

## ANÁLISIS DE BANDAS DE ATENUACIÓN EN VIGAS RECTAS CONSTRUIDAS MEDIANTE FABRICACIÓN ADITIVA INCORPORANDO RESONADORES MECÁNICOS MASA-RESORTE

### ANALYSIS OF ATTENUATION BANDS IN STRAIGHT BEAMS BUILT BY ADDITIVE MANUFACTURING INCORPORATING MASS-SPRING MECHANICAL RESONATORS

Walter Horacio Fruccio<sup>a</sup>, Federico Masch<sup>a</sup>, Marcelo Tulio Piovan<sup>b</sup> y Rogelio Hecker<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa. Calle 110 N°390, 6360, Gral Pico, Pcia La Pampa. Argentina, <http://www.ing.unlpam.edu.ar>

<sup>b</sup>Centro de Investigaciones de Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional FRBB. 11 de Abril 461, B8000LMI, Bahía Blanca, Pcia Buenos Aires. Argentina. , <http://www.frbb.utn.edu.ar>

**Palabras clave:** Impresión 3D, Meta-estructuras, Atenuación, Ensayos Experimentales.

**Resumen.** La fabricación aditiva ha tenido un crecimiento exponencial en los últimos años. Lo que genera interés en la implementación, para la construcción de meta-estructuras. Estas, pueden generar un comportamiento vibratorio muy interesante, es decir, la presencia de bandas de atenuación en un determinado rango de frecuencias. En este trabajo se introduce un modelo computacional unidimensional de viga recta de paredes delgadas, con la inclusión de resonadores mecánicos masa-resorte. Se construyó un modelo de elementos finitos 1D a partir de la formulación débil del principio de trabajo virtual. El modelo fue evaluado mediante diferentes ensayos dinámicos, en vigas rectas fabricadas con la tecnología de impresión 3D. En tal sentido, el resorte de los resonadores también fue fabricado con dicha tecnología. Paso previo, se realizaron ensayos para determinar los parámetros de rigidez y masa efectiva del resonador, al fin de obtener valores para la posterior comparación con el modelo a evaluar. Dichos parámetros, pueden generar una modificación en la banda de atenuación, esto hace que el estudio de la variabilidad ante la incertidumbre en dichos parámetros sea relevante para nuestro análisis.

**Keywords:** 3D Printing, Meta-structures, Attenuation, Experimental Tests.

**Abstract.** Additive manufacturing has had an exponential growth in recent years. This generates interest in its implementation for the construction of meta-structures. In this work, a one-dimensional computational model of a thin-walled straight beam is introduced, with the inclusion of mechanical mass-spring resonators. A 1D finite element model was built from the weak formulation of the virtual work principle. The model was evaluated through different dynamic tests, on straight beams manufactured with 3D printing technology. In this sense, the spring of the resonators was also manufactured with this technology. As a previous step, tests were carried out to determine the stiffness and effective mass parameters of the resonator, in order to obtain values for later comparison with the model to be evaluated. These parameters can generate a modification in the attenuation band, which makes the study of variability due to uncertainty in these parameters relevant to our analysis.

## 1. INTRODUCCIÓN

La fabricación aditiva ha tenido un avance más que significativo en la última década. Dentro de estos métodos de fabricación se encuentra el método de impresión 3D FDM (Fused Deposition Modeling). Con el cual se pueden conseguir fabricaciones avanzadas con niveles de detalle muy elevados (Zhou et al., 2023). En este sentido, el prototipado rápido y la idea de confeccionar el modelo para la fabricación de piezas o productos, hace que la misma se vuelva cada vez más elegida. Dentro de estas elecciones se encuentran desarrollos en el ámbito de la industria aeroespacial, automotriz, aeronáutica, etc. Además, otro de los atractivos, es una amplia variedad de materiales y el espectro de temperaturas que pueden manejar los equipos utilizados en dicha tecnología, para la construcción de estructuras complejas, combinando diferentes materiales y propiedades (Wu et al., 2023).

En este trabajo se introduce un modelo computacional 1D de elementos finitos, para una viga recta de paredes delgadas, con la inclusión de resonadores masa-resorte. Dicho modelo fue evaluado por diferentes ensayos dinámicos, que se realizaron en vigas rectas fabricadas con la tecnología de impresión 3D FDM. En primer lugar se evaluó la robustez del modelo mediante la comparación directa de las frecuencias naturales obtenidas en los ensayos experimentales. Por otra parte y para realizar el análisis de las bandas de atenuación se diseñaron y fabricaron, también mediante el método de impresión 3D FDM, resortes romboidales que al agregar una masa determinada formarían el resonador masa-resorte necesario para la conformación de la meta-estructura deseada. La constante de rigidez de dicho resorte se obtuvo mediante un ensayo de tipo estático, a los efectos de tener los datos necesarios para poder sintonizar la frecuencia del resonador con diferentes masas.

Por último, se crea el modelo estocástico, apelando al modelo computacional del enfoque determinista. Cuyas funciones de densidad de probabilidades (PDF) se deducen del principio de máxima entropía (Soize, 2017). Se utiliza el método de Monte Carlo para generar el modelo estocástico, para el cual se deben ejecutar diferentes simulaciones con realizaciones independientes.

## 2. DESARROLLO

### 2.1. Descripción cinemática del modelo.

En la Fig. 1 se muestra un esquema de una viga recta de pared delgada, con la inclusión de resonadores mecánicos a lo largo de la misma. En la cual el punto de referencia principal  $\{C\}$  se encuentra en el centro geométrico de la sección transversal, la cual es rectangular y rígida, donde el eje X es paralelo al eje longitudinal de la viga, mientras que Y y Z son los ejes asociados a la sección transversal. Las principales dimensiones asociadas a la viga son: la longitud L, el ancho b y el espesor h. Teniendo en cuenta que las mismas respetarán las relaciones establecidas para una viga de pared delgada  $\frac{h}{L} < 0,05$ .

El modelo teórico de la meta-estructura portante se basa en las siguientes hipótesis: A-La sección transversal de la viga recta tiene la configuración de paredes delgadas. B-La sección trasversal es regular y rígida en su propio plano. C-El campo de desplazamientos tendrá los términos lineales de primer orden para su descripción. Teniendo en cuenta las hipótesis antes descriptas, tendremos el siguiente campo de desplazamientos (Piovan y Cortínez, 2007)

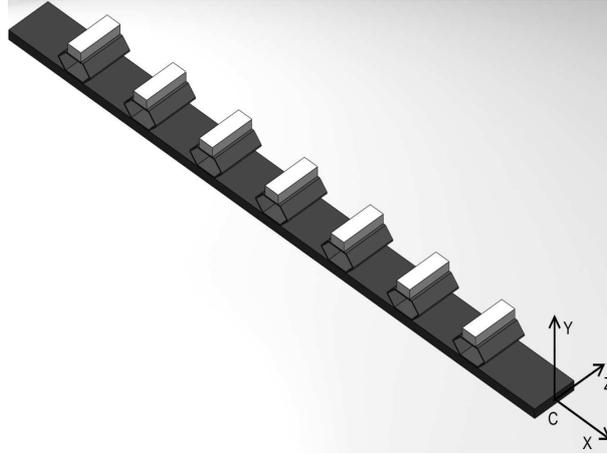


Figura 1: Viga recta con resonadores mecánicos.

$$\begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x - \omega\theta_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & -\theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

De la Ec. (1) se desprende que:  $u_x, u_y, u_z$  serán los desplazamientos del centro de referencia,  $\theta_z$  y  $\theta_y$  parámetros de rotación flexional,  $\theta_x$  es el parámetro que indica la intensidad de alabeo y  $\phi_x$  es el parámetro de rotación torsional. Por último, cabe aclarar que  $\omega$  es la función de alabeo.

## 2.2. Ecuaciones constitutivas y campo de deformaciones.

Conforme al campo de desplazamientos y a las variables cinemáticas, se define el vector desplazamiento, el vector deformación y el vector de esfuerzos internos (Piovan et al., 2012)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^T &= \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x\} & \tilde{\mathbf{D}}^T &= \{\varepsilon_{D1}, \varepsilon_{D2}, \varepsilon_{D3}, \varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^T &= \{Q_x, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\} \end{aligned} \quad (2)$$

De esta manera, la expresión general de las ecuaciones constitutivas de los esfuerzos en función de las deformaciones generalizadas queda definido de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T = [J] \tilde{\mathbf{D}}^T \quad (3)$$

Donde  $J_E$  es la matriz constitutiva de los esfuerzos y los coeficientes  $J_{ik}$ , que forman parte de la matriz, se pueden encontrar desarrollados en el trabajo de Piovan et al. (2012).

Se definen las componentes del vector deformación, en función de las variables cinemáticas involucradas para el caso de análisis.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{D2} &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, & \varepsilon_{D3} &= \frac{\partial \theta_z}{\partial x}, & \varepsilon_{D4} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{D5} &= \frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \theta_z, & \varepsilon_{D6} &= \frac{\partial u_{zc}}{\partial x} + \theta_y, & \varepsilon_{D7} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x, & \varepsilon_{D8} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

De la misma manera, podemos realizar el planteo de la parte inercial, donde se obtiene la matriz de coeficientes de inercia.

$$\tilde{\mu} = M_m \tilde{\ddot{U}} \quad \tilde{\mathbf{U}}^T = \left\{ \ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{\theta}_z, \ddot{u}_{zc}, \ddot{\theta}_y, \ddot{\phi}_x, \ddot{\theta}_x \right\} \quad (5)$$

Donde  $M_m$  es la matriz de coeficientes de inercia y los coeficientes  $I_{ik}$ , que forman parte de la matriz, se pueden encontrar desarrollados en el trabajo de [Piovan et al. \(2012\)](#).

### 2.3. Discretización en elementos finitos. Principio de trabajo virtual.

Se realiza el estudio paramétrico del problema planteado, empleando un elemento finito unidimensional, en base a la formulación débil de las ecuaciones que rigen la estática y dinámica de la meta-estructura. Esta formulación se obtiene mediante el principio de trabajo virtual, a partir del siguiente indicador variacional.

$$\mathcal{W}_T = \int_L \left( \delta \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \right) dx + \int_L \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}_m \tilde{\ddot{U}} dx - \int_L \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{P}}_X dx \quad (6)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{P}}_X$ , es el vector de fuerzas externas. Luego, la formulación del elemento finito se obtiene mediante la discretización de la Ec. (6), donde se utilizan elementos de 5 nodos y funciones de forma cuárticas ([Piovan y Cortínez, 2007](#)). Dentro del presente trabajo, se utilizará una discretización de 16 elementos, para luego realizar una comparación directa con el modelo experimental. El vector de las variables de desplazamiento se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{U}_e &= \{ \bar{U}_e^{(1)}, \bar{U}_e^{(2)}, \bar{U}_e^{(3)}, \bar{U}_e^{(4)}, \bar{U}_e^{(5)} \} \\ \bar{U}_e^{(j)} &= \{ u_{xcj}, u_{ycj}, \theta_{zj}, u_{zcyj}, \theta_{ycj}, \phi_{xcj}, \theta_{xcj} \} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \quad (7)$$

A partir de la formulación débil devenida del principio de trabajo virtual y aplicando los procedimientos variacionales convencionales ([Piovan y Cortínez, 2007](#)), se obtiene la siguiente ecuación de elementos finitos:

$$\begin{aligned} KU + C\dot{U} + M\ddot{U} &= F \\ C &= \eta_1 M + \eta_2 K \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $K$  y  $M$  son las matrices globales de rigidez y masa,  $C$  es la matriz de amortiguamiento proporcional de Rayleigh, los coeficientes  $\eta_1$  y  $\eta_2$  en la Ec. (8) se pueden calcular empleando dos coeficientes de amortiguamiento dados (es decir,  $\xi_1$  y  $\xi_2$ ) para el primer y segundo modo ([Bathe, 1996](#)); mientras que  $U$ ,  $\dot{U}$  y  $F$  son los vectores globales de desplazamientos nodales, aceleraciones nodales y fuerzas nodales, respectivamente. Con lo cual el método de elementos finitos y la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema dinámico dada por la Ec. (8), deriva en la siguiente ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo:

$$\hat{U} = [K - \omega^2 M + j\omega C]^{-1} \hat{F} \quad (9)$$

Donde  $\hat{U}$  y  $\hat{F}$  son la transformada de Fourier del vector de desplazamiento y el vector de fuerza, respectivamente; mientras  $\omega$  es la frecuencia circular medida en [rad/seg].

### 2.4. Resonadores masa-resorte.

Se incorpora la dinámica de los resonadores mecánicos masa-resorte, donde tendremos una ecuación dinámica para la ubicación de los resonadores, en este caso la dirección del eje Y.

$$m_{rj} \ddot{u}_{yj} + k_{rj} \bar{u}_{yj} = k_{rj} u_{yj} \quad j = 1, \dots, N \quad (10)$$

Donde  $\bar{u}_{yj}$  es la coordenada del resonador con respecto al eje Y. El desarrollo de la dinámica de los resonadores masa-resorte, alteran la parte inercial de la formulación débil de la Ec. (9), modificando de esta manera la matriz global de inercia. Por lo tanto, se introducen dos parámetros a tener en cuenta. Por un lado la frecuencia de sintonía del resonador, definida como  $\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}$ . Esta frecuencia, es un parámetro importante dentro de la meta-estructura, ya que nos permite posicionar el bandgap en la zona que el estudio requiera (Sugino et al., 2018). Por otro lado, se introduce un coeficiente  $\alpha$ , que es el cociente entre la masa total de los resonadores mecánicos y la masa de la viga (masa distribuida). Ya que específicamente, el tamaño del bandgap, dependerá de la relación de masa total agregada (Sugino, 2016). El coeficiente  $\alpha$  se define de la siguiente manera:

$$\alpha_j = \frac{m_{rj}}{\rho A l_M} \quad (11)$$

Donde  $m_{rj}$  es la masa de cada uno de los resonadores,  $l_M$  es la distancia entre los mismos a lo largo de la longitud de la viga,  $A$  y  $\rho$  son el área de la sección transversal y la densidad de la estructura portante. De esta manera, al introducir la dinámica de los resonadores, se obtiene una nueva matriz global de inercia  $\hat{M}$ , que nos deriva en una nueva ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo con resonadores masa-resorte:

$$\hat{U} = \left[ K - \hat{M}\omega^2 + j\omega C \right]^{-1} \hat{F} \quad (12)$$

En la Fig. 2 se puede observar el resonador diseñado para los ensayos experimentales presentados en el presente trabajo. El resorte romboidal tiene las siguientes dimensiones: Longitud  $0,03\text{ m}$ , ancho  $0,025\text{ m}$  y espesor de pared  $0,006\text{ m}$ . El mismo fue construido mediante impresión 3D, y el material utilizado fue PETG. Para determinar la constante de rigidez del resorte, se realizó un ensayo de tipo estático con carga de avance continuo. Del cual se tomaron los datos de dos sensores independientes para generar la curva necesaria, en este caso una recta y determinar la constante buscada. El valor de la rigidez del resorte que arrojaron los diferentes ensayos es  $k_r = 7494\text{ N/m}$ . Con el dato de esta constante, se puede seleccionar una masa calibrada para sintonizar el resonador a una frecuencia conocida, cercana a la de resonancia de la viga. Y de esta manera generar la atenuación en esa zona.



Figura 2: (a) Resonador Masa-Resorte.(b) Modelo CAD 3D del resorte romboidal.

## 2.5. Modelo estocástico

A partir de la formulación de elementos finitos y del modelo determinístico, se construye el modelo estocástico. Considerando como variables aleatorias a los parámetros inciertos que pueden variar de acuerdo a la construcción de nuestra meta-estructura. Las variables aleatorias se

representan por las PDF, para luego utilizar el principio de máxima entropía (Piovan y Sampaio, 2015). Para el presente trabajo, son de interés dos parámetros inciertos. Por un lado la constante de rigidez del resorte romboidal  $k$ , y por otro el módulo de elasticidad del material utilizado para la impresión de la probeta tipo viga  $E$ . Las variables aleatorias  $V_i$  con  $i=1,2$  se consideran acotadas, cuyos valores limites son conocidos. En este sentido, se asume que el valor medio de las mismas coincide con el valor nominal determinístico de cada uno de los parámetros seleccionados  $\mathcal{E}\{V_i\} = \underline{V}_i$ ,  $i=1,2$  con el fin de chequear la convergencia.

De lo anterior, las PDF de las variables pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$p_{V_i}(v_i) = S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}](v_i) \frac{1}{\mathcal{U}_{V_i} - \mathcal{L}_{V_i}} = S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}](v_i) \frac{1}{2\sqrt{3}\underline{V}_i\delta_{vi}}, \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

Donde  $S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}]$  es el soporte,  $\mathcal{L}_{V_i}$  y  $\mathcal{U}_{V_i}$  son las cotas inferior y superior,  $\underline{V}_i$  es el valor esperado y  $\delta_{vi}$  es el coeficiente de variación, todos pertenecientes a la variable  $V_i$ ,  $i=1,2$ . En consecuencia y mediante la función de Matlab `unifrnd(V_i(1 - \delta_{vi}\sqrt{3}), V_i(1 + \delta_{vi}\sqrt{3}))`, se generan las realizaciones correspondientes para las variables aleatorias  $V_i$   $i = 1, 2$ . Mediante el modelo de elementos finitos de la Ec. (8) y la Ec. (12), a través del método de Monte Carlo, con las PDF definidas en la Ec. (13) el modelo estocástico puede definirse mediante la siguiente expresión:

$$\widehat{\mathbf{U}}(\omega) = [\mathbb{K} - \mathbb{M}\omega^2 + j\omega\mathbb{C}]^{-1} \widehat{\mathbf{F}} \quad (14)$$

Donde la tipografía diferenciada indica que las entidades son estocásticas. Para simular la dinámica estocástica se utiliza el método de Monte Carlo, lo que implica el cálculo de un sistema determinista para cada realización de las variables aleatorias  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ . La convergencia de la respuesta estocástica es analizada bajo un criterio de media cuadrática apelando a la siguiente función:

$$\text{conv}(N_{MS}) = \sqrt{\frac{1}{N_{MS}} \sum_{j=1}^{N_{MS}} \int_{\Omega} \|\widehat{\mathbf{U}}_j(\omega) - \widehat{\mathbf{U}}(\omega)\|^2 d\omega} \quad (15)$$

Donde  $N_{MS}$  es el número de muestreos de Monte Carlo y  $\Omega$  es la banda de frecuencia de análisis.  $\widehat{\mathbf{U}}$  es la respuesta del modelo estocástico y  $\widehat{\mathbf{U}}$  es la respuesta del modelo determinista.

### 3. RESULTADOS

#### 3.1. Estudios computacionales.

Se realiza el estudio computacional para la viga recta, con características similares y para simular la situación en las que se realizó el experimento. Recreando la condición de contorno y las propiedades de la probeta utilizada para tal fin. La condición de contorno seleccionada es la de Empotrada-Libre. Se ejecutó el análisis bajo una respuesta armónica de excitación desde la base.

En la Fig. 3 (a) se puede observar como al agregar las masas de forma periódica tenemos un corrimiento de las frecuencias de resonancia. En cambio, en la Fig. 3 (b) se observa la respuesta dinámica, y como aparece el bandgap al incluir los siete resonadores de forma periódica a lo largo de la Viga. Los datos más relevantes de la viga recta para la ejecución de los cálculos son los siguientes: Longitud  $L = 0,4 m$ , coeficiente  $\alpha = 1$ , ancho  $b = 0,03 m$  y espesor

$h = 0,005 m$ . El modulo de elasticidad utilizado para el material PETG es  $E = 1750 GPa$ , modulo de elasticidad transversal  $G = 673 GPa$  y densidad  $\rho = 1271,11 kg/m^3$ .

Para atenuar la respuesta a una frecuencia específica del sistema original, se debe seleccionar una frecuencia de sintonía para el resonador, que sea ligeramente menor ( $\omega_r = 0,9\omega$ ), (Sugino, 2017). Para el presente trabajo, la frecuencia seleccionada para el sistema con siete masas agregadas es 140 Hz. Con lo cual, se seleccionó una masa con un peso de  $m_r = 0,013 kg$ , lo que resulta en una sintonización para cada resonador que ronda en los 120 hz.

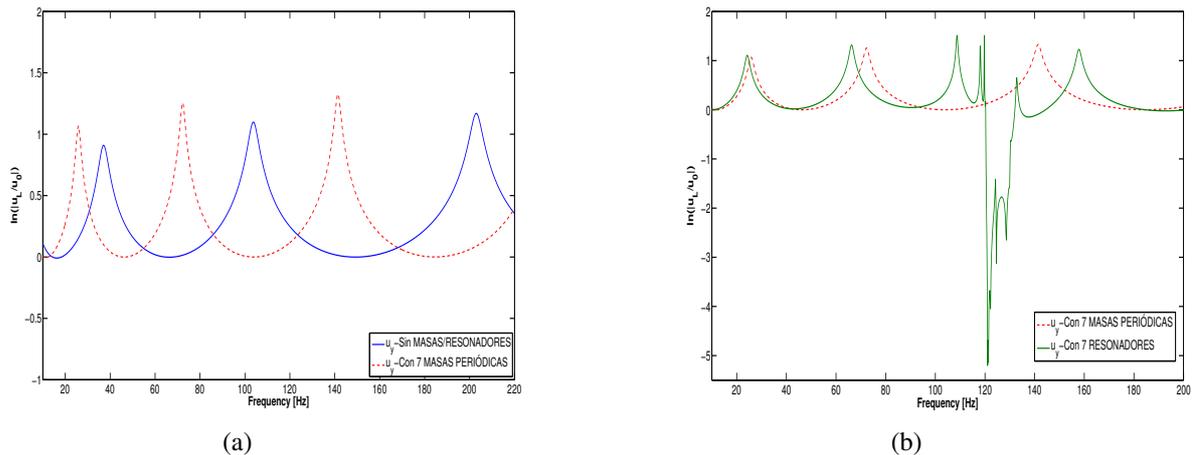


Figura 3: Respuesta dinámica del modelo 1D. (a) Viga sin masas ni resonadores (Azul) VS Viga con 7 masas periódicas (Rojo). (b) Viga con 7 masas periódicas (Rojo) VS Viga con 7 resonadores periódicos (Verde).

### 3.2. Validación experimental del modelo.

El modelo de elementos finitos 1D del presente trabajo se validó con un ensayo dinámico de tipo experimental. Se compararon los resultados de la simulación de elementos finitos y las frecuencias naturales de una viga recta de paredes delgadas fabricada mediante impresión 3D, con PETG como material de fabricación. La respuesta dinámica se ejecutó bajo una respuesta armónica de excitación desde la base y la condición de contorno es Empotrada-libre. La excitación, se realizó mediante una fuente de vibración controlada, compuesta por el conjunto Amplificador-Caja acústica-Altavoz. Dicho amplificador está alimentado por un generador de funciones, para darle las propiedades requeridas a dicha excitación. La aceleración tanto de la probeta como de la base se obtuvieron mediante un acelerómetro ADXL203 de Analog Devices. Los datos obtenidos en dichos experimentos se utilizaron para calcular el módulo de elasticidad longitudinal del material utilizado para la fabricación de las probetas. En la Fig. 4 se puede observar como está montada la viga recta en el conjunto Caja acústica-Altavoz con siete resonadores masa-resorte distribuidos de forma periódica a lo largo de la viga.

En la Fig. 5 (a) se puede observar la comparación de las frecuencias naturales del modelo de elementos finitos y los ensayos experimentales de la viga recta sin masas ni resonadores. Mientras que en la Fig. 5 (b), se aprecia la comparación de las frecuencias naturales de la viga con siete masas agregadas de forma periódica a lo largo de la viga. Donde se considera que el modelo 1D del presente trabajo obtiene resultados muy cercanos a los experimentos realizados.

Por otro lado en la Fig. 6 se puede ver la comparación de la respuesta dinámica de los datos experimentales. En la Fig. 6 (a) se observa la comparación entre la viga sin masas y la viga con siete masas agregadas de forma periódica. Donde claramente se ve el corrimiento de las frecuencias de resonancia. En cambio, en la Fig. 6 (b) tenemos el experimento entre la viga

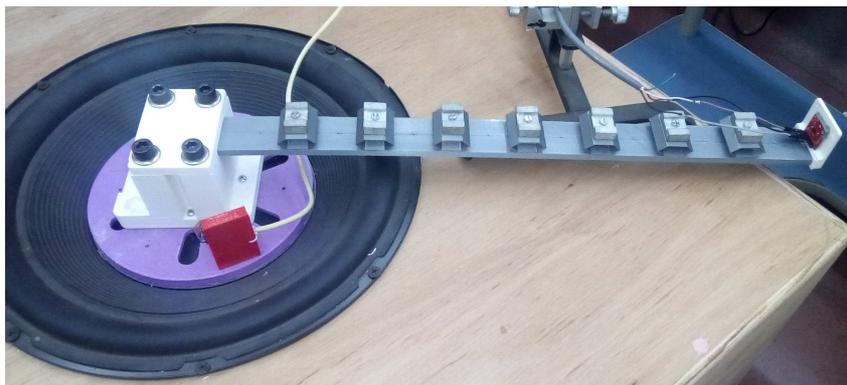


Figura 4: Viga en voladizo con 7 Resonadores periódicos

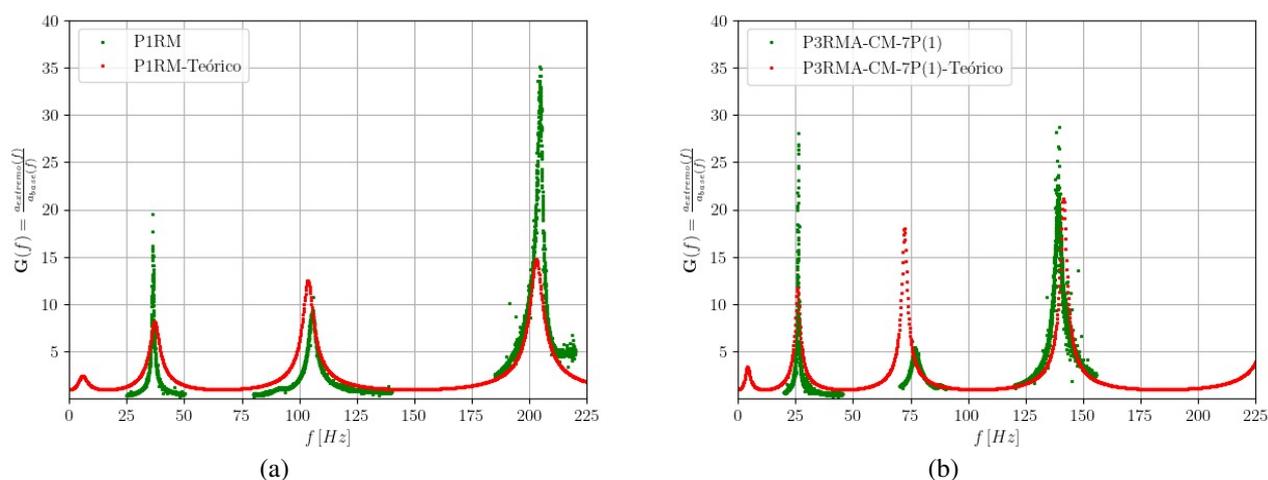


Figura 5: Comparación de frecuencias naturales Experimental Vs Teórico (a) Sin Masas. Color verde Experimental-Color rojo Teórico (b) Con 7 masas agregadas. Color verde Experimental-Color rojo Teórico

con siete masas agregadas y la viga con los siete resonadores de forma periódica. En este caso podemos ver que el pico de la frecuencia de resonancia está atenuado y desaparece en la zona de la frecuencia de sintonía de los resonadores.

Ahora bien, comparando la Fig. 3 (b) con la Fig. 6 (b), podemos ver que en ambos gráficos aparece una zona de atenuación del pico de resonancia. Donde se aprecia un corrimiento del mismo y por ende no aparece en la zona de la frecuencia de sintonía de los resonadores.

### 3.3. Cuantificación de incertidumbre en la respuesta dinámica.

En esta sección se realiza un estudio relacionado con la propagación de incertidumbre sobre aspectos constructivos de la viga y los resonadores masa-resorte. Se seleccionaron dos variables aleatorias de acuerdo con las características de los resonadores y con las propiedades de la viga. Las variables seleccionadas son la constante de rigidez del resorte  $k$ , y el modulo de elasticidad del material utilizado para la impresión de la viga  $E$ . Los valores esperados para las variables aleatorias son los siguientes:  $\mathcal{E}\{k\} = 7494,452 \text{ N/m}$  y  $\mathcal{E}\{E\} = 1750 \text{ GPa}$ . Se considera que las dos variables consideradas como inciertas tienen el mismo coeficiente de variación  $\delta_{vi}$ . En la Fig. 7, se puede observar una buena convergencia de manera estable a partir de las 500 iteraciones. Luego, en la Fig. 8 se muestra la respuesta del modelo estocástico para la viga con los 7 resonadores distribuidos de forma periódica, donde puede apreciarse como la incertidumbre de los parámetros se propaga únicamente hacia la zona donde se genera la

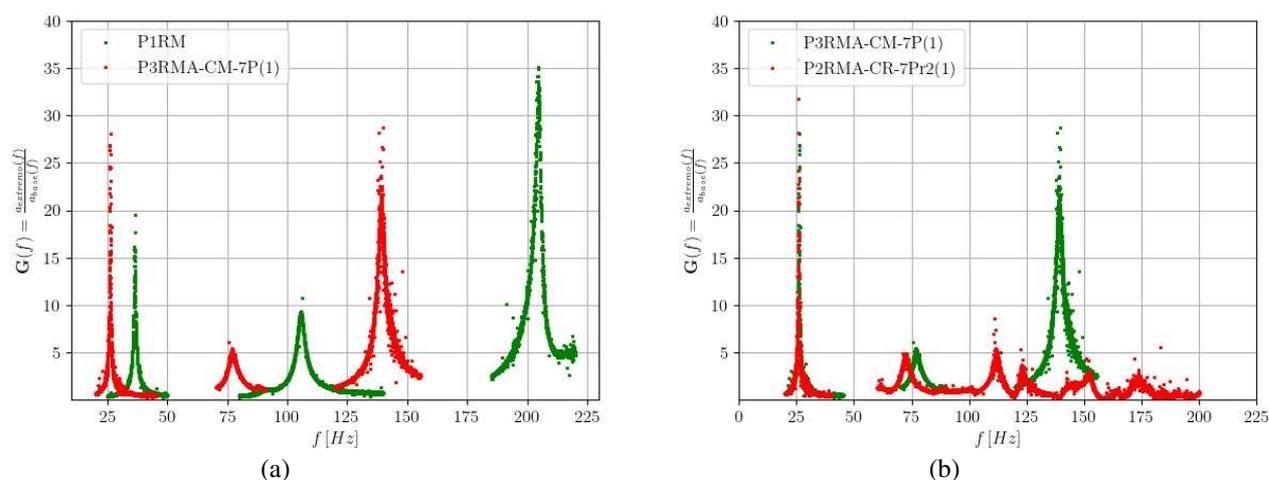


Figura 6: Respuesta dinámica del experimento. (a) Viga sin masas (Verde) VS Viga con 7 masas agregadas periódicas (Rojo). (b) Viga con 7 masas agregadas periódicas (Verde) VS Viga con 7 resonadores periódicos (Rojo).

banda de atenuación, aumentando la dispersión con el aumento de incertidumbre paramétrica y generando una gran variabilidad en esa zona.

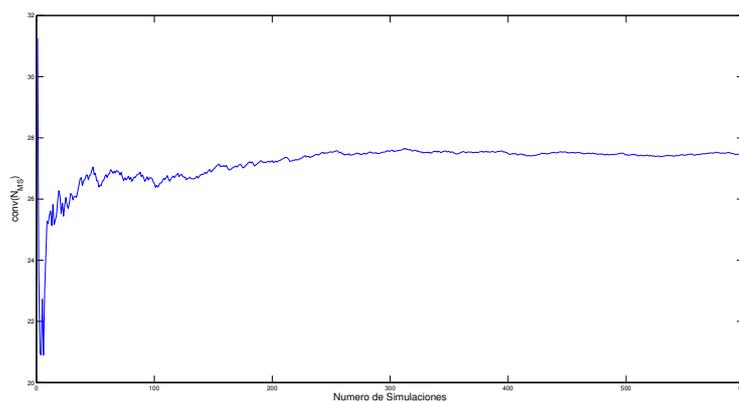


Figura 7: Convergencia para  $\delta_{vi} = 0,08$ .

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un modelo de viga recta de paredes delgadas, con la inclusión de resonadores masa-resorte, para el análisis de atenuación de vibraciones y la propagación de incertidumbre en ciertos parámetros. Asimismo, se han efectuado ensayos de tipo experimental para evaluar la eficacia del diseño de la viga frente a la variación de dos variables aleatorias en el modelo estocástico y mediante la incorporación de resonadores masa-resorte, para el modelo computacional desarrollado. Para esto, se realizó la evaluación de la robustez del elemento finito 1D desarrollado, apelando a la comparación y demostrando que, con el mismo, se pueden reproducir resultados aceptables comparados con los ensayos experimentales. En consecuencia, se puede indicar que, mediante la incorporación de los resonadores masa-resorte, se consiguió una clara atenuación del pico de resonancia que se encuentra en la zona cercana a la frecuencia de sintonización seleccionada para los resonadores. Finalmente se realizó el estudio de la incertidumbre, cuyos resultados mostraron una variación importante en la zona donde se genera

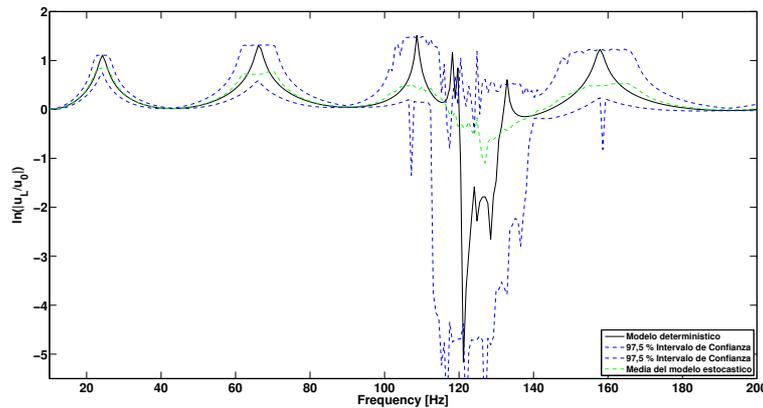


Figura 8: Respuesta del modelo estocástico para  $\delta_{vi} = 0,08$ . Viga con 7 resonadores periódicos

el bandgap, de acuerdo a las variaciones en los valores seleccionados como parámetros inciertos. Por último, se puede indicar que de acuerdo a los dos parámetros inciertos seleccionados, tenemos una gran dispersión en la zona del bandgap.

## REFERENCIAS

- Bathe K.J. *Finite Element procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1996.
- Piovan M. y Cortínez V. Mechanics of shear deformable thin-walled beams made of composite materials. *Thin Walled Structures*, 45:37–62, 2007.
- Piovan M., Domini S., y Ramirez J. In-plane and out-of-plane dynamics and buckling of functionally graded circular curved beams. *Composite Structures*, 94(11):3194–3206, 2012. ISSN 0263-8223. doi:<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.032>.
- Piovan M. y Sampaio R. Parametric and non-parametric probabilistic approaches in the mechanics of thin-walled composite curved beams. *Thin-Walled Structures*, 90:95–106, 2015. ISSN 0263-8231. doi:<https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.12.018>.
- Soize C. *Uncertainty Quantification*, volumen 47. 2017. ISBN 978-3-319-54338-3. doi:10.1007/978-3-319-54339-0.
- Sugino C. On the mechanism of bandgapformation in locally resonant finite elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 120:134–501, 2016.
- Sugino C. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures. *Journal of Sound and Vibration*, 406:104–123, 2017.
- Sugino C., Ruzzene M., y Erturk A. Merging mechanical and electromechanical bandgaps in locally resonant metamaterials and metastructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 116:323–333, 2018. ISSN 0022-5096. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.04.005>.
- Wu L., Xue J., Tian X., Liu T., y Li D. 3d-printed metamaterials with versatile functionalities. *Chinese Journal of Mechanical Engineering: Additive Manufacturing Frontiers*, 2(3):100091, 2023. ISSN 2772-6657. doi:<https://doi.org/10.1016/j.cjmeam.2023.100091>.
- Zhou X., Ren L., Song Z., Li G., Zhang J., Li B., Wu Q., Li W., Ren L., y Liu Q. Advances in 3d/4d printing of mechanical metamaterials: From manufacturing to applications. *Composites Part B: Engineering*, 254:110585, 2023. ISSN 1359-8368. doi:<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2023.110585>.