

DINÁMICA DE VIGAS RECTAS Y CURVAS FUNCIONALMENTE GRADADAS INCORPORANDO RESONADORES LOCALES ELECTROMECAÑICOS: ANÁLISIS DE BANDAS DE ATENUACIÓN

DYNAMICS OF STRAIGHT AND CURVED FUNCTIONALLY GRADED BEAMS INCORPORATING ELECTROMECHANICAL LOCAL RESONATORS: ANALYSIS OF ATTENUATION BANDS

Walter Horacio Fruccio^a, Marcelo Tulio Piovan^b y Rogelio Hecker^a

^aFacultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa. Calle 110 N°390, 6360, Gral Pico, Pcia La Pampa. Argentina, <http://www.ing.unlpam.edu.ar>

^bCentro de Investigaciones de Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional FRBB. 11 de Abril 461, B8000LMI, Bahía Blanca, Pcia Buenos Aires. Argentina. <http://www.frbb.utn.edu.ar>

Palabras clave: Materiales Gradados, Resonadores, Metamateriales, Bandas de Atenuación.

Resumen. El estudio de la propagación de ondas en metamateriales representa un campo nuevo y emergente en la ingeniería, en especial en materiales compuestos que tienen algún tipo de periodicidad y poseen propiedades excepcionales que no se encuentran comúnmente en otro tipo de materiales. En este trabajo se introduce un modelo de viga de paredes delgadas, creada mediante materiales funcionales gradados cerámico/metálicos con inclusión de resonadores locales electromecánicos. El modelo de viga se basa en la incorporación de flexibilidad por corte generalizada para flexión y torsión con alabeo no uniforme. Las ecuaciones que gobiernan el problema dinámico se deducen empleando el principio de trabajo virtual. Se evalúa la aparición de bandas de atenuación como resultado del cambio de configuraciones de los resonadores y de las propiedades gradadas de la estructura portante. Se construye un modelo computacional empleando el método de elementos finitos a partir de la formulación débil asociada al principio de trabajo virtual. Se realiza el estudio de la incertidumbre de los parámetros, mediante el enfoque probabilístico paramétrico. El modelo probabilístico se construye apelando al modelo computacional del enfoque determinista.

Keywords: Graded Materials, Resonators, Metamaterials, Attenuation Bands.

Abstract. The study of wave propagation in metamaterials represents a new and emerging field in engineering, especially in composite materials that have some kind of periodicity and possess exceptional properties not commonly found in other types of materials. In this work, a thin-walled beam model is introduced, created by graded ceramic/metallic functional materials with inclusion of local electromechanical resonators. The beam model is based on the incorporation of generalized shear flexibility for bending and torsion with non-uniform warping. A computational model is built using the finite element method from the weak formulation associated with the virtual work principle. The uncertainty of the parameters is studied, using the parametric probabilistic approach.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la propagación de ondas en metamateriales representa un campo nuevo y emergente en la ingeniería. Estos metamateriales poseen un atractivo comportamiento vibratorio, es decir, la presencia de bandas de atenuación en un determinado rango de frecuencias, lo que conduce a la reducción parcial o total de la amplitud vibratoria de las ondas. Este fenómeno es de particular utilidad para la atenuación de fenómenos oscilatorios, o para la supresión de señales en un rango de frecuencias dado (Sangiuliano, 2022). En particular, las bandas de atenuación pueden ser modificadas por la variabilidad asociada a la incertidumbre en los parámetros, o de acuerdo a las características materiales y geométricas de la estructura periódica. En tal sentido los materiales con gradación funcional (functionally graded material: FGM) (Parham Zahedi-nejad, 2020), aparecen como una alternativa para la construcción de dichas meta-estructuras. Con dichos materiales, se logra personalizar las propiedades del material en una dirección seleccionada dentro de la estructura, y de esta manera se obtienen mejoras sustanciales en las propiedades específicas de la estructura portante (Karamanli, 2018).

El objetivo de este trabajo se centra en el análisis de bandas de atenuación y la propagación de la incertidumbre asociada con las mismas, para vigas de paredes delgadas con resonadores electromecánicos embebidos, construidas con materiales FGM, y la incorporación de bloques piezoeléctricos tipo bimorfo en la meta-estructura. Para dicho análisis, se realizó un modelo computacional de elementos finitos 1D, con el fin de determinar el modelo determinístico de dichas estructuras periódicas. Luego, mediante un enfoque paramétrico probabilístico se crea el modelo estocástico, apelando al modelo computacional del enfoque determinista. Cuyas funciones de densidad de probabilidades (PDF) se deducen del principio de máxima entropía (Sampaio y Cataldo, 2010). El modelo estocástico se genera mediante el método de Monte Carlo, con el cual se ejecutan simulaciones con realizaciones independientes.

2. DESARROLLO

2.1. Descripción del modelo.

La Fig. 1 representa una viga finita de paredes delgadas con radio de curvatura constante y con la inclusión de resonadores electromecánicos embebidos a lo largo de la meta-estructura. La viga tiene una sección transversal rectangular simétrica y esta contenida en el plano π . Por otro lado, el sistema de referencia se encuentra ubicado en el centro geométrico de la sección transversal $\{C\}$. En la misma Fig. 1, se puede apreciar la configuración de la meta-estructura con resonadores electromecánicos, constituida por piezoeléctricos en configuración bimorfo a través de un material sustrato portante. El mismo, es de sección rectangular con paredes delgadas, donde se incluyen los resonadores mecánicos. De esta manera se forman bloques electromecánicos, que constituyen los resonadores a lo largo de la meta-estructura.

El modelo teórico de la meta-estructura portante se basa en las siguientes hipótesis:

A-La sección transversal de la viga curva tiene la configuración de paredes delgadas. La curvatura de la viga se ubica sobre el plano XY. B-La sección trasversal es regular y rígida en su propio plano. C-El campo de desplazamientos tendrá los términos lineales de primer orden para su descripción. D-Se considera el esfuerzo cortante producido por flexión y torsión. Se define una función de alabeo referida al centroide. E-La viga está construida con componentes metálicos y cerámicos que varían en la dirección Z. F-En el caso de los resonadores electromecánicos, la dirección del campo eléctrico \mathbf{E} es con respecto al eje Y.

Teniendo en cuenta las hipótesis antes descriptas, tendremos el siguiente campo de desplazamientos (Piovan y Cortínez, 2007)

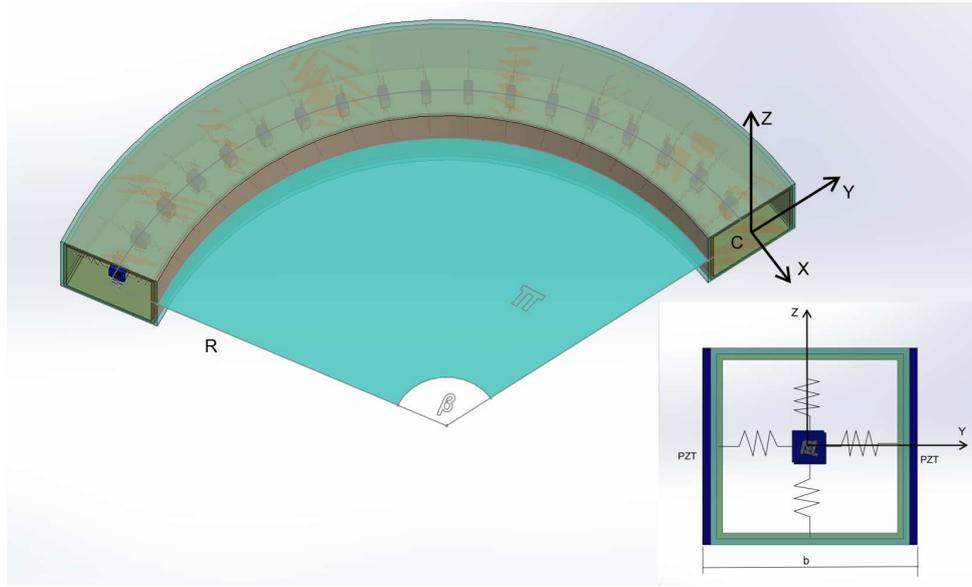


Figura 1: Viga curva de pared delgada con resonadores locales embebidos.

$$\begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x - \underline{\omega}\theta_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_3 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & 0 & -\Phi_1 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

Donde

$$\Phi_1 = \phi_x \quad \Phi_2 = \theta_y \quad \Phi_3 = \theta_z - \frac{u_x}{R} \quad \Phi_w = \theta_x + \frac{\theta_y}{R} \quad (2)$$

De la Ec. (1) se desprende que: u_x, u_y, u_z serán los desplazamientos del centro de referencia, θ_z y θ_y parámetros de rotación flexional, θ_x es el parámetro que indica la intensidad de alabeo y por último ϕ_x que es el parámetro de rotación torsional. La función de alabeo puede ser aproximada con la siguiente expresión (Piovan, 2012)

$$\underline{\omega} = \bar{\omega}F \quad \text{donde} \quad F = \frac{R}{R + y} \quad (3)$$

2.2. Campo de deformaciones. Principio de Trabajo Virtual.

Las deformaciones de la estructura portante en función del campo de desplazamientos de la Ec. (1) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{xx} &= F \left[\frac{\partial u_X}{\partial x} + \frac{u_Y}{R} \right] & \mathbf{S}_{xy} &= F \left[\frac{\partial u_Y}{\partial x} - \frac{u_X}{R} \right] + \frac{\partial u_X}{\partial y} \\ \mathbf{S}_{xz} &= F \left[\frac{\partial u_Z}{\partial x} \right] + \frac{\partial u_Z}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

Donde podemos definir el vector deformación y el vector desplazamiento como sigue:

$$\tilde{\mathbf{S}}^T = \{S_{xx}, S_{xy}, S_{xz}\} \quad \tilde{\mathbf{U}}^T = \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x\} \quad (5)$$

Donde es importante aclarar, que debido a la isotropía planar, el resto de los términos del vector deformación son iguales a cero (Di Giorgio y Piovan, 2021). Luego, para la meta-estructura

con resonadores electromecánicos, se debe definir las ecuaciones constitutivas para el material piezoeléctrico. Que según la (IEEE, 1988) se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbf{c}\mathbf{S} + e\mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= e\mathbf{S} + \epsilon\mathbf{E}\end{aligned}\quad (6)$$

Donde σ es la componente del vector tensión, \mathbf{D} es el desplazamiento eléctrico, \mathbf{S} es el vector deformación, \mathbf{E} es la componente del vector campo eléctrico, \mathbf{c} es la matriz de constantes de elasticidad longitudinal y transversal, e es la constante de acoplamiento y ϵ es la permitividad eléctrica.

Paso seguido, se realiza la formulación del principio de trabajo virtual, a partir del siguiente indicador variacional:

$$\delta\mathcal{W}_T = \int_V (\delta\mathbf{S}^T \sigma + \delta\mathbf{E}^T \mathbf{D}) \frac{dV}{F} + \int_V \rho \delta\tilde{\mathbf{U}}^T \ddot{\tilde{\mathbf{U}}} dV - \int_L \delta\tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{P}}_X dx \quad (7)$$

Reemplazando la Ec. (6) dentro de la primera integral del indicador variacional de la Ec. (7), se obtiene la expresión desarrollada del principio de trabajo virtual. Donde $\tilde{\mathbf{P}}_X$, es el vector de fuerzas externas y la segunda integral del indicador variacional hace referencia a la parte inercial.

$$\delta\mathcal{W}_T = \int_V (\delta\mathbf{S}^T \mathbf{c}\mathbf{S} + \mathbf{S}^T e\mathbf{E} + \mathbf{E}^T e\mathbf{S} + \delta\mathbf{E}^T \epsilon\mathbf{E}) \frac{dV}{F} + \int_V \rho \delta\tilde{\mathbf{U}}^T \ddot{\tilde{\mathbf{U}}} dV - \int_L \delta\tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{P}}_X dx \quad (8)$$

2.3. Discretización en elementos finitos. Bloques resonadores piezoeléctricos.

La formulación en elementos finitos se obtiene a través de la discretización de la Ec. (8) considerando el campo eléctrico $E_Y = \frac{V}{h_{pz}}$. Donde h_{pz} es la altura del piezoeléctrico y V la tensión entre bornes del mismo (Sugino et al., 2017).

Se emplea un elemento finito unidimensional, en base a la formulación débil de las ecuaciones que rigen la estática y dinámica de la meta-estructura. La discretización se llevó a cabo mediante elementos isoparamétricos de 5 nodos y funciones de forma cuárticas (Piovan y Cortínez, 2007). El vector de las variables de desplazamiento se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}}_e &= \{\bar{U}_e^{(1)}, \bar{U}_e^{(2)}, \bar{U}_e^{(3)}, \bar{U}_e^{(4)}, \bar{U}_e^{(5)}\} \\ \bar{U}_e^{(j)} &= \{u_{xcj}, u_{ycj}, \theta_{zj}, u_{zcyj}, \theta_{ycj}, \phi_{xcj}, \theta_{xcj}\} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5\end{aligned}\quad (9)$$

A partir de la formulación débil devenida del principio de trabajo virtual y aplicando los procedimientos variacionales convencionales (Piovan y Cortínez, 2007), se obtienen las siguientes ecuaciones de elementos finitos:

$$\begin{aligned}KU + C_{RD}\dot{\mathbf{U}} + M\ddot{\mathbf{U}} - TV_0 &= F \\ T^T \dot{\mathbf{U}} + C_{pz} \dot{V}_0 + Y_k V_0 &= 0 \\ C_{RD} &= \eta_1 M + \eta_2 K\end{aligned}\quad (10)$$

Donde K y M son las matrices globales de rigidez y masa, T es la matriz de acoplamiento, C_{pz} es la capacidad del piezoeléctrico, Y_k es la admitancia del bloque piezoeléctrico, C_{RD} es la matriz de amortiguamiento proporcional de Rayleigh, los coeficientes η_1 y η_2 en la Ec. (10) se pueden calcular empleando dos coeficientes de amortiguamiento dados (es decir, ξ_1 y ξ_2)

para el primer y segundo modo (Bathe, 1996); mientras que U , \ddot{U} y F son los vectores globales de desplazamientos nodales, aceleraciones nodales y fuerzas nodales, respectivamente. Con lo cual el método de elementos finitos y la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema dinámico dada por la Ec. (10), deriva en la siguiente ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo:

$$\hat{U} = \left[K - M\omega^2 + j\omega C_{RD} + (j\omega T T^T)(j\omega C_{pz} + \frac{1}{j\omega L_k + R_k})^{-1} \right]^{-1} \hat{F} \quad (11)$$

Donde \hat{U} y \hat{F} son la transformada de Fourier del vector de desplazamiento y el vector de fuerza, respectivamente; mientras ω es la frecuencia circular medida en [rad/seg]. Y para el bloque resonador piezoeléctrico tenemos que $O = T T^T$ es el vector de acoplamiento global y L_k y R_k son la inductancia y resistencia conectadas a cada bloque resonador piezoeléctrico.

2.4. Incorporación de resonadores puramente mecánicos.

Se incorpora la dinámica de los resonadores mecánicos masa-resorte, dentro de las ecuaciones de equilibrio de la estructura portante. Tendremos una ecuación para cada una de las direcciones donde estén ubicados los resonadores.

$$m_j \ddot{\bar{u}}_{yj} + k_j \bar{u}_{yj} = k_j u_{yj} \quad j = 1, \dots, N \quad (12)$$

Donde \bar{u}_{yj} es la coordenada del resonador con respecto a la dirección del eje en el cual están actuando. El desarrollo de la dinámica de los N resonadores mecánicos embebidos a lo largo de la viga, y el posterior reemplazo dentro de la parte inercial de la formulación débil de la Ec. (8), modificarán la matriz global de masa. Para realizar dicha modificación, se introduce un coeficiente α , que es el cociente entre la masa total de los resonadores mecánicos y la masa de la viga (masa distribuida). De esta manera, se pueden simplificar y adecuar las ecuaciones, ya que específicamente, el tamaño del bandgap puramente mecánico, depende de la relación de masa total agregada, siempre que exista una cantidad suficiente de resonadores embebidos (Sugino et al., 2018). El coeficiente α se define de la siguiente manera:

$$\alpha_j = \frac{m_j}{\rho A l_M} \quad (13)$$

Donde m_j es la masa de cada uno de los resonadores, l_M es la distancia entre los mismos a lo largo de la longitud de la viga, A y ρ son el área de la sección transversal y la densidad de la estructura portante. De esta manera, al introducir la dinámica de los resonadores, y teniendo en cuenta la hipótesis que contempla un sistema viga-resonadores distribuidos continuamente e idénticamente iguales, para una cantidad de resonadores infinitos, desarrollada por (Sugino, 2016), se obtiene una nueva matriz global de masa \hat{M} , que nos deriva en una nueva ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo con resonadores electromecánicos embebidos.

$$\hat{U} = \left[K - \hat{M}\omega^2 + j\omega C_{RD} + (j\omega T T^T)(j\omega C_{pz} + \frac{1}{j\omega L_k + R_k})^{-1} \right]^{-1} \hat{F} \quad (14)$$

2.5. Modelo estocástico.

A partir de la formulación de elementos finitos y del modelo determinístico, se construye el modelo estocástico. Considerando como variables aleatorias a los parámetros inciertos que pueden variar de acuerdo a la construcción de nuestra meta-estructura. Las variables aleatorias se

representan por las PDF, para luego utilizar el principio de máxima entropía, ya que este ofrece una estrategia consistente y garantiza consistencia con la información disponible (Sampaio y Cataldo, 2010). Si bien el modelo posee gran cantidad de parámetros inciertos, son de interés para el presente trabajo el coeficiente α , las propiedades de la estructura FGM y la permitividad eléctrica ϵ . Las variables aleatorias V_i con $i=1,2,3,4$ se consideran acotadas, cuyos valores límites son conocidos. En este sentido, se asume que el valor medio de las mismas coincide con el valor nominal determinístico de cada uno de los parámetros seleccionados $\mathcal{E}\{V_i\} = \underline{V}_i$, $i = 1,2,3,4$ con el fin de chequear la convergencia. Además, podemos asumir que, al no existir dependencia entre las variables, se toman de forma independiente.

De lo anterior, las PDF de las variables pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$p_{V_i}(v_i) = S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}](v_i) \frac{1}{\mathcal{U}_{V_i} - \mathcal{L}_{V_i}} = S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}](v_i) \frac{1}{2\sqrt{3}\underline{V}_i\delta_{vi}}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (15)$$

Donde $S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}]$ es el soporte, \mathcal{L}_{V_i} y \mathcal{U}_{V_i} son las cotas inferior y superior, \underline{V}_i es el valor esperado y δ_{vi} es el coeficiente de variación, todos pertenecientes a la variable V_i , $i = 1,2,3,4$. En consecuencia y mediante la función de Matlab `unifrnd`($V_i(1 - \delta_{vi}\sqrt{3})$, $V_i(1 + \delta_{vi}\sqrt{3})$), se generan las realizaciones correspondientes para las variables aleatorias V_i $i = 1, 2, 3, 4$. Mediante el modelo de elementos finitos de la Ec. (11) y Ec. (14), a través del método de Monte Carlo, con las PDF definidas en la Ec. (15) el modelo estocástico puede definirse mediante la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega) = \left[\mathbb{K} - \mathbb{M}\omega^2 + j\omega\mathbb{C}_{\text{RD}} + (j\omega\mathbb{O})(j\omega C_{pz} + \frac{1}{j\omega L_k + R_k})^{-1} \right]^{-1} \hat{\mathbf{F}} \quad (16)$$

Donde la tipografía diferenciada indica que las entidades son estocásticas. Para simular la dinámica estocástica se utiliza el método de Monte Carlo, lo que implica el cálculo de un sistema determinista para cada realización de las variables aleatorias V_i , $i = 1, 2, 3, 4$. La convergencia de la respuesta estocástica es analizada bajo un criterio de media cuadrática apelando a la siguiente función:

$$\text{conv}(N_{MS}) = \sqrt{\frac{1}{N_{MS}} \sum_{j=1}^{N_{MS}} \int_{\Omega} \left\| \hat{\mathbf{U}}_j(\omega) - \hat{\mathbf{U}}(\omega) \right\|^2 d\omega} \quad (17)$$

Donde N_{MS} es el número de muestreos de Monte Carlo y Ω es la banda de frecuencia de análisis. $\hat{\mathbf{U}}$ es la respuesta del modelo estocástico y $\hat{\mathbf{U}}$ es la respuesta del modelo determinista.

3. RESULTADOS

3.1. Validación del modelo.

En esta sección se realiza una validación del modelo de viga curva FGM, reducido al caso de viga recta de sección transversal rígida (el caso particular con $R \rightarrow \infty$) donde se compara un parámetro de frecuencia adimensional del modelo 1D de este trabajo, con los resultados correspondientes a dos trabajos seleccionados. El parámetro de frecuencia para ser evaluado se define de la siguiente manera: $\hat{\omega} = \omega \left(\frac{L^2}{h}\right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$. El primer caso seleccionado es el modelo propuesto por Fazzolari (2018), donde se comparan los valores obtenidos del parámetro adimensional con

el modelo numérico 1D del presente trabajo. La comparación se realiza para dos condiciones de contorno diferentes, en este caso Empotrada-Empotrada y Empotrada-Libre, para cinco relaciones $\frac{L}{h}$ diferentes y la primera frecuencia natural de la viga. Dando como resultado errores cercanos al 3 %.

El segundo caso seleccionado es el modelo desarrollado por [Katili et al. \(2020\)](#), donde también se comparan los valores obtenidos del parámetro adimensional. Al igual que el primer trabajo, la comparación se realiza para dos condiciones de contorno diferentes, Empotrada-Empotrada, Empotrada-Libre y para dos relaciones $\frac{L}{h}$, pero en este caso para las cinco primeras frecuencias naturales de la viga. Para esta comparación los resultados fueron aun mejores, arrojando errores cercanos al 2 %.

Para ambos casos, la comparación se realizó utilizando 15 elementos del modelo de elementos finitos 1D. La gradación de la viga FGM se considera en la dirección del espesor de la viga, la dirección del eje Z. Y para ambos trabajos el material para la fase metálica es aluminio y para la fase cerámico es alúmina. Con los datos alcanzados en la comparación antes descripta, y teniendo en cuenta la cantidad de elementos que fueron utilizados, se puede indicar que el modelo 1D propuesto en este trabajo garantiza una buena obtención de resultados.

3.2. Estudios computacionales.

Se emplea en una primera instancia una viga curva FGM tipo cajón de paredes delgadas con sección transversal simétrica y una distribución uniforme de resonadores puramente mecánicos. La condición de contorno seleccionada para los estudios computacionales es la de Empotrada-Libre. Se ejecutó el análisis bajo una respuesta armónica de excitación desde la base. Para luego mostrar los resultados de la transmitancia, definida como la relación de desplazamientos en alguna ubicación de salida en el extremo libre $u_y(L)$ y alguna ubicación en el extremo empotrado $u_y(0)$. Por otra parte, la frecuencia de sintonía de los resonadores es un parámetro importante dentro de la meta-estructura, ya que nos permite posicionar la zona del bandgap en la zona que el estudio requiera ([Sugino et al., 2018](#)). En la Fig. 2 podemos observar la respuesta dinámica de la solución del elemento finito 1D, donde se aprecia como el ancho del bandgap normalizado no se modifica cuando cambiamos la frecuencia de sintonía de los resonadores mecánicos, manteniendo el mismo valor del coeficiente α . Los datos más relevantes de la viga curva para la ejecución de los cálculos son los siguientes: $R = 2 m$, $L = 1 m$, $\alpha = 0,4$. La viga curva de paredes delgadas, tiene una sección transversal rectangular, con las siguientes dimensiones: $b = 0,01 m$, $h = 0,02 m$ y el espesor de la pared es $t = 0,002 m$. La viga FGM estará compuesta por dos componentes. La fase metálica que comenzará desde el núcleo de la viga y la fase cerámica que se ubicara en la superficie de la misma. La fase metálica es de aluminio con módulo de elasticidad longitudinal $E = 70 \text{ GPa}$, módulo de elasticidad transversal $G = 49,7 \text{ GPa}$ y densidad $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$. Luego, para la otra fase se utilizará un material cerámico, en este caso Alúmina, con módulo de elasticidad longitudinal $E = 390 \text{ GPa}$, módulo de elasticidad transversal $G = 137 \text{ GPa}$ y densidad $\rho = 3800 \text{ kg/m}^3$. El segundo caso es bajo la misma respuesta dinámica y condiciones de contorno, pero para la viga FGM tipo cajón con resonadores electromecánicos. Se incluyen los bloques resonadores piezoeléctricos a los largo de la viga para realizar la combinación de ambos. En la Fig. 3 se puede observar un bandgap puramente mecánico y otro electromecánico. Con la salvedad que al sintonizar las frecuencias de resonancia de ambos bloques resonadores con el mismo valor, se genera la combinación del bandgap y el ancho de banda generado es mayor. Formando de esta manera un bandgap combinado, abarcando un rango del espectro de frecuencia mayor que el puramente mecánico ([Sugino et al., 2018](#)). Los valores de interés para el bloque resonador piezoeléctrico PZT-5A son los si-

guientes: la altura del piezoelectrico es $h_p z = 0,5 \text{ mm}$, la altura del sustrato es $h_s = 2 \text{ mm}$, la permitividad eléctrica $\epsilon = 13,3e^{-9} \text{ F/m}$ y la constante de acoplamiento $e = 0,33 \text{ C/m}^2$.

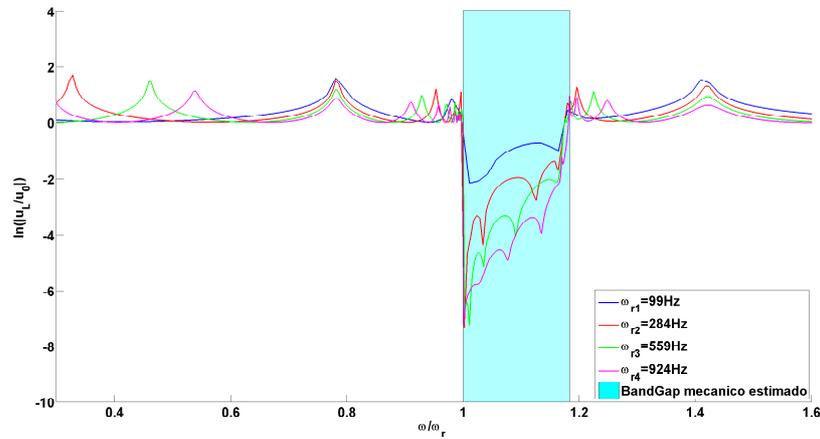


Figura 2: Respuesta dinámica con diferentes frecuencias de sintonía en resonadores mecánicos para $\alpha = 0, 4$.

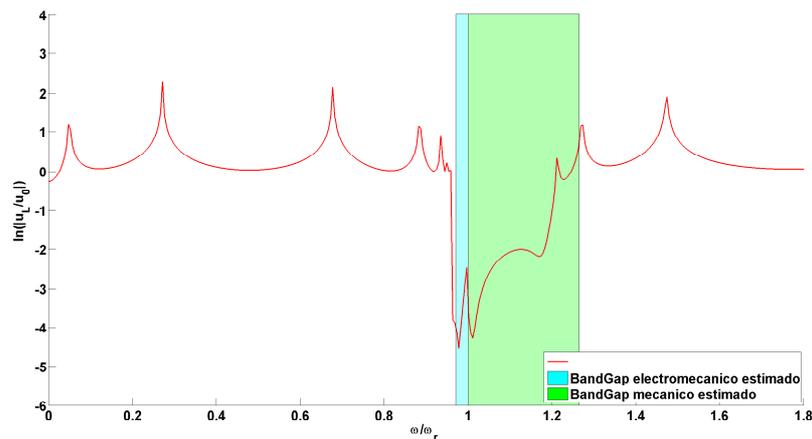


Figura 3: BandGap combinado para resonadores electromecánicos.

3.3. Cuantificación de incertidumbre en la respuesta dinámica, para resonadores electromecánicos.

En esta sección se realiza un estudio relacionado con la propagación de incertidumbre sobre aspectos constructivos de la viga FGM con la inclusión de resonadores electromecánicos. Se seleccionaron cuatro variables aleatorias de acuerdo con las características de los resonadores embebidos y con las propiedades de la viga FGM. Las variables seleccionadas son el coeficiente α , los módulos de elasticidad E_m y E_c y la permitividad eléctrica ϵ . Los valores esperados para las variables aleatorias son los siguientes: $\mathcal{E}\{\alpha\} = 0,6$, $\mathcal{E}\{\epsilon\} = 13,3e^{-9} \text{ F/m}$, $\mathcal{E}\{E_m\} = 70 \text{ GPa}$ y $\mathcal{E}\{E_c\} = 380 \text{ GPa}$. Se considera que las cuatro variables consideradas como inciertas tienen el mismo coeficiente de variación δ_{vi} . Se ejecutan las realizaciones de Monte Carlo y de esta manera se obtienen los gráficos de convergencia e incertidumbre. Es posible ver en la Fig. 4, una buena convergencia de manera estable a partir de las 500 iteraciones.

En la Fig. 5 se muestra la respuesta del modelo estocástico para el bandgap electromecánico combinado, donde puede apreciarse como la incertidumbre de los parámetros se propaga únicamente hacia la zona donde se genera la banda de atenuación, aumentando la dispersión con el aumento de incertidumbre paramétrica.

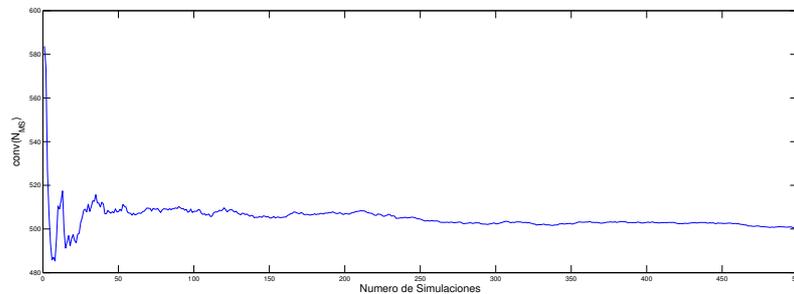


Figura 4: Convergencia para $\delta_{vi} = 0, 1$.

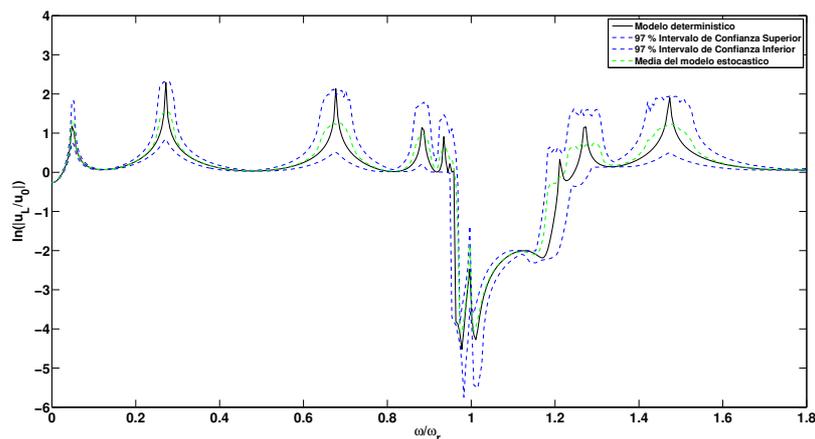


Figura 5: Respuesta del modelo estocástico para $\delta_{vi} = 0, 1$. BandGap combinado.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un modelo de viga curva FGM de paredes delgadas tipo cajón y sección transversal simétrica, con la inclusión de resonadores electromecánicos, para el análisis de atenuación de vibraciones y la propagación de incertidumbre en ciertos parámetros. Asimismo, se han efectuado estudios sobre la evaluación de la eficacia del diseño de la viga frente a la variación de cuatro variables aleatorias en el modelo estocástico y mediante la incorporación de resonadores embebidos mecánicos y de bloques resonadores piezoeléctricos a lo largo de las paredes de la viga, para el modelo computacional desarrollado. Para esto, se realizó la evaluación de la robustez del elemento finito 1D desarrollado, apelando a la comparación y demostrando que, con el mismo, se pueden reproducir resultados de vigas rectas FGM de manera aceptable, frente a la comparación con respecto al desarrollo de otros autores. En consecuencia, se puede indicar que, mediante la incorporación de los resonadores electromecánicos, se consiguió una banda de atenuación combinada en la cual la frecuencia del sistema original se atenúa, en la medida de no encontrarla en la respuesta dinámica. Sin embargo, en la Fig. 3 se puede observar,

que los bandgaps no se pueden combinar de manera perfecta. Dejando un rango de frecuencia entre ambos intervalos, que puede poner a la vista resonancia, aunque igualmente puede ser despreciable. Finalmente se realizó el estudio de la incertidumbre, cuyos resultados mostraron una sensibilidad de la respuesta a variaciones en los valores seleccionados como parámetros inciertos. A pesar de la incertidumbre en los cuatro parámetros seleccionados, se puede ver que el bandgap, más allá de la dispersión generada, se mantiene en un rango deseable y garantiza la atenuación de la amplitud para la frecuencia seleccionada.

REFERENCIAS

- Bathe K.J. *Finite Element procedures in Engineerign Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1996.
- Di Giorgio L.E. y Piovan M.T. Stochastic aspects in dynamics of curved electromechanic metastructures. En *Proceedings of the 5th International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modelling*, páginas 111–120. Springer International Publishing, 2021. ISBN 978-3-030-53669-5.
- Fazzolari F.A. Generalized exponential, polynomial and trigonometric theories for vibration and stability analysis of porous fg sandwich beams resting on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*, 136:254–271, 2018. ISSN 1359-8368. doi:<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.10.022>.
- IEEE. *An American National Standard: IEEE Standard on Piezoelectricity Standard*. IEEE, 1988.
- Karamanlı A. Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory. *Composite Structures*, 189:127–136, 2018. ISSN 0263-8223. doi:<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.060>.
- Katili I., Syahril T., y Katili A.M. Static and free vibration analysis of fgm beam based on unified and integrated of timoshenko's theory. *Composite Structures*, 242:112130, 2020. ISSN 0263-8223. doi:<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112130>.
- Parham Zahedinejad e.a. A comprehensive review on vibration analysis of functionally graded beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 4, 2020.
- Piovan M. y Cortínez V. Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin Walled Structures*, 45:759–789, 2007.
- Piovan M.T. In-plane and out-of-plane dynamics and buckling offunctionally graded circular curved beams. *Composite Structures*, 94:3194–3206, 2012.
- Sampaio R. y Cataldo E. Comparing two strategies to model uncertainties in structuraldynamics. *Shock and Vibration*, 17:171–186, 2010.
- Sangiuliano L. The use of locally resonant metamaterials to reduce flow-induced noise and vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 535, 2022.
- Sugino C. On the mechanism of bandgapformation in locally resonant finite elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 120:134–501, 2016.
- Sugino C., Leadenham S., Ruzzene M., y Erturk A. An investigation of electroelastic bandgap formation in locally resonant piezoelectric metastructures. *Smart Materials and Structures*, 26(5):055029, 2017. doi:10.1088/1361-665X/aa6671.
- Sugino C., Ruzzene M., y Erturk A. Merging mechanical and electromechanical bandgaps in locally resonant metamaterials and metastructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 116:323–333, 2018. ISSN 0022-5096. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.04.005>.