

## COLUMPIO: INTEGRACIÓN DE FÍSICA EXPERIMENTAL Y MÉTODOS NUMÉRICOS

### SWING: INTEGRATION OF EXPERIMENTAL PHYSICS AND NUMERICAL METHODS

José Di-Laccio<sup>a,b</sup>, Antonella Di-Laccio<sup>b</sup>, Gerardo Vitale<sup>a</sup>, Julián Ramos<sup>c</sup> y Lucas  
Bessone<sup>c, d</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Física, CENUR LN, UdelaR, Uruguay, <http://les.edu.uy/fisica/>*

<sup>b</sup>*Centro Regional de Profesores del Litoral, Departamento de Física, Uruguay*

<sup>c</sup>*Departamento del Agua, CENUR LN, UdelaR, Uruguay, <http://agua.unorte.edu.uy/>*

<sup>d</sup>*DMEL, CENUR LN, UdelaR, Uruguay, <http://dmel.multisitio.interior.edu.uy/>*

**Palabras clave:** Física, Métodos numéricos, Péndulo, Teléfono inteligente.

**Resumen.** Este trabajo propone una metodología de enseñanza para el aprendizaje del movimiento de un columpio (péndulo a gran escala) en un entorno de una plaza, integrando el curso de Física Experimental 1 con Métodos Numéricos. Estudiantes universitarios de Física Experimental 1 utilizan un teléfono inteligente equipado con una aplicación para registrar mediciones de aceleración y velocidad angular del columpio. Posteriormente, analizan los datos experimentales para determinar si el movimiento del columpio puede modelarse como un péndulo simple. Se les guía en la resolución numérica de la ecuación del péndulo mediante dos métodos: Euler y Runge-Kutta de orden cuatro. Finalmente, se comparan los datos experimentales con los resultados numéricos para evaluar la capacidad del modelo para explicar la dinámica observada. Esta integración entre física y matemática mejora la comprensión del movimiento del columpio, fortalece las habilidades de programación y análisis numérico de los estudiantes, y pone en valor la colaboración entre disciplinas.

**Keywords:** Experimental Physics, Numerical Methods, Pendulum, Smartphone.

**Abstract.** This work proposes a teaching methodology for learning the movement of a swing (large-scale pendulum) in a plaza environment, integrating the Experimental Physics 1 course with Numerical Methods. Experimental Physics 1 undergraduate students use a smartphone equipped with an app to record swing acceleration and angular velocity measurements. They then analyze the experimental data to determine whether the swing's motion can be modeled as a simple pendulum. They are guided in the numerical resolution of the pendulum equation using two methods: Euler and Runge-Kutta of order four. Finally, the experimental data are compared with the numerical results to evaluate the capacity of the model to explain the observed dynamics. This integration between physics and mathematics improves the understanding of the movement of the swing, strengthens students' programming and numerical analysis skills, and values collaboration between disciplines.

## 1. CONTEXTO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Esta experiencia de laboratorio se desarrolla en el Centro Universitario Regional Norte de la Universidad de la República (UdelaR), en la sede de Salto, Uruguay. Se realiza en el marco de los cursos que ofrece el Ciclo Inicial en Matemática (CIM), particularmente en las unidades curriculares de Física Experimental 1 (FE1) y Métodos Numéricos (MN). La propuesta surge de la inquietud de algunos estudiantes de segundo año del CIM por querer modelar eventos fuera del ámbito controlado del laboratorio, como por ejemplo modelar el movimiento de una persona jugando en el columpio de una plaza. ¿Cómo funcionaría el modelo de péndulo simple en este evento?, y ¿cómo se podría mejorar el modelado utilizando herramientas de métodos numéricos? Así, entre las unidades curriculares (UC) se coordina un proyecto experimental que pueda ser desarrollado por los estudiantes, que vincule la Física del problema con algunos de los elementos del cálculo numérico. Se les propone estudiar las oscilaciones de un columpio modelado como péndulo a gran escala a partir de los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden (RK4).

### 1.1. Unidades curriculares intervinientes

La UC de FE1, se dicta en el semestre impar para carreras del área científico tecnológica, tiene asignados 5 créditos y una carga horaria semanal de 4 horas de laboratorio. Su temario se vincula con contenidos de Física 1 y 2, cursos previos aprobados por los estudiantes. En la UC de Física 1 se introducen contenidos de mecánica del punto y del rígido, enfocándose en las leyes de Newton y en los principios de conservación de la energía, del momento lineal y del momento angular. Mientras que la UC de Física 2 introduce a ideas de termodinámica (primera y segunda ley), fluidos y ondas mecánicas.

Por otro lado, la UC de MN se dicta en el semestre par para carreras de la misma área, tiene asignados 9 créditos y una carga semanal de 6 horas, 4 de teórico y 2 de práctico. Entre su temario está la implementación del método de Euler y RK4.

Las UCs involucradas trabajan de forma complementaria no solo en FE1 sino que también en la Física Experimental 2 (FE2) que se dicta en el mismo semestre que MN. Previo a este trabajo hay una experiencia sobre "Métodos numéricos en la enseñanza de la Física" (Di-Laccio et al., 2023) que abrió la puerta a la colaboración y mejora de las propuestas conjuntas entre Física y Matemática.

Para esta experiencia didáctica se coordina entre el equipo docente de MN y el de FE1 para acercar a los estudiantes el aprendizaje del método de Euler y de RK4 y poder implementarlo en un experimento específico de FE1. Luego de la coordinación entre equipos docentes, surge que esta misma experiencia didáctica podría implementarse en la UC de MN como proyecto final de los estudiantes, donde en general los estudiantes eligen un problema hipotético a resolver con las herramientas aprendidas en el curso.

### 1.2. Trabajo fuera del aula

En esta experiencia de laboratorio los estudiantes son quienes se encargan de realizar la experimentación fuera del aula, en un parque o una plaza. Como orientación para los estudiantes se les proporciona una guía. Los datos experimentales se registran utilizando un teléfono inteligente como herramienta de medición (Gil y Di-Laccio, 2017). El requisito es que el teléfono inteligente cuente con una aplicación capaz de acceder al acelerómetro y giroscopio y que registre los valores censados. En este sentido, los estudiantes cuentan con preparación previa, ya que en esta etapa del curso se ha incorporado el teléfono inteligente en otras actividades de Labora-

torio, manejan la Aplicación (App) Phyphox (RWTH Aachen University, 2024) para recolectar datos. Los contenidos a abordar en esta experiencia se clasifican en tres. a) Conceptuales: Oscilaciones mecánicas con un grado de libertad (péndulo). Límites de los modelos físicos para este tipo de problemas y cómo a partir del uso de herramientas de métodos numéricos se pueden encontrar soluciones al problema (métodos de Euler y RK4). b) Procedimentales: Diseñar un experimento en un entorno no controlado para estudiar el movimiento de oscilación de un columpio, realizar medición cuidadosa de variables, utilizar el teléfono inteligente para censar y guardar datos experimentales. Uso de herramientas informáticas para la programación y simulación de las soluciones de la ecuación del péndulo. Elaboración de gráficos. Comparación cualitativa y cuantitativa de la simulación con los resultados experimentales. Comunicación de resultados en diversos formatos. c) Actitudinales: Valoración de la actividad experimental. Rigor y precisión al resolver problemas matemáticos. Responsabilidad ética al citar las fuentes académicas.

## 2. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL PÉNDULO SIMPLE

En las clases previas a la actividad se deduce la ecuación de movimiento del péndulo simple, ver Figura 1 mediante el análisis de fuerzas y aplicación de la ley de Newton. También se revisan las consideraciones energéticas (Malthe-Sørensen, 2015).

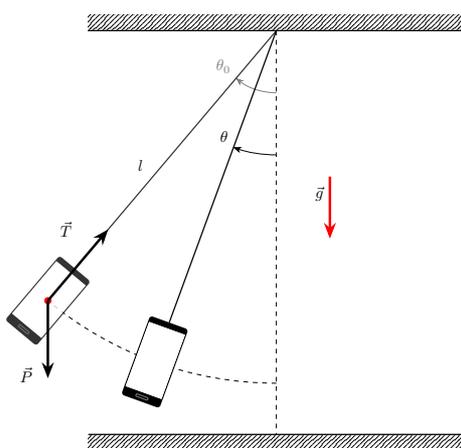


Figura 1: Diagrama esquemático de un péndulo simple.

La ecuación diferencial que lo describe es (Resnick et al., 2002; Serway y Jewett, 2008):

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \quad (1)$$

donde:  $\theta(t)$  es el ángulo del péndulo con respecto a la vertical en función del tiempo,  $g$  es la aceleración gravitatoria y  $l$  es la longitud del péndulo. La ecuación tiene resolución analítica simple cuando se puede aproximar  $\sin\theta(t)$  a  $\theta(t)$ . Para considerar el caso de amplitudes angulares iniciales más grandes, se pueden utilizar integrales elípticas o métodos numéricos (Molina, 1997). En este trabajo se plantean dos métodos numéricos: el de Euler y el RK4. Estos métodos son objeto de su desarrollo en la UC de MN y son orientados por el docente a cargo.

El objetivo de resolver la ec. 1 es simular las posibles respuestas a obtener en el sistema tipo péndulo, para luego reconocer posibles limitaciones o restricciones que tiene el mismo para el estudio de un sistema real. Para resolver la ec.1 por el método de Euler requiere al

menos de los siguientes pasos: 1) Definir las condiciones iniciales:  $\theta_0$  (ángulo inicial) y  $\omega_0$  (velocidad angular inicial). 2) Establecer los parámetros del sistema, la longitud del péndulo  $l$ , la aceleración gravitatoria  $g$ , y el paso de tiempo  $\Delta t$ . 3) Usar las siguientes ecuaciones de actualización en un bucle para calcular iterativamente  $\theta$  y  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \omega_n \Delta t \\ \omega_{n+1} &= \omega_n - \frac{g}{l} \sin(\theta_n) \Delta t\end{aligned}$$

Finalmente, repetir el bucle hasta alcanzar el tiempo deseado.

Por su parte, el RK4 necesita al igual que el método de Euler, seguir los pasos 1) y 2). Luego, utilizar las siguientes ecuaciones de actualización en un bucle:

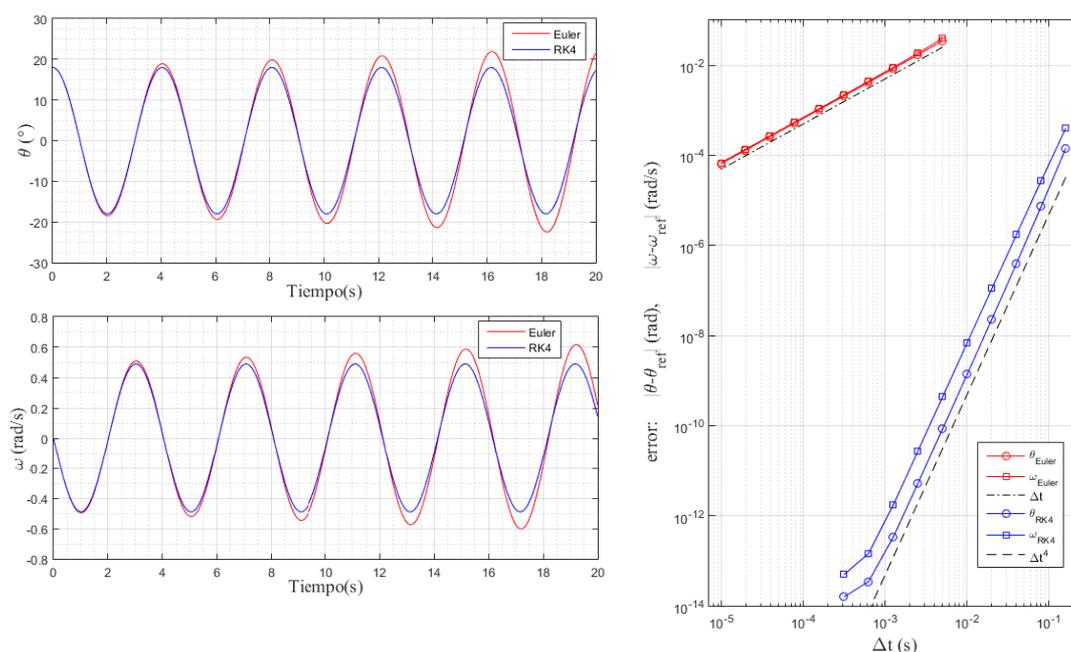
$$\begin{aligned}k_1 &= \Delta t \omega_n & l_1 &= \Delta t \left( -\frac{g}{l} \sin(\theta_n) \right) \\ k_2 &= \Delta t \left( \omega_n + \frac{l_1}{2} \right) & l_2 &= \Delta t \left( -\frac{g}{l} \sin\left(\theta_n + \frac{k_1}{2}\right) \right) \\ k_3 &= \Delta t \left( \omega_n + \frac{l_2}{2} \right) & l_3 &= \Delta t \left( -\frac{g}{l} \sin\left(\theta_n + \frac{k_2}{2}\right) \right) \\ k_4 &= \Delta t (\omega_n + l_3) & l_4 &= \Delta t \left( -\frac{g}{l} \sin(\theta_n + k_3) \right) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) & \omega_{n+1} &= \omega_n + \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)\end{aligned}$$

Al igual que el método de Euler, repetir el bucle hasta alcanzar el tiempo deseado.

Para realizar las simulaciones y para la implementación se les brinda a los estudiantes una breve introducción a la programación en MatLab ([MathWorks, 2015](#); [Moore et al., 2007](#)) así como a la inclusión responsable de la inteligencia artificial generativa (IAG) para la generación de códigos, en particular ChatGPT ([OpenAI, 2024](#)). Las orientaciones tienen como principal finalidad reforzar la programación de los estudiantes en el lenguaje científico, así como la valoración de algunas de las potencialidades de ChatGPT para sus tareas. Realizar los códigos de programación de los métodos es una tarea que hoy en día se ve simplificada si se usa inteligencia artificial (IA) con el debido conocimiento y responsabilidad del caso. Cada estudiante puede elegir qué lenguaje utilizar, así como a IA de apoyo a su tarea de programación y siempre debe registrar su uso.

## 2.1. Simulación

Al aplicar ambos métodos al problema del péndulo, se utilizó una longitud de 4.0 m, ángulo inicial de  $\pi/10$  rad, un paso de tiempo de 0.01 s y un tiempo total de 20 s. Los resultados para el ángulo de oscilación y la velocidad angular de cada método se muestran en la Figura 2a. El método de Euler, al ser de primer orden, produce soluciones menos precisas y puede volverse inestable con pasos de tiempo grandes o simulaciones largas. Para obtener precisión, es necesario reducir significativamente el paso de tiempo. En cambio, el método RK4 es más preciso y su estabilidad permite usar pasos de tiempo mayores sin comprometer la solución. En este estudio se comparan los errores de ambos métodos, utilizando como referencia una solución con RK4 y un paso de tiempo de  $6.1 \times 10^{-7}$  s. La Figura 2b muestra que RK4 alcanza la precisión de máquina con pasos de tiempo relativamente grandes, mientras que Euler requiere pasos mucho menores, lo que lo hace impráctico para aplicaciones que exigen alta precisión.



(a) Ángulo de oscilación y velocidad angular del péndulo simple calculado mediante ambos métodos.

(b) Errores para el ángulo y la velocidad angular en el instante final para diferentes pasos de tiempo utilizando ambos métodos.

Figura 2: Solución numérica del problema y análisis de convergencia para el método de Euler y método RK4.

### 3. EL EXPERIMENTO

Para la toma de datos, los estudiantes concurren a una plaza local, eligen un columpio, configuran la App del teléfono inteligente (añadir un experimento simple, título del experimento, frecuencia de muestreo, duración del experimento, entre otros) para medir aceleración lineal (medida que no incluye la aceleración gravitatoria) y velocidad angular en un paso de un dato cada 0.05 segundos ( $f=20$  Hz). Posteriormente, un estudiante se sube al columpio con el teléfono adherido a la silla, inicia el registro y comienza a columpiarse. Un compañero realiza el registro en video del experimento (utilizando otro teléfono inteligente). El evento dura aproximadamente 5 minutos, y se pueden diferenciar claramente cuatro etapas ilustradas en la Figura 3.

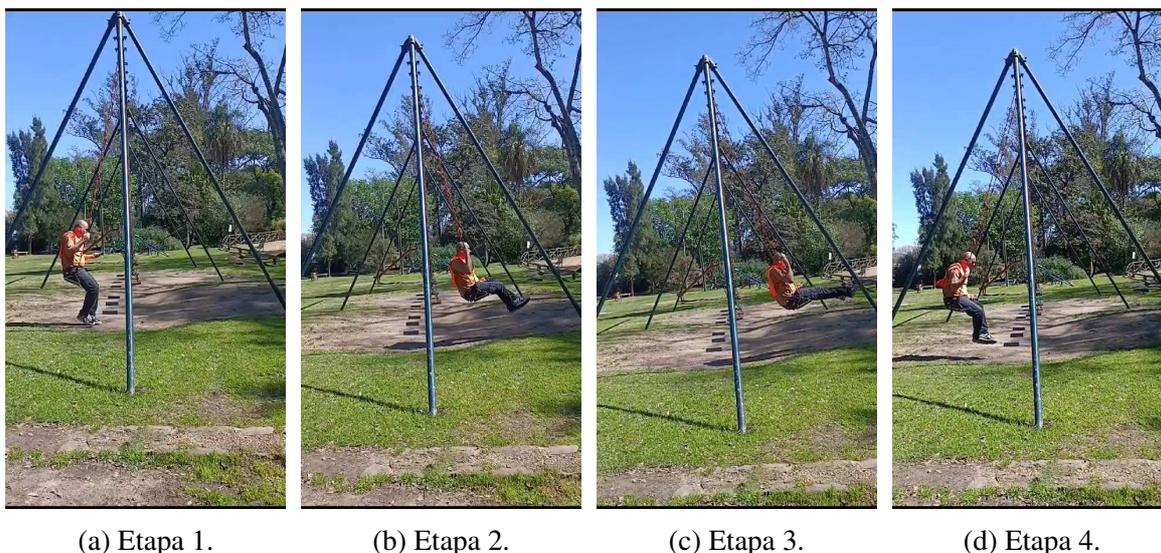
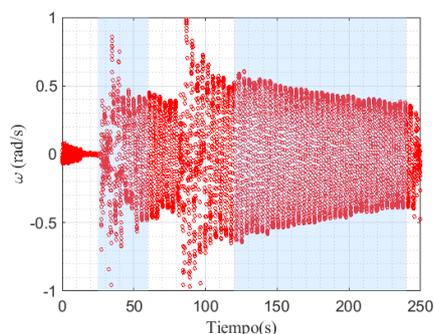


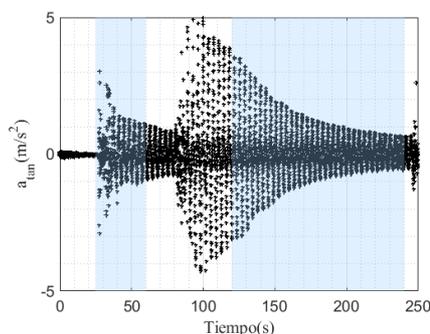
Figura 3: Fotogramas del movimiento oscilatorio seleccionados para identificar las etapas del movimiento.

Las etapas son aproximaciones para luego modelar el movimiento, las mismas se pueden diferenciar de la siguiente manera:

- Etapa 1: Movimiento inicial donde el estudiante se corre hacia atrás con sus pies, se deja columpiar y se impulsa con su cuerpo para aumentar la amplitud de oscilación.
- Etapa 2: Movimiento oscilatorio, el estudiante cruza sus pies, permanece inmóvil, dejando que el columpio oscile.
- Etapa 3: Movimiento de oscilación forzado, el estudiante se impulsa afirmándose con la punta de sus pies en el suelo (cuando pasa por la vertical y hacia atrás) y cambiando la orientación de su cuerpo para aumentar la amplitud de oscilación.
- Etapa 4: Cesa el movimiento del cuerpo para dejar que el movimiento de oscilación se amortigüe. El estudiante permanece inmóvil y se deja frenar por el rozamiento del aire.



(a) Velocidad angular medida con el teléfono inteligente.



(b) Aceleración tangencial medida con el teléfono inteligente.

Figura 4: Medidas registradas con el teléfono inteligente: (a) Velocidad angular y (b) aceleración lineal.

### 3.1. Hallazgos de los estudiantes

Los datos experimentales obtenidos son exportados en formato .csv para ser procesados en la computadora personal (PC). En la Figura 4, se muestran los resultados experimentales para la aceleración lineal del teléfono en la dirección tangente y la velocidad angular respecto al eje de giro, en donde se han sombreado dos regiones que luego son modeladas por los estudiantes.

En el análisis del problema, los estudiantes identifican diversos elementos relevantes para el desarrollo de su capacidad crítica y su aprendizaje:

- Relacionan los datos experimentales con el video realizado, identificando claramente las etapas descritas previamente y observando el efecto del movimiento del cuerpo, así como los impulsos que se producen al interactuar con el suelo, tanto en la velocidad angular como en la aceleración tangencial.
- Utilizan las simulaciones con los métodos de Euler y RK4 para comparar diferentes regiones de los datos obtenidos.
- Detectan regiones específicas (sombreado en la Figura 4) y proponen posibles modelos para describir los datos. Por ejemplo: 1) La región correspondiente aproximadamente al intervalo de tiempo entre  $45\text{ s} \leq t \leq 60\text{ s}$  podría modelarse inicialmente como un péndulo simple. 2) La región comprendida entre  $120\text{ s} \leq t \leq 220\text{ s}$  podría analizarse con un modelo de péndulo que incluya amortiguamiento debido al aire. La ecuación a resolver en este caso es:

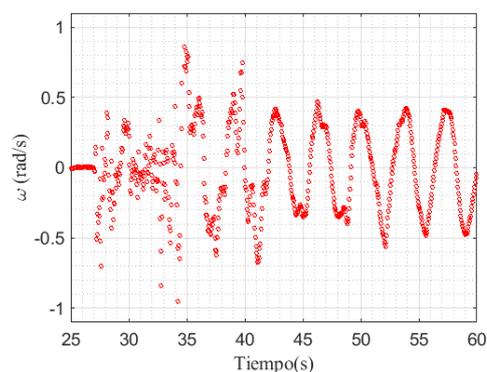
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0, \quad (2)$$

donde  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso del aire. Este modelo es más complejo, pero puede resolverse fácilmente mediante métodos numéricos.

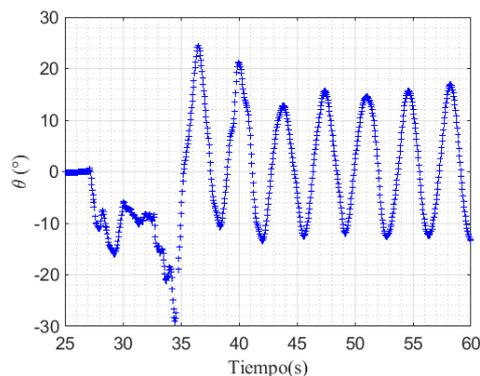
- Las regiones identificadas que se pueden modelar se presentan en la Figura 5, en la que también se muestra el ángulo obtenido mediante integración numérica. En este experimento es notable la diferencia entre los modelos y los resultados experimentales, los estudiantes identifican varios de los factores que corresponden a las hipótesis de los mismos.
- Realizan interpretaciones cualitativas de las etapas 1 y 3, identifican las interacciones con el suelo utilizando el registro de video y los datos cinemáticos experimentales.

## 4. GUÍA PARA LOS ESTUDIANTES

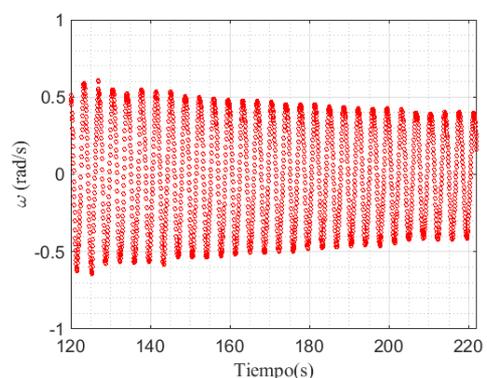
En esta actividad, exploraremos el comportamiento de un columpio desde una perspectiva tanto teórica como experimental. Primero, investigaremos cómo se mueve el columpio resolviendo la ecuación del movimiento del péndulo simple mediante dos métodos numéricos: el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Luego, realizaremos un experimento en un espacio abierto (como un parque o plaza) utilizando un teléfono inteligente con una aplicación adecuada para recopilar datos sobre la velocidad angular y la aceleración tangencial. Compararemos los resultados experimentales con las simulaciones numéricas, reflexionando sobre las similitudes y diferencias observadas.



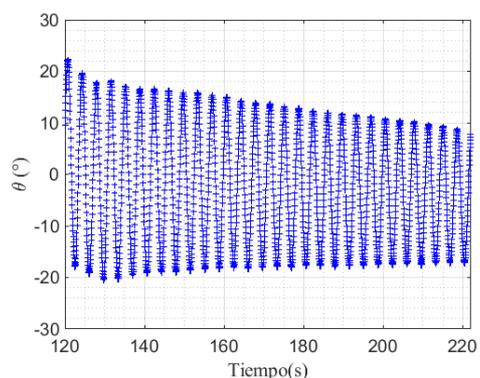
(a) Velocidad angular en las primeras etapas del movimiento.



(b) Variación del ángulo del columpio.



(c) Velocidad angular de la etapa 4 en donde se aprecia el amortiguamiento.



(d) Amortiguamiento y su incidencia en el ángulo de oscilación.

Figura 5: Regiones seleccionadas en donde es posible comparar los resultados con los métodos de Euler y de RK4.

## Equipo

Para realizar esta actividad se deberá contar con un teléfono inteligente que tenga instalada una aplicación capaz de medir aceleración y velocidad angular. Cinta métrica para medir la longitud del péndulo. Teléfono adicional para grabar un video del experimento. Además deberán contar con una PC y un programa específico para realizar los cálculos numéricos.

## Sugerencias de Trabajo

- ¿Cómo crees que se moverá el columpio? ¿Qué factores crees que afectarán su movimiento?
- Resuelve la ecuación del movimiento del péndulo simple utilizando los dos métodos numéricos: el método de Euler y el método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4). ¿Qué diferencias encuentras entre ambos métodos?
- Simula el comportamiento del ángulo de oscilación y la velocidad angular para diferentes condiciones iniciales. ¿Cómo cambian las simulaciones con diferentes ángulos y velocidades iniciales? ¿Qué esperas encontrar al comparar estos resultados con el experimento?

- Ubica un columpio en un parque o plaza, es el lugar de experimentación. Configura tu aplicación de teléfono inteligente con una frecuencia de muestreo de 20 Hz. Selecciona las opciones para medir la velocidad angular y la aceleración tangencial. Asegura el teléfono con la aplicación a la base del columpio para registrar los movimientos.
- Graba un video del experimento utilizando otro teléfono para tener una perspectiva complementaria. ¿Cuántas oscilaciones crees que son necesarias para obtener datos fiables? Ejecuta las oscilaciones y registra los datos durante el tiempo que entiendas necesario. Guarda los datos obtenidos en un archivo `.csv` separados por comas.
- Grafica velocidad angular y aceleración tangencial como funciones del tiempo. ¿Qué patrones o comportamientos observas en los gráficos? Identifica zonas donde los resultados experimentales tengan apariencia similar con las simulaciones numéricas. ¿Qué etapas del experimento se parecen con los modelos? ¿En que etapas aparecen diferencias importantes? ¿Por qué crees que ocurre esto?
- Analiza cualitativamente las diferencias entre los resultados experimentales y las simulaciones. ¿Qué factores externos, que no fueron controlados o tomados en cuenta en los modelos, podrían estar afectando el movimiento? Si es necesario, piensa en un modelo que incluya estos factores adicionales.
- Realiza aportes para compañeros que realizarán el experimento en nuevas ediciones. ¿Qué aprendiste de este trabajo?

#### 4.1. Evaluación

Para evaluar el proceso de formación de los estudiantes, se les solicita diferentes productos y evidencias de la realización de los experimentos al aire libre. Estos resultados los estudiantes deben presentar a lo largo del desarrollo del laboratorio. Para orientar los estudiantes en sus producciones se les comparte una rúbrica con cuatro indicadores/criterios, cinco niveles y descriptores asociados a cada uno de los niveles. Como parte del proceso de elaboración de estas evidencias, se permitirá a los estudiantes hacer uso de la IAG, en especial ChatGPT. El uso de la IAG ofrece numerosas oportunidades para la enseñanza y para el aprendizaje, además plantea algunos desafíos en cuanto a la veracidad de la información, la ética y la integridad académica (Gallent-Torres et al., 2023). En esta instancia se debe declarar su uso en las tareas y tomar recaudos para que se una utilización responsable por parte del estudiante.

### 5. CONCLUSIONES

La implementación de esta actividad ha dejado múltiples conclusiones tanto para los docentes como para los estudiantes. Como docente se pueden verificar las potencialidades que tienen los trabajos interdisciplinarios para el aprendizaje de varias competencias científicas de los estudiantes. En esta instancia se combinan dos UC de semestres distintos para abordar una misma temática que se ve fortalecida por aportes desde la especificidad de cada disciplina y la coordinación docente. Esto colabora para que los estudiantes trabajen con múltiples apoyos y dándole sentido al conocimiento propuesto desde ambas UC.

Por otro lado, se refuerza la idea de que la experimentación acompañada del modelado son un buen punto de partida para fomentar trabajos interdisciplinarios entre las ciencias experimentales y las matemáticas. La experimentación en el laboratorio fuera del aula amplifica las posibilidades, ya que allí los fenómenos no están controlados como en el ámbito del laboratorio

tradicional. Esto no quiere decir que se deba abandonar el laboratorio tradicional, sino que son un complemento para entender la complejidad, sacando de la zona de confort tanto al docente como al estudiante. Ambos deben unirse para la comprensión profunda del fenómeno.

Por parte de los estudiantes se puede ver que la implementación de esta actividad aumenta su motivación y reafirma los vínculos entre pares. El trabajo de laboratorio fuera del aula requiere de planificar en detalle el experimento para poner en evidencia el fenómeno que quieren estudiar. En este sentido, deben repetir muchas veces la experiencia hasta lograr un entendimiento del juego de datos.

Por otro lado, el laboratorio permite a los estudiantes aprender, mediante la inmersión, algunos de los métodos que la ciencia utiliza para responder preguntas. Facilita la comprensión de las limitaciones de los modelos físicos al explicar fenómenos, revelando las restricciones impuestas por la teoría. Los estudiantes descubren que, si la explicación no concuerda con el modelo, es necesario descartarlo o realizar las correcciones pertinentes. También comprenden que, aunque muchos fenómenos naturales son tan complejos que resulta difícil modelarlos matemáticamente, siempre es posible encontrar explicaciones cualitativas que, respetando las leyes físicas, lo describan adecuadamente.

## REFERENCIAS

- Di-Laccio J.L., Monetta A., Ramos J., y Bessone L. Métodos Numéricos en la Enseñanza de la Física. *Mecánica Computacional*, páginas 1527–1537, 2023.
- Gallent-Torres C., Zapata-González A., y Ortego-Hernando J. El impacto de la inteligencia artificial generativa en educación superior: una mirada desde la ética y la integridad académica. *RELIEVE - Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 29:1–20, 2023.
- Gil S. y Di-Laccio J. Smartphone una herramienta de laboratorio y aprendizaje laboratorios de bajo costo para el aprendizaje de las ciencias. *American Journal of Physics Education*, 11, 2017.
- Malthe-Sørenssen A. *Elementary Mechanics Using MATLAB: A Modern Course Combining Analytical and Numerical Techniques*. Springer, Cham, Switzerland, 2015. ISBN 978-3-319-19586-5.
- MathWorks. Matlab. 2015. Lanzamiento: 9 de septiembre de 2015.
- Molina M.I. Simple linearizations of the simple pendulum for any amplitude. *The Physics Teacher*, 35(8):489, 1997. doi:10.1119/1.2344777.
- Moore H., Olguín V.C., y Nuño R.M. *MATLAB para Ingenieros*. 620.0013 M66 2007. Pearson Educación, 2007.
- OpenAI. ChatGPT. <https://www.openai.com/chatgpt>, 2024. [Último acceso: 29 de agosto de 2024].
- Resnick R., Halliday D., y Krane K.S. *Física, Volumen 1*. CECSA, Ciudad de México, México, 5ta edición, 2002. ISBN 978-968-514-175-2.
- RWTH Aachen University. Phyphox experiments. 2024. Accedido: 29 de agosto de 2024.
- Serway R.A. y Jewett J.W. *Física para Ciencias e Ingeniería, Volumen 1*. Cengage Learning, Ciudad de México, México, 7ma edición, 2008. ISBN 978-970-686-822-0.