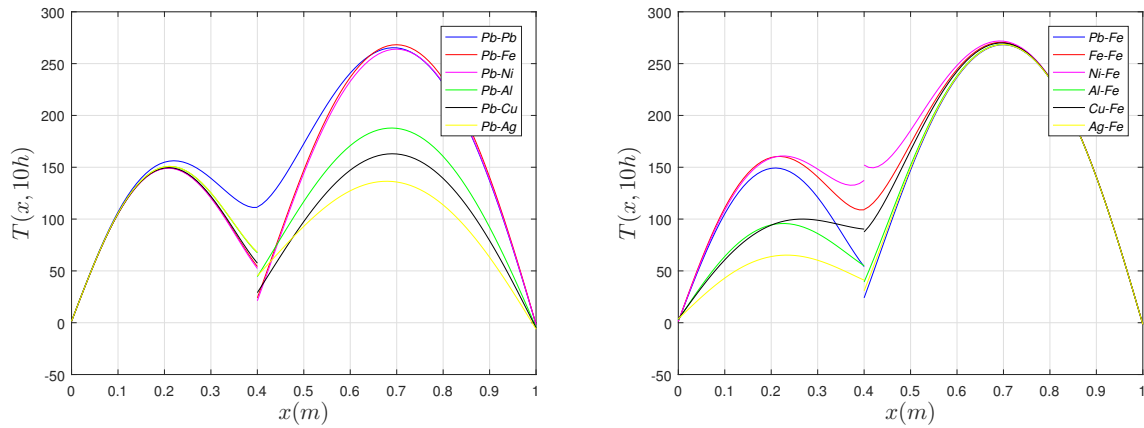


Figura 1: Temperatura para $t = 10h$, $Pb - Material$ (izquierda) y $Material - Fe$ (derecha).

Como ejemplo, la figura 2 muestra la función de temperatura espacio-temporal para un cuerpo $Ag - Cu$. Se observa que la temperatura máxima supera ligeramente los $160^\circ C$ y la discontinuidad de temperatura se encuentra en $x = 0.4m$, haciéndose más notable alrededor de $t = 10h$.

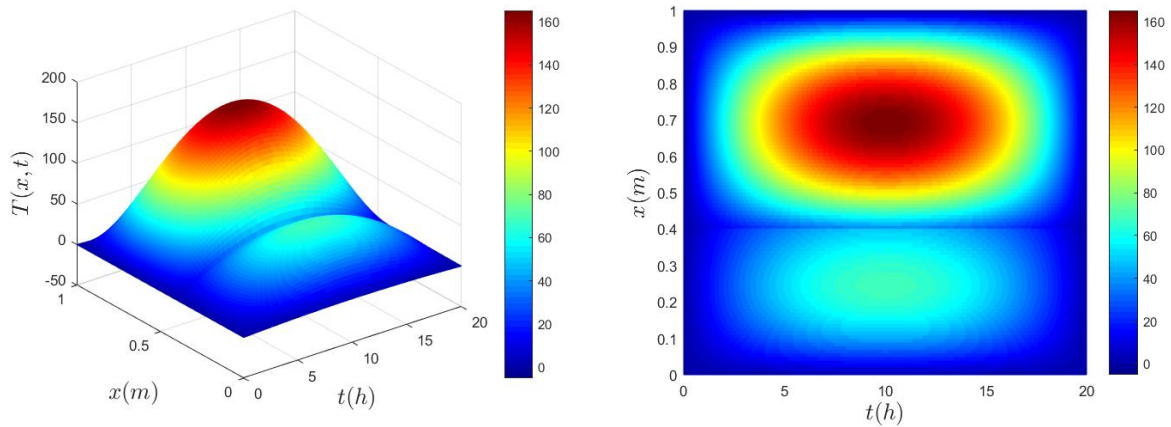


Figura 2: Distribución de temperatura para $Ag - Cu$.

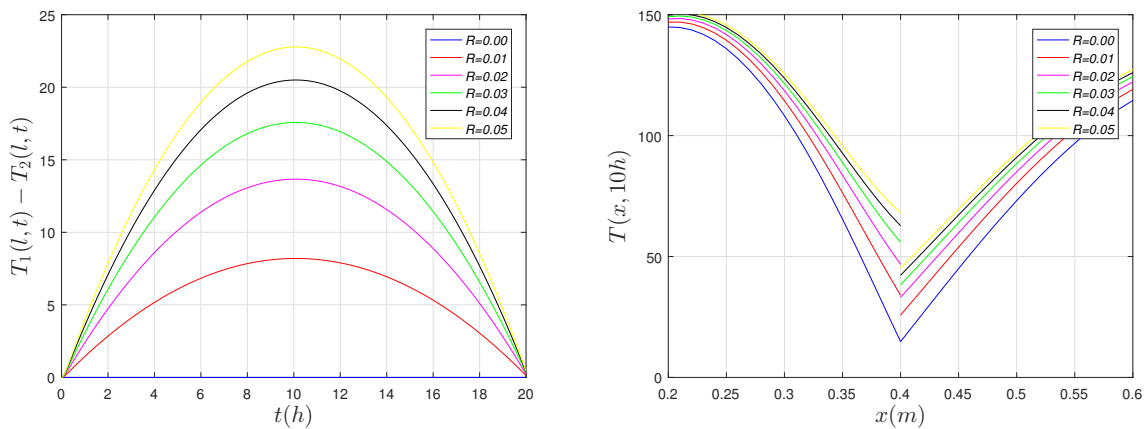


Figura 3: Distribución de diferencias de temperatura en la interfaz para $Pb - Ag$ considerando diferentes resistencias térmicas.

Finalmente, la figura 3 muestra el perfil espacial de la diferencia de temperatura en la interfaz

para un cuerpo $Pb - Ag$ para diferentes valores de resistencia térmica. Se puede ver que la diferencia de temperatura aumenta con el valor de la resistencia. Por otro lado, la diferencia se vuelve más notable en $t = 10 h$.

5. CONCLUSIONES

Este artículo presenta un análisis teórico de un problema de transferencia de calor unidimensional en dos capas con difusión, advección, generación o pérdida interna de calor linealmente dependiente de la temperatura en cada capa, y generación de calor debido a fuentes externas. Además, se considera la resistencia térmica ofrecida por la interfaz entre los materiales. Se obtiene una expresión analítica para la solución del problema estudiado. Adicionalmente, se propone un enfoque de diferencias finitas convergente, que permite simular numéricamente soluciones para estudios de casos particulares. Tanto los resultados analíticos como los numéricos son consistentes con hallazgos previos y con la física del problema.

REFERENCIAS

- Bandhauer T., Garimella S., y Fuller T. A critical review of thermal issues in lithium-ion batteries. *J. Electrochem. Soc.*, 158(3):R1–R25, 2011.
- Becker S. Analytic one dimensional transient conduction into a living perfuse/non-perfuse two layer composite system. *Heat Mass Transfer*, 48:317–327, 2012.
- Becker S. y Herwing H. One dimensional transient heat conduction in segmented fin-like geometries with distinct discrete peripheral convection. *Int. J. Therm. Sci.*, 71:148–162, 2013.
- Carson J. Modelling thermal diffusivity of heterogeneous materials based on thermal diffusivities of components with implications for thermal diffusivity and thermal conductivity measurement. *Int. J. Thermophys.*, 43(108), 2022.
- Counce J., Barry S., y Mercer G. A spatially dependent model for washing wool. *Appl. Math. Model.*, 32(4):389–404, 2008.
- Choobineh L. y Jain A. An explicit analytical model for rapid computation of temperature field in a three-dimensional integrated circuit (3d ic). *Int. J. Therm. Sci.*, 87:103–109, 2015.
- Dias C. A method of recursive images to solve transient heat diffusion in multilayer materials. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 85:1075–1083, 2015.
- Esho I., Shah K., y Jain A. Measurements and modeling to determine the critical temperature for preventing thermal runaway in li-ion cells. *Appl. Therm. Eng.*, 145:287–294, 2018.
- Hickson R., Barry S., y Mercer G. Critical times in multilayer diffusion. part 1: exact solutions. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 52:5776–5783, 2009.
- Jain A., Zhou L., y Parhizi M. Multilayer one-dimensional convection-diffusion-reaction (cdr) problem: Analytical solution and imaginary eigenvalue analysis. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 177:121465, 2021.
- Johansson B. y Lesnic D. A method of fundamental solutions for transient heat conduction in layered materials. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 33(12):1362–1367, 2009.
- Kim A. Complete analytic solutions for convection-diffusion-reaction-source equations without using an inverse laplace transform. *Sci. Rep.*, 10:8040, 2020.
- Liu C. y Ball W. Analytical modeling of diffusion-limited contamination and decontamination in a two-layer porous medium. *Adv. Water. Resour.*, 21(4):297–313, 1998.
- Liu G. y Si B. Analytical modeling of one-dimensional diffusion in layered systems with position-dependent diffusion coefficients. *Adv. Water. Resour.*, 31(2):251–268, 2008.
- Liu G. y Si B. Multi-layer diffusion model and error analysis applied to chamber-based gas

- fluxes measurements. *Agric. For. Meteorol.*, 149(1):169–178, 2009.
- Mantzavinos D., Papadomanolaki M., Saridakis Y., y Sifalakis A. Fokas transform method for a brain tumor invasion model with heterogeneous diffusion in $1 + 1$ dimensions. *Appl. Numer. Math.*, 104:47–61, 2016.
- McGinty S., McKee S., Wadsworth R., y McCormick C. Modelling drug-eluting stents. *Math. Med. Biol.*, 28(1):1–29, 2011.
- Mitragotri S., Anissimov Y., Bunge A., Frasch H., Guy R., Hadgraft J., Kasting G., Lane M., y Roberts M. Mathematical models of skin permeability: An overview. *Int. J. Pharm.*, 418(1):115–129, 2011.
- Monte F.d. Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. a 'natural' analytic approach. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43(19):3607–3619, 2000.
- Monte F.d. An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 45(6):1333–1343, 2002.
- Pasupuleti R., Wang Y., Shabalin I., Li L., Liu Z., y Grove S. Modelling of moisture diffusion in multilayer woven fabric composites. *Comput. Mater. Sci.*, 50(5):1675–1680, 2011.
- Pennes H., Shah K., y Jain A. Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm. *J. Appl. Phys.*, 1(2):93–122, 1948.
- Rodrigo M. y Worthy A. Solution of multilayer diffusion problems via the laplace transform. *J. Math. Anal. Appl.*, 444(1):475–502, 2016.
- Rubio D., Tarzia D., y Umbricht G. Heat transfer process with solid-solid interface: Analytical and numerical solutions. *WSEAS trans. Math.*, 20:404–414, 2021.
- Rubio D., Umbricht G., Saintier N., Morvidone M., y Tarzia D. Non-invasive study to determine changes in physical properties of multilayer materials. *MRS. Adv.*, 7:1115–1119, 2022.
- Shah K., Chalise D., y Jain A. Experimental and theoretical analysis of a method to predict thermal runaway in li-ion cells. *J. Power Sources*, 330:167–174, 2016.
- Skyllas-Kazacos M., Chakrabarti M., Hajimolana S., Mjalli F., y Saleem M. Progress in flow battery research and development. *J. Electrochem. Soc.*, 158(8):R55–R79, 2011.
- Umbricht G. y Rubio D. Optimal estimation of thermal diffusivity in an energy transfer problem. *WSEAS trans. Fluid Mech.*, 16:222–231, 2021.
- Umbricht G., Rubio D., Echarri R., y Hasi C.E. A technique to estimate the transient coefficient of heat transfer by convection. *Lat. Am. Appl. Res.*, 50(3):229–234, 2020a.
- Umbricht G., Rubio D., y Tarzia D. Estimation technique for a contact point between two materials in a stationary heat transfer problem. *Math. Modell. Eng. problem*, 7(4):607–613, 2020b.
- Umbricht G., Rubio D., y Tarzia D. Estimation of a thermal conductivity in a stationary heat transfer problem with a solid-solid interface. *Int. J. Heat. Technol.*, 39(2):337–344, 2021.
- Umbricht G., Rubio D., y Tarzia D. Determination of thermal conductivities in multilayer materials. *WSEAS trans. Heat Mass Transfer*, 17:188–195, 2022a.
- Umbricht G., Tarzia D., y Rubio D. Determination of two homogeneous materials in a bar with solid-solid interface. *Math. Modell. Eng. problem*, 9(3):568–576, 2022b.
- Yavaraj R. and Senthilkumar D. Numerical analysis of non-fourier heat conduction dynamics in the composite layer. *J. Mech. Eng. Sci.*, 17(3):9597–9615, 2023.
- Yuan W.b., Yu N., Li L.y., y Fang Y. Heat transfer analysis in multi-layered materials with interfacial thermal resistance. *Compos. Struct.*, 293(1):115728, 2022.
- Zhou L., Parhizi M., y Jain A. Theoretical modeling of heat transfer in a multilayer rectangular body with spatially-varying convective heat transfer boundary condition. *Int. J. Therm. Sci.*, 170:107156, 2021.