

DETERMINACIÓN DE LA PEOR IMPERFECCIÓN EN ESTRUCTURAS APOTICADAS

DETERMINATION OF THE WORST IMPERFECTION IN FRAMED STRUCTURES

Claudio E. Jouglard^a y Ana L. Perez^b

^aDepartamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional, Mozart 2300, C1407IVT Buenos Aires, Argentina, claudio.jouglard@frba.utn.edu.ar, <http://www.frba.utn.edu.ar>

^aDepartamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional General Pacheco, Universidad Tecnológica Nacional, Av. Hipólito Yrigoyen 288, General Pacheco, Tigre, Buenos Aires, Argentina, analizaperez1@gmail.com, <http://www.frba.utn.edu.ar>

Palabras clave: Estructuras de acero, estabilidad, imperfecciones, modos de pandeo.

Resumen. Las normativas actuales de análisis estructural especifican que las estructuras deben ser analizadas considerando la presencia de imperfecciones en su geometría, esto es, desvíos respecto de la geometría ideal o perfecta especificada en el diseño. Las normas también indican que se debe considerar aquella imperfección que produzca el mayor efecto desestabilizante, sin embargo, no propone criterios para obtenerlas. En este trabajo se presenta una metodología para calcular la peor imperfección de una estructura formada por vigas y columnas. Es bien conocido que la forma de la peor imperfección está asociada a los primeros modos de pandeo y en particular si la primera carga crítica se encuentra suficientemente separada de la segunda, entonces la peor imperfección viene dada por el primer modo de pandeo, este es el caso típico de la mayoría de las estructuras aporticadas. Luego se propone un método iterativo eficiente para encontrar los dos primeros modos de pandeo para verificar que el primer modo de pandeo es efectivamente la peor imperfección.

Keywords: Steel Structures, stability, imperfections, buckling modes.

Abstract. Current structural analysis codes specify that structures must be analyzed considering the presence of imperfections in their geometry—that is, deviations from the ideal or perfect geometry defined in the design. These standards also state that the imperfection causing the greatest destabilizing effect must be considered; however, they do not propose criteria for identifying it. This work presents a methodology for calculating the worst imperfection in a structure composed of beams and columns. It is well known that the shape of the worst imperfection is associated with the first buckling modes, and particularly, if the first critical load is sufficiently separated from the second, then the worst imperfection corresponds to the first buckling mode. This is typically the case for most frame structures. An efficient iterative method is then proposed to find the first two buckling modes in order to verify that the first mode indeed represents the worst imperfection.

1. INTRODUCCIÓN

Definimos a una imperfección como un desvío en la geometría de una estructura "*perfecta*" generando una estructura "*imperfecta*". Las estructuras reales son imperfectas y el efecto de las imperfecciones implica la aparición de efectos de segundo orden que aumentan los esfuerzos sobre la estructura y pueden llevarla a una pérdida de estabilidad (colapso estructural) ([Bazant y Cedolin, 2010](#); [Godoy, 1996](#)).

En los últimos años las normas más modernas de Estados Unidos ([ANSI/AISC, 2019](#)) y Europa ([EUROCODE, 2009](#)) (en nuestro país el ([INTI-CIRSOC, 2018](#))) recomiendan la incorporación de imperfecciones en el análisis y permiten su modelado directo para la verificación de la estabilidad de estructuras metálicas. El modelado directo consiste en desplazar directamente las coordenadas de los nodos de una estructura para representar directamente la geometría imperfecta.

Estas normas recomiendan emplear la “*peor*” imperfección para analizar la estructura, esto es utilizar aquella que causa el mayor efecto desestabilizante. Ha sido sugerido hace muchos años atrás ([Timoshenko y Gere, 1961](#)) que el primer modo de pandeo tiene esta propiedad y se ha demostrado en la tesis ([Toledo, 2021](#)) que para que esto sea cierto las cargas críticas de pandeo correspondientes al primero y segundo modo deben estar separadas. Si esto no ocurriera hay que usar procedimientos especiales (que se muestran en la Tesis) para encontrar la peor imperfección como una combinación lineal de los modos de pandeo más bajos.

La determinación de los modos de pandeo conlleva la utilización de rutinas complejas, es un problema de autovalor y autovector conocido en inglés como “buckling problem”. En estructuras aporticadas, compuestas por vigas y columnas, en general, la carga crítica del primer modo de pandeo es sustancialmente más baja que la del segundo modo, por lo que se puede asumir como peor imperfección al primer modo de pandeo.

En este trabajo presentaremos un procedimiento iterativo simplificado para obtener sólo el primer y segundo modo de pandeo y sus cargas críticas asociadas, de manera que si están suficientemente separadas se pueda utilizar con confianza al primer modo de pandeo como peor imperfección para el análisis.

2. ANÁLISIS DEL SISTEMA PERFECTO

Asumiremos que las cargas son proporcionales a un parámetro de cargas λ , esto es, todas las cargas se incrementan o disminuyen de manera proporcional a este parámetro (figura 1).

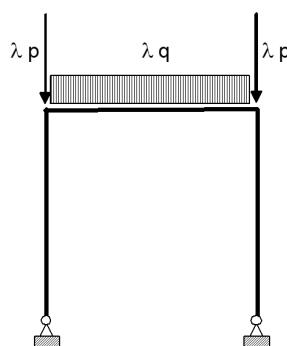


Figura 1: Sistema estructural y cargas.

Luego, bajo la acción de las cargas, el sistema estructural se deforma adoptando diferentes configuraciones deformadas (figura 2).

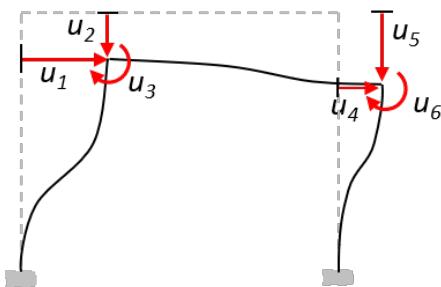


Figura 2: Estructura deformada.

Asumiremos que estas configuraciones deformadas quedan completamente definidas por un conjunto discreto de n coordenadas generalizadas u_i que se pueden ordenar en un vector \mathbf{u} de coordenadas generalizadas como:

$$\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_n\}^T \quad (1)$$

Usualmente las coordenadas generalizadas están asociadas a los desplazamientos de ciertos puntos característicos de la estructura (figura 2) y cuando el sistema estructural se modela mediante elementos finitos las coordenadas generalizadas generalmente estarán asociadas a los desplazamientos nodales de la discretización.

2.1. Ecuaciones de Equilibrio

Asumiremos que el sistema estructural es conservativo, esto es, todas las cargas que actúan sobre la estructura y por lo tanto el sistema posee una función de energía potencial V que se puede expresar como

$$V(\mathbf{u}, \lambda) = U(\mathbf{u}) - \lambda W(\mathbf{u}) \quad (2)$$

Donde $U(\mathbf{u})$ es la energía potencial de deformación, que asumimos que sólo depende de las coordenadas generalizadas \mathbf{u} . Las fuerzas externas son asumidas proporcionales a un *parámetro o factor de cargas* λ y la función $W(\mathbf{u})$ representa el trabajo de las fuerzas externas.

Para obtener las ecuaciones de equilibrio debemos derivar la energía potencial total respecto de las coordenadas generalizadas \mathbf{u}

$$V_{\mathbf{u}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial u_1} \ \frac{\partial V}{\partial u_2} \ \frac{\partial V}{\partial u_3} \ \dots \ \frac{\partial V}{\partial u_n} \right\}^T \quad (3)$$

Notemos que hemos indicado al vector de derivadas parciales respecto de las coordenadas generalizadas con un subíndice \mathbf{u} en negrita significando que debemos derivar respecto de cada coordenada generalizada y que el resultado será un vector.

Luego las ecuaciones de equilibrio se obtienen igualando a cero las derivadas de la energía potencial total respecto de las coordenadas generalizadas, esto es

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = V_{\mathbf{u}} = U_{\mathbf{u}} - \lambda W_{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Si definimos al vector de fuerzas internas generalizadas $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ asociado a la energía de deformación U como

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = U_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \quad (5)$$

En general, este vector será una función *no lineal* de las coordenadas generalizadas u_i que dependerá de la complejidad de la función $U(\mathbf{u})$.

De manera similar definimos un vector \mathbf{p} de fuerzas externas generalizadas de referencia, que se obtiene derivando el trabajo de las fuerzas externas W como:

$$\mathbf{p} = W_{\mathbf{u}} \quad (6)$$

Luego podemos escribir las ecuaciones de equilibrio como

$$\boxed{\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0}} \quad (7)$$

Las soluciones \mathbf{u}, λ a estas ecuaciones son curvas y por ser ecuaciones no lineales pueden existir múltiples soluciones.

Si el vector de fuerzas internas generalizadas $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ es una función no lineal de las coordenadas generalizadas u_i tendremos un conjunto de soluciones \mathbf{u}, λ que se pueden representar como curvas en *diagramas de respuesta* de u_i, λ , esto es, que muestran la variación simultánea del parámetro λ y una coordenada generalizada u_i .

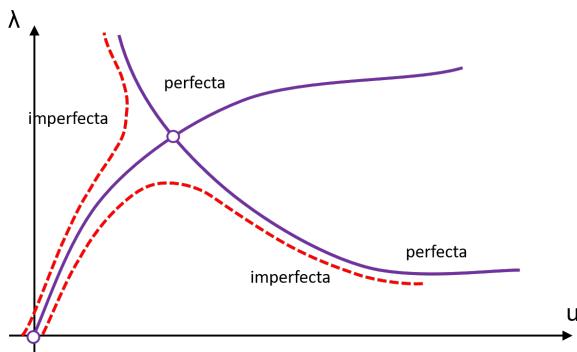


Figura 3: Diagrama de respuesta de una estructura perfecta e imperfecta.

Notemos que el comportamiento de la estructura imperfecta es *asintótico* al de la estructura perfecta y dependerá de la amplitud de las imperfecciones.

3. CARGAS CRÍTICAS DE LA ESTRUCTURA

El problema conocido como de cargas de pandeo (buckling problem) se puede expresar matricialmente como ([Toledo, 2021](#)):

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_G) \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (8)$$

siendo \mathbf{K}_0 la matriz de rigidez tangente en la configuración indeformada definida como:

$$\mathbf{K}_0 = U_{\mathbf{uu}}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} U_{,11}^0 & U_{,12}^0 & \dots & U_{,1n}^0 \\ U_{,21}^0 & U_{,22}^0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{,n1}^0 & \dots & \dots & U_{,nn}^0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde U_{ij}^0 son derivadas segundas de la energía de deformación respecto de las coordenadas generalizadas u_i, u_j y el índice superior 0 indica que las cantidades se evalúan en el origen.

Además, \mathbf{K}_G es la *matriz de rigidez geométrica* definida como

$$\mathbf{K}_G = U_{\mathbf{uuu}}^0 \mathbf{d}_0 \quad (10)$$

donde $U_{\mathbf{uuu}}^0$ es un tensor de tercer orden que involucra las derivadas tercera de la energía de deformación y \mathbf{d}_0 es la solución de

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{d}_0 = \mathbf{p} \quad (11)$$

Usando un algoritmo como el método de Lanczos [Cullum y Willoughby \(2002\)](#); [Peng-Li \(1990\)](#) o el método de iteración en un subespacio [\(Bathe, 2013\)](#), que son los métodos usualmente empleados en el análisis estructural podemos calcular los primeros modos de pandeo y sus respectivas cargas críticas asociadas.

4. DETERMINACIÓN DE LA PEOR IMPERFECCIÓN

El conjunto de autovectores ϕ_i es un conjunto linealmente independiente que forma una base en el espacio de las coordenadas generalizadas u_i , esto es cualquier vector de este espacio se puede describir como una combinación lineal de estos modos. Asumiendo que las imperfecciones puedan ser descriptas por el mismo conjunto de coordenadas generalizadas u_i utilizado para describir las deformaciones de la estructura, entonces podremos representar s cualquier imperfección mediante un vector \mathbf{w} en el espacio de las coordenadas generalizadas. Luego, como los autovectores son independientes entre sí puedo asumir que el vector de imperfección \mathbf{w} se puede representar por una combinación lineal de estos autovectores como

$$\mathbf{w} = \beta_1 \phi_1 + \beta_2 \phi_2 + \beta_3 \phi_3 + \dots + \beta_n \phi_n \quad (12)$$

Donde hemos asumido que los autovectores ϕ_i están ordenados según el valor creciente de los módulos de sus autovalores asociados λ_i , esto es, $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$.

El vector tangente $\rho^{[1]}$ al camino de equilibrio es un indicador de la rigidez de la estructura en cada punto. Si este vector se aplana indica pérdida de rigidez. En la tesis [\(Toledo, 2021\)](#) se demuestra que la influencia de las imperfecciones sobre el vector tangente viene dada por un vector $\mathbf{v}^{[1,1]}$ que se puede expresar como

$$\mathbf{v}^{[1,1]} = \frac{\beta_1}{\lambda_1} \phi_1 + \frac{\beta_2}{\lambda_2} \phi_2 + \frac{\beta_3}{\lambda_3} \phi_3 + \dots + \frac{\beta_n}{\lambda_n} \phi_n \quad (13)$$

Analizando esta ecuación podemos concluir que las formas de imperfección \mathbf{w} que más influencian la componente $\mathbf{v}^{[1,1]}$ son las asociadas a los modos más bajos de pandeo, esto es, aquellos con menor λ_i .

Luego podemos hacer una analogía con los modos de vibración de una estructura donde la respuesta estructural en vibraciones libres viene dominada por los modos más bajos, en este

caso las formas de imperfecciones más influyentes vienen dadas por la forma de los modos de pandeo más bajos.

Si los valores de las primeras cargas críticas se encuentran bien separados, entonces podemos asumir que la peor imperfección tiene la forma del primer modo y podemos expresar a la componente $\mathbf{v}^{[1,1]}$ como

$$\boxed{\mathbf{v}^{[1,1]} \approx \frac{\beta_1}{\lambda_1} \phi_1} \quad (14)$$

Debemos resaltar que este hecho ya ha sido mencionado por varios autores, por ejemplo, ([Timoshenko y Gere, 1961](#)), donde se especifica que para vigas columnas la peor imperfección corresponde a la forma del primer modo de pandeo.

5. APROXIMACIONES AL PRIMER Y SEGUNDO MODO

Los métodos de Lanczos y de iteración en un subespacio son muy eficientes para el cálculo de autovalores y autovectores. Sin embargo, estos métodos están preparados para calcular un gran número de autovalores y autovectores y en nuestro caso sólo deseamos conocer el primer y segundo modo. Luego es más conveniente utilizar un método más simple que nos permita determinar un par autovalor y autovector por vez, como el *Método de las Potencias*.

Método de las Potencias (máximo autovalor)

Problema:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Pasos:

1. Escoger $\mathbf{x}^{(0)}$.

2. Iterar:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}, \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{y}^{(k)}}{\|\mathbf{y}^{(k)}\|}.$$

3. Estimar autovalor (cociente de Rayleigh):

$$\lambda_{\max}^{(k)} = \frac{(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}}{(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{x}^{(k)}}.$$

Resultado: λ_{\max} (autovalor dominante) y \mathbf{x} (autovector asociado).

En este caso hemos obtenido el máximo autovalor (en valor absoluto) y su autovector asociado. Si quisieramos encontrar el menor autovalor deberíamos utilizar el Método de las Potencias Inverso.

Método de Potencias Inverso (mínimo autovalor)

Problema:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$$

Pasos:

1. Escoger $\mathbf{x}^{(0)}$.
2. Iterar resolviendo:

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)}, \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{y}^{(k)}}{\|\mathbf{y}^{(k)}\|}.$$

3. Estimar:

$$\mu^{(k)} = \frac{(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{y}^{(k)}}{(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{x}^{(k)}}, \quad \lambda_{\min}^{(k)} = \frac{1}{\mu^{(k)}}.$$

Resultado: λ_{\min} (autovalor más pequeño) y \mathbf{x} (autovector asociado).

Para encontrar el menor autovalor del problema generalizado seguimos los siguientes pasos:

Método de las Potencias Inversas Generalizado para pandeo

Problema:

$$\mathbf{K}\phi = -\lambda \mathbf{K}_G\phi, \quad \mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_G, \quad \mu = -\frac{1}{\lambda}.$$

Pasos:

1. Escoger vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.
2. Resolver en cada iteración:

$$\mathbf{K}\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{K}_G\mathbf{x}^{(k)}.$$

3. Normalizar:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{y}^{(k)}}{\|\mathbf{y}^{(k)}\|}.$$

4. Calcular cociente de Rayleigh:

$$\mu^{(k)} = \frac{(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{y}^{(k)}}{(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{x}^{(k)}}.$$

5. Menor autovalor:

$$\lambda^{(k)} = -\frac{1}{\mu^{(k)}}.$$

Resultado: λ_1, ϕ_1 (primer modo de pandeo).

Una vez obtenido el primer modo puedo obtener el segundo modo aplicando el método de las potencias inversas con ortogonalización

Segundo modo de pandeo

Ortogonalización

1. Ejecutar de nuevo el método de potencias inverso.
2. En cada iteración, forzar ortogonalidad respecto al primer modo:

$$\mathbf{y}^{(k)} \leftarrow \mathbf{y}^{(k)} - (\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{y}^{(k)}) \boldsymbol{\phi}_1.$$

3. Normalizar y continuar iteraciones.

Resultado: $\lambda_2, \boldsymbol{\phi}_2$ (segundo modo de pandeo).

Ahora podemos comparar los autovalores, esto es, si $\lambda_2/\lambda_1 > tol$ entonces el primer modo es dominante para las imperfecciones.

6. INFLUENCIA DE LAS IMPERFECCIONES

Si se considera que el primer modo es dominante en las imperfecciones entonces debemos modificar la geometría de la estructura desplazando los nodos por un factor de amplificación que dependerá de las tolerancias constructivas.

Las imperfecciones sólo afectarán las coordenadas nodales, por lo que todo el proceso de ensamblaje de matrices y vectores no se ve afectado y este es el procedimiento adoptado por la mayoría de los programas de análisis estructural, aunque no es el único. En la referencia ([Jouglard y Perez, 2024](#)) se ha presentado un elemento finito que contempla en su formulación la presencia de imperfecciones con mayor precisión que los elementos clásicos de vigas.

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado una metodología simplificada para el cálculo de la peor imperfección en estructuras aporticadas donde el primer modo es la imperfección dominante. El proceso de determinación de los primeros dos modos es bastante más simple que los procedimientos actualmente disponibles. Además, se puede efectuar el cálculo de los modos fuera de los programas de análisis e incorporar la información de imperfección directamente con las coordenadas desplazadas, no requiriendo este último procedimiento ninguna modificación de los programas de análisis.

REFERENCIAS

- ANSI/AISC. ANSI/AISC 360-16 Specification for Structural Steel Buildings. 2019.
- Bathe K.J. The subspace iteration method – Revisited. *Computers & Structures*, 126:177–183, 2013. <http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.06.002>.
- Bazant Z.P. y Cedolin L. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. World Scientific, 2010.
- Cullum J.K. y Willoughby R.A. *Lanczos Algorithms for Large Symmetric Eigenvalue Computations: Vol. 1: Theory*. SIAM, 2002. ISBN 978-0-89871-523-1.
- EUROCODE. EUROCODE 3, Design of Steel Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. 2009.
- Godoy L.A. *Thin-Walled Structures with Structural Imperfections*. Elsevier, 1996.

INTI-CIRSOC. CIRSOC 301 - reglamento Argentino de Estructuras de Acero para Edificios. 2018.

Jouglard C.E. y Perez A.L. Un Elemento Finito Simplificado para Análisis de Vigas Imperfectas. En *28 Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*. Buenos Aires, Argentina, 2024.

Peng-Li S. Buckling analysis of nonlinear structures using Lanczos method. *Computers & Structures*, 36(6):1111–1120, 1990. [http://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90219-R](http://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90219-R).

Timoshenko S. y Gere J.M. *Theory of Elastic Stability* (2ed.). McGraw-Hill, 2 ed. edición, 1961.

Toledo J.A. *Metodología para el Análisis No Lineal Geométrico de Estructuras de Barras con Imperfecciones*. Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco, Buenos Aires, Argentina, 2021.