

## IMPLEMENTACIÓN EN CÓDIGO ABIERTO DE UN MÉTODO PARA EL ANÁLISIS POST-COLAPSO DE PÓRTICOS

### OPEN-SOURCE IMPLEMENTATION OF A METHOD FOR POST-COLLAPSE FRAME ANALYSIS

**Sergio A. Merlin Chiozza y Jorge M. Pérez Zerpa**

*Instituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República,  
Montevideo, Uruguay, smerlino@fing.edu.uy, <https://www.fing.edu.uy/es/iet>*

**Palabras clave:** Elastoplasticidad Computacional, carga última, post-colapso, rótulas de ablandamiento.

**Resumen.** Una de las formas de colapso de las estructuras es la falla por fluencia en secciones críticas. El método clásico de la carga última de colapso, considera que una vez alcanzado el límite plástico en una sección, la capacidad resistente en la rótula se mantiene constante mientras se desarrolla la plastificación en otras secciones. Se puede mostrar que este método sobreestima la carga de colapso. Una alternativa, es considerar la pérdida de resistencia a través de la formación de rótulas con ablandamiento mientras se van alcanzando ciertos valores límites. En este trabajo, se describe un método numérico que aplica el elemento finito de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación, en el modelado de rótulas plásticas de ablandamiento, en vigas y pórticos planos, usando control de desplazamientos. La formulación descrita fue implementada en código abierto como extensión del software ONSAS ([www.onsas.org](http://www.onsas.org)). Se resuelven ejemplos numéricos de la literatura, cuyos resultados permiten validar la implementación y mostrar el potencial de su aplicación.

**Keywords:** Computational Elastoplasticity, ultimate load, post-collapse, softening hinges.

**Abstract.** One of the causes of structural collapse is creep failure in critical sections. The classic analysis of the ultimate load considers that once the plastic limit is reached in a section, the strength at the hinge remains constant while plastic deformation develops in other sections. It can be shown that this method overestimates the collapse load. As an alternative to this approach, the strength failure response can be considered, by considering softening hinges that are formed upon reaching limit values. In this work, a numerical method is described in detail to apply the Euler-Bernoulli finite element with strong rotation discontinuity to the modeling of plastic softening hinges in beams and planar frames, using displacements control. The described formulation was implemented as open-source extending the software ONSAS ([www.onsas.org](http://www.onsas.org)). Numerical examples from the literature are solved, and the obtained results validate the implementation and show the potential of its application.

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se describe un método numérico para el análisis post-colapso de pórticos —con activación de rótulas plásticas de ablandamiento—, mediante la implementación del elemento finito de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación ([Armero y Ehrlich, 2006](#)). Este método es una alternativa al análisis clásico de la carga última de colapso, que supone momento de plastificación constante y por lo tanto sobreestima la carga de colapso.

La respuesta de una estructura, considerando sus rótulas plásticas de ablandamiento, podría modelarse con una ley constitutiva que incorpore la relación de ablandamiento entre las medidas de deformación generalizadas y las correspondientes tensiones equivalentes. Sin embargo, de esa forma, al refinar la malla, la disipación de energía plástica tiende a cero, lo cual no se ajusta a la física real. Es por ello que se debe aplicar un método de limitación de la localización ([Ibrahimbegovic, 2009](#); [Lasry y Belytschko, 1988](#)).

## 2. ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI CON DISCONTINUIDAD

En esta sección se describe una formulación del elemento finito de viga de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación basada en ([Armero y Ehrlich, 2006](#); [Jukić et al., 2013](#)), para el modelado de rótulas plásticas de ablandamiento.

### 2.1. Cinemática

Los grados de libertad del elemento finito son los desplazamientos nodales generalizados del elemento estándar, a los que se adiciona un grado de libertad  $\alpha$  como se muestra en la Figura 1. Este grado de libertad adicional representa la discontinuidad angular de la viga en la rótula de ablandamiento. Para los desplazamientos axiales se utiliza la interpolación lineal usual (en

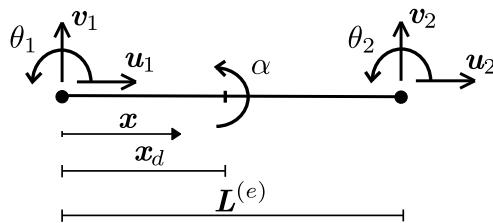


Figura 1: Grados de libertad de los nodos del elemento en coordenadas locales.

coordenadas locales):

$$u(x) = \mathbf{N}^u(x)\mathbf{u}, \quad \mathbf{N}^u(x) = \left\{ 1 - \frac{x}{L^e}, \frac{x}{L^e} \right\}, \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2\}^\top, \quad (1)$$

donde la deformación axial  $\epsilon$  correspondiente está dada por:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{\mathbf{B}^u(x)\mathbf{u}}_{\bar{\epsilon}}, \quad \mathbf{B}^u(x) = \left\{ -\frac{1}{L^e}, \frac{1}{L^e} \right\}. \quad (2)$$

Para los desplazamientos transversales  $v$  se utiliza una interpolación cúbica para los valores nodales de desplazamiento y rotación, y un término adicional que representa la discontinuidad. La expresión de  $v$  está dada por:

$$v(x, x_d) = \mathbf{N}^v(x)\mathbf{v} + \mathbf{N}^\theta(x)\theta + \hat{M}(x, x_d)\alpha, \quad \mathbf{v} = \{v_1, v_2\}^\top, \quad \theta = \{\theta_1, \theta_2\}^\top, \quad (3)$$

donde  $x_d$  es la posición de la rótula en el elemento  $x_d \in [0, L^e/2, L^e]$ ,  $\mathbf{N}^v(x)$  y  $\mathbf{N}^\theta(x)$  son las matrices de funciones de interpolación de Hermite y la función  $\hat{M}(x, x_d)$  se determina imponiendo que la curvatura continua sea nula al agotarse la capacidad resistente de la rótula de ablandamiento y está dada por la siguiente expresión:

$$\hat{M}(x, x_d) = \frac{(L^e - x)^2 [L^e x - (L^e + 2x)x_d]}{L^{e3}} + (x - x_d) [-1 + H_{x_d}(x)]. \quad (4)$$

La función  $\hat{M}$  introduce una discontinuidad en la curvatura cuando se activa la rótula plástica de ablandamiento (es decir cuando  $\alpha$  deja de ser nulo). La curvatura en el elemento está dada por:

$$\kappa(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) = \mathbf{B}^v(x)\mathbf{v} + \mathbf{B}^\theta(x)\theta + \frac{\partial^2 \hat{M}}{\partial x^2}(x, x_d)\alpha, \quad (5)$$

donde las matrices  $\mathbf{B}$  tienen las derivadas de las funciones de interpolación.

Al derivar  $\hat{M}$ , se obtiene un término singular (con la función de delta de Dirac). De esta forma la curvatura puede ser escrita como una suma de una parte continua  $\bar{\kappa}$  y otra singular  $\bar{\bar{\kappa}}$ :

$$\kappa(x) = \underbrace{\mathbf{B}^v(x)\mathbf{v} + \mathbf{B}^\theta(x)\theta}_{\bar{\kappa}} + \underbrace{\bar{G}(x, x_d)\alpha + \delta_{x_d}\alpha}_{\bar{\bar{\kappa}}}, \quad (6)$$

donde considerando  $\bar{\kappa} = 0$  (curvatura continua nula al agotarse la capacidad resistente de la rótula de ablandamiento), se puede obtener  $\bar{G}$ :

$$\bar{G}(x, x_d) = -\frac{1 + 3\left(1 - \frac{2x_d}{L^e}\right)\left(1 - \frac{2x}{L^e}\right)}{L^e}. \quad (7)$$

El caso límite de curvatura nula al agotarse la capacidad resistente de la rótula puede ser representado gráficamente a través de la Figura 2, y por la expresión:

$$v_2 = v_1 + x_d\theta_1 + (L^e - x_d)(\alpha + \theta_1), \quad \theta_2 = \theta_1 + \alpha. \quad (8)$$

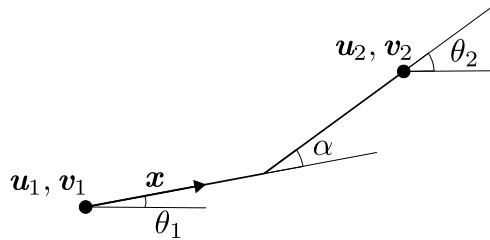


Figura 2: Rótula de ablandamiento con resistencia nula.

## 2.2. Equilibrio de un elemento

Considerando el equilibrio de un elemento de Euler-Bernoulli con discontinuidad, y aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV), si  $G^{int,e}$  es el trabajo virtual de las fuerzas internas y  $G^{ext,e}$  el trabajo virtual de las fuerzas externas, se debe cumplir  $G^{int,e} = G^{ext,e}$  para

todo desplazamiento virtual compatible con las condiciones de borde. Considerando la deformación axial virtual y la curvatura virtual, respectivamente:

$$\delta\epsilon(x) = \mathbf{B}^u(x)\delta\mathbf{u}, \quad (9)$$

$$\delta\kappa(x) = \mathbf{B}^v(x)\delta\mathbf{v} + \mathbf{B}^\theta(x)\delta\boldsymbol{\theta} + (\bar{G}(x, x_d) + \delta_{x_d})\delta\alpha, \quad (10)$$

siendo  $N$  la directa y  $M$  el momento flector, sustituimos las deformaciones virtuales en la expresión del trabajo virtual de las fuerzas internas:

$$G^{int,e} = \int_0^{L^e} \delta\epsilon N dx + \int_0^{L^e} \delta\kappa M dx = \underbrace{\int_0^{L^e} \delta\mathbf{d}^T(\mathbf{B}^d)^T \boldsymbol{\sigma} dx}_{estándar} + \underbrace{\int_0^{L^e} \delta\alpha(\bar{G} + \delta_{x_d})M dx}_{adicional}, \quad (11)$$

donde  $\delta\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{B}^d$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  están dados, respectivamente, por:

$$\delta\mathbf{d} = \{\delta\mathbf{u}^T, \delta\mathbf{v}^T, \delta\boldsymbol{\theta}^T\}^T, \quad \mathbf{B}^d = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^v & \mathbf{B}^\theta \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \{N, M\}^T. \quad (12)$$

El trabajo virtual se compone de una parte estándar, y un término adicional que incorpora la discontinuidad cinemática de rotación. El PTV aplicado a un elemento se puede escribir como:

$$G^{int,e} - G^{ext,e} = \delta\mathbf{d}^T \underbrace{(\mathbf{f}^{int,e} - \mathbf{f}^{ext,e})}_{=0} + \delta\alpha \underbrace{h^e}_{=0} = 0, \quad \forall \delta\mathbf{d}, \delta\alpha, \quad (13)$$

siendo  $\mathbf{f}^{int,e}$  dado por:

$$\mathbf{f}^{int,e} = \int_0^{L^e} \mathbf{B}^{d,T} \boldsymbol{\sigma} dx, \quad (14)$$

y  $h^e$  dado por:

$$h^e = \int_0^{L^e} (\bar{G} + \delta_{x_d})M dx = \int_0^{L^e} \bar{G}M dx + \underbrace{M|_{x_d}}_{\int_0^{L^e} \delta_{x_d} M dx} = \int_0^{L^e} \bar{G}M dx + t = 0, \quad (15)$$

A partir de la última igualdad se puede obtener el momento en la discontinuidad,

$$t = - \int_0^{L^e} \bar{G}M dx. \quad (16)$$

Finalmente, se procede al ensamblado a nivel de la estructura obteniendo las ecuaciones no lineales:

$$\bigwedge_{e=1}^{N_{elem}} (\mathbf{f}^{int,e} - \mathbf{f}^{ext,e}) = \mathbf{0}, \quad h^e = 0 \quad \forall e. \quad (17)$$

### 2.3. Relaciones constitutivas

En el modelo considerado se asume que la respuesta vinculada a la deformación axial es elástica lineal, siendo  $E$  el módulo elástico,  $A$  el área de la sección transversal del elemento y  $\bar{\epsilon}$  la deformación continua axial, por lo tanto la directa está dada por:

$$N = EA\bar{\epsilon}. \quad (18)$$

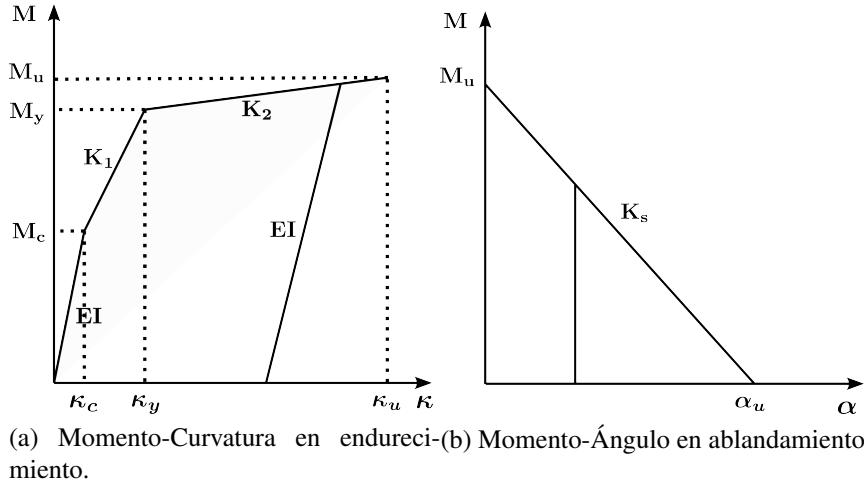


Figura 3: Relaciones constitutivas.

Se considera la hipótesis de pequeñas rotaciones, y por lo tanto, la curvatura continua  $\bar{\kappa}$ , es la suma de la curvatura elástica  $\bar{\kappa}^e$  y la plástica  $\bar{\kappa}^p$ ,

$$\kappa = \bar{\kappa} + \bar{\kappa}, \quad \bar{\kappa} = \bar{\kappa}^e + \bar{\kappa}^p. \quad (19)$$

En el régimen elastoplástico el ángulo  $\alpha$  es cero, por lo tanto la curvatura discreta  $\bar{\kappa}$  es cero. La ecuación constitutiva momento-curvatura es:

$$M = EI\bar{\kappa}^e = EI(\bar{\kappa} - \bar{\kappa}^p), \quad (20)$$

donde  $I$  es la inercia flexional de la sección. El comportamiento constitutivo está dado por la relación momento-curvatura para el caso de endurecimiento, según la Figura 3a, y para el caso de ablandamiento de acuerdo a la Figura 3b.

## 2.4. Flexión elastoplástica con endurecimiento

Dado el momento  $M$  en cada punto de integración, la función de fluencia es:

$$\bar{\phi}(M, \bar{q}) = |M| - (M_c - \bar{q}), \quad (21)$$

donde  $\bar{q}$  es una función del endurecimiento  $\bar{\xi}$ , dada por:

$$\bar{q} = \begin{cases} -K_{h1}\bar{\xi}, & \text{si } \bar{\xi} \leq \frac{M_y - M_c}{K_{h1}}, \\ -(M_y - M_c) \left(1 - \frac{K_{h2}}{K_{h1}}\right) - K_{h2}\bar{\xi}, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (22)$$

siendo  $K_{h1}$  y  $K_{h2}$  módulos de endurecimiento plástico. Además, la regla de flujo plástico:

$$\dot{\bar{\kappa}}^p = \dot{\bar{\gamma}} \operatorname{sgn}(M), \quad \dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{\gamma}}. \quad (23)$$

El factor multiplicador  $\dot{\bar{\gamma}}$  es no negativo por definición, por lo tanto  $\dot{\bar{\xi}}$  y  $\dot{\bar{q}}$  son funciones crecientes, mientras que  $\dot{\bar{\kappa}}^p$  puede aumentar o disminuir dependiendo del signo de  $M$ . Se cumplen las condiciones de carga y descarga de Kuhn-Tucker, y la condición de persistencia:

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0, \quad \dot{\bar{\phi}} \leq 0, \quad \dot{\bar{\gamma}}\dot{\bar{\phi}} = 0, \quad \dot{\bar{\gamma}}\dot{\bar{\kappa}}^p = 0. \quad (24)$$

## 2.5. Rótulas plásticas de ablandamiento en la flexión

Si en alguno de los puntos de integración se supera el  $M_u$ , se activa la rótula plástica, se detiene la plastificación ( $\bar{\kappa}^p$  constante) en el resto del elemento y comienza el proceso de ablandamiento. Se considera la función de falla:

$$\bar{\phi}(t, \bar{q}) = |t| - (M_u - \bar{q}). \quad (25)$$

La variable  $\bar{q}$  representa un momento de ablandamiento, y crece linealmente con una variable interna de ablandamiento  $\bar{\xi}$ ,

$$\bar{q} = \min\{-K_s \bar{\xi}, M_u\}, \quad K_s < 0 \quad \dot{\alpha} = \dot{\bar{\gamma}} \operatorname{sgn}(t), \quad \dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{\gamma}}. \quad (26)$$

Las condiciones de carga y descarga, y la condición de persistencia o consistencia, son:

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0, \quad \bar{\phi} \leq 0, \quad \dot{\bar{\gamma}} \bar{\phi} = 0, \quad \dot{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\phi}} = 0. \quad (27)$$

## 3. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

A diferencia de lo realizado en trabajos previos, en este trabajo se implementó y utilizó un código abierto para generar los resultados. La implementación fue realizada como una extensión del software abierto ONSAS (Pérez Zerpa et al., 2025). El software ONSAS aplica métodos de resolución como Newton-Raphson o Arc-Length (Bazzano y Pérez Zerpa, 2017), para resolver las ecuaciones del PTV en intervalos de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . En el Algoritmo 1 se presenta un pseudo-código con el esquema de resolución de las variables de desplazamiento  $\mathbf{d}$  y las nuevas variables internas  $\psi$  de los procesos de plastificación.

---

### Algoritmo 1 Pseudo-código de software ONSAS.

---

```

 $\mathbf{d}_n = \{\mathbf{u}^\top, \mathbf{v}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top\}^\top, \boldsymbol{\psi}_n = \{\bar{\kappa}_n^p, \bar{\xi}_n, \bar{\bar{\xi}}_n, \alpha_n, x_d\}, \mathbf{f}_{n+1}^{ext, e}$ 
 $\mathbf{d}_0^e, \boldsymbol{\psi}_0, n_f, \Delta t, (t_0, n = 0)$ 
 $\mathbf{d}_n^e \leftarrow \mathbf{d}_0^e, \boldsymbol{\psi}_n \leftarrow \boldsymbol{\psi}_0, (t_n)$ 
while  $n < n_f$  do
     $\mathbf{d}_{n+1}, \boldsymbol{\psi}_{n+1} \leftarrow \text{time\_iteration}(\mathbf{d}_n, \boldsymbol{\psi}_n, \mathbf{f}_{n+1}^{ext})$ 
     $\mathbf{d}_n^e \leftarrow \mathbf{d}_{n+1}^e, \boldsymbol{\psi}_n \leftarrow \boldsymbol{\psi}_{n+1}, (t_{n+1}), n \leftarrow n + 1$ 
end while

```

---

La rutina **time\_iteration** obtiene la solución del PTV para el tiempo  $t_{n+1}$ , a partir de la solución en el tiempo  $t_n$ , a través de la aplicación de un método iterativo.

En el Algoritmo 2 se presenta un pseudo-código de la rutina **time\_iteration**. Para el cálculo de las fuerzas internas u otras magnitudes a nivel del elemento, se utilizan 3 puntos de integración de Gauss-Lobatto. En particular, la variable  $x_d$  que en cada elemento indica donde se forma la rótula, debe tomar como valor la coordenada  $x$  de uno de los puntos de integración (aquel en el que se supere el momento último).

Dado un desplazamiento generalizado  $\mathbf{d}_n$ , las variables elastoplásticas internas del elemento  $\boldsymbol{\psi}_n = \{\bar{\kappa}_n^p, \bar{\xi}_n, \bar{\bar{\xi}}_n, \alpha_n\}$ , y en caso de activación de la rótula, la coordenada  $x_d$ , se verifica que no se supere el valor  $M_u$  en cada punto de integración del elemento. Se aplica un método de tipo Newton-Raphson con control indirecto de desplazamientos (Jirásek y Bažant, 2002) para resolver el sistema global y determinar  $\mathbf{d}_{n+1}$ , iterando hasta obtener convergencia ( $k \leftarrow k + 1$ ). Lograda la convergencia, se determina  $n \leftarrow n + 1$ , se actualizan las variables elastoplásticas internas  $\boldsymbol{\psi}_n$  que corresponden al nuevo desplazamiento  $\mathbf{d}_n$ , y en caso de activación de la rótula, la coordenada  $x_d$ .

**Algoritmo 2** ONSAS time\_iteration

---

```

 $\mathbf{d}_n, \psi_n, \mathbf{f}_{n+1}^{ext}, tolerance$ 
 $k \leftarrow 0, \mathbf{d}_{n+1}^k \leftarrow \mathbf{d}_n, \psi_{n+1}^k \leftarrow \psi_n, \mathbf{f}_{n+1}^{int,k} \leftarrow \mathbf{f}_n^{int}$ 
while  $\left\| \mathbf{A}_{e=1}^{N_{elem}} (\mathbf{f}_{n+1}^{ext,e} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,e,k}) \right\| < tolerance$  do
    for  $e$  in  $1, \dots, n_e$  do
         $\mathbf{f}_{n+1}^{int,e,k}, \mathbf{K}_{n+1}^{e,k}, \psi_{n+1}^{k+1} \leftarrow \text{frame2D\_plastic\_internal\_force}(\mathbf{d}_{n+1}^{e,k}, \psi_n^e)$ 
    end for
     $\Delta\mathbf{d}_{n+1}^k \leftarrow \text{solve}(\mathbf{K}_{n+1}^k, \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,k})$ 
     $\mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{d}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{d}_{n+1}^k$ 
     $\mathbf{d}_{n+1}^k \leftarrow \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}, \psi_{n+1}^k \leftarrow \psi_{n+1}^{k+1}$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
end while
 $\mathbf{d}_{n+1} \leftarrow \mathbf{d}_{n+1}^k, \psi_{n+1} \leftarrow \psi_{n+1}^k$ 

```

---

**4. RESULTADOS NUMÉRICOS**

Se presentan ejemplos de estructuras con falla resistente del material, se obtiene la secuencia de activación de las rótulas plásticas de ablandamiento y la carga de colapso.

**4.1. Ejemplo 1, Pórtico de dos pisos**

El pórtico de la Figura 4 se modela con 32 elementos del tipo Euler-Bernoulli con discontinuidad de rotación. La altura de cada piso es 2 m, y la longitud de las vigas es 3,5 m. Se consideran los siguientes parámetros: módulo de elasticidad  $E = 28,6 \cdot 10^6$  kN/m<sup>2</sup>, inercia  $I = 0,0016$  m<sup>4</sup>. Para el comportamiento no lineal material dado por la Figura 3, en el caso de las vigas:  $M_c = 30$  kNm,  $M_y = 150$  kNm,  $M_u = 170$  kNm,  $K_{h1} = 11,190$  kNm<sup>2</sup>,  $K_{h2} = 137$  kNm<sup>2</sup>,  $K_s = -1310$  kNm, y para los pilares:  $M_c = 100$  kNm,  $M_y = 245$  kNm,  $M_u = 265$  kNm,  $K_{h1} = 12,450$  kNm<sup>2</sup>,  $K_{h2} = 195$  kNm<sup>2</sup>,  $K_s = -2410$  kNm.

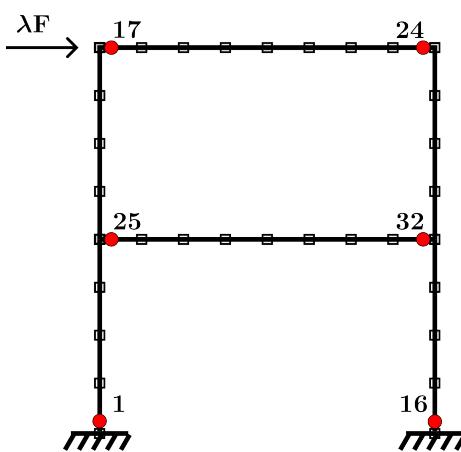


Figura 4: Pórtico / Plasticidad / Rótulas de Ablandamiento.

La carga aplicada en este ejemplo es con un tramo decreciente de  $\lambda$ , y luego creciente, hasta reproducir completamente el comportamiento post-colapso. Se carga el nodo 9 con una carga horizontal, y se aplica el método de control indirecto de desplazamientos.

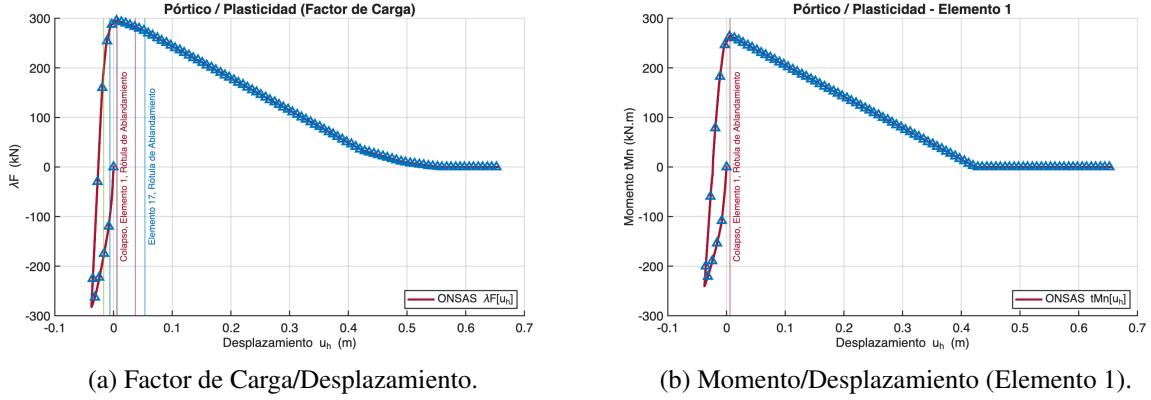


Figura 5: Análisis del colapso

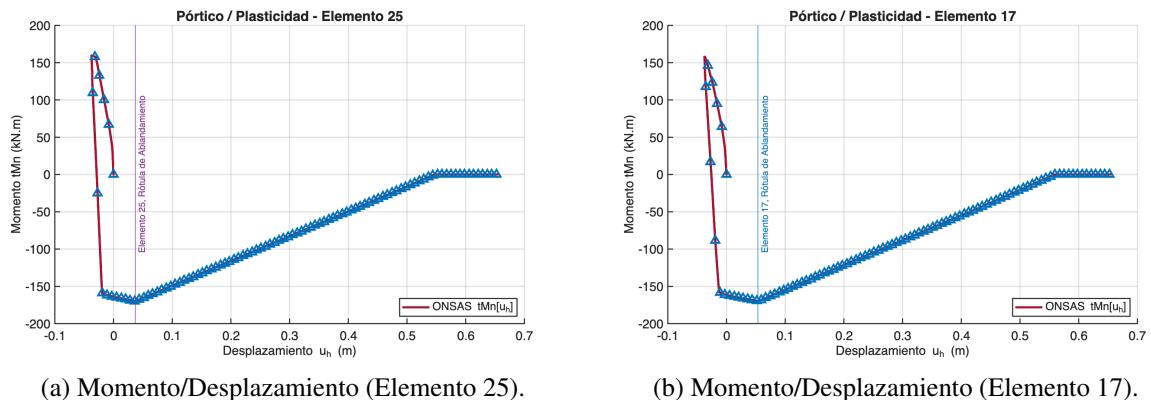


Figura 6: Análisis post-colapso

En la Figura 5a, se muestra la activación de las rótulas y el colapso de la estructura. En la Figura 5b, 6a, 6b, se grafica el momento en el primer punto de integración, donde se activa cada una de las rótulas, en los elementos 1, 25 y 17, respectivamente. Se muestra la activación de 6 rótulas de ablandamiento, en los elementos 32, 24, 16, 1, 25 y 17 —producida en ese orden—. El colapso de la estructura ocurre luego de la activación de la cuarta rótula, en el elemento 1 —en el primer punto de integración—, ver Tabla 1.

Rótula	Elemento	Punto de Integración	Desplazamiento $u_h$ (m)	Fuerza $\lambda F$ (kN)
1	32	3	-0,01682	195,45
2	24	3	-0,00618	278,99
3	16	3	0,00580	295,64
4	1	1	0,00593	295,72
5	25	1	0,03708	282,67
6	17	1	0,05352	273,85

Tabla 1: Pórtico de 2 Pisos / Rótulas de Ablandamiento / Carga de Colapso.

#### 4.2. Ejemplo 2, Pórtico Darvall-Mendis

En este ejemplo, se resuelve el pórtico que fue estudiado por primera vez por ([Darvall y Mendis, 1985](#)) y luego por ([Armero y Ehrlich, 2006; Jukić et al., 2013](#)), ver Figura 7. No se considera plasticidad con endurecimiento del material, sí se considera el ablandamiento plástico de las rótulas. Los parámetros para los pilares son:  $M_u = 158,18 \text{ kN.m}$ , y para las vigas:  $M_u = 169,48 \text{ kN.m}$ , el módulo de ablandamiento de las rótulas es igual a:  $K_s = a 10 EI / (0,55 L)$ , siendo  $E = 20,68 \times 10^6 \text{ kN.m}^2$ ,  $I = 0,001 \text{ m}^4$  y  $L = 3,048 \text{ m}$ . El modelo consta de 8 elementos de Euler-Bernoulli con discontinuidad de rotación. En el caso de plasticidad perfecta de las rótulas, cuando no tienen ablandamiento ( $a = 0$ ), la primera rótula se activa en el punto de aplicación de la carga, en los elementos 4 y 5 (nodo 5). La segunda rótula se produce en el elemento 7 (nodo 7), y la tercera en el elemento 2 (nodo 3), esta última termina generando un mecanismo local, y por lo tanto produciendo el colapso de la estructura.

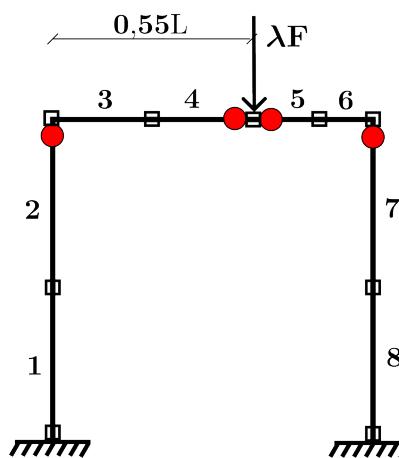


Figura 7: Pórtico Darvall-Mendis / Rótulas de ablandamiento.

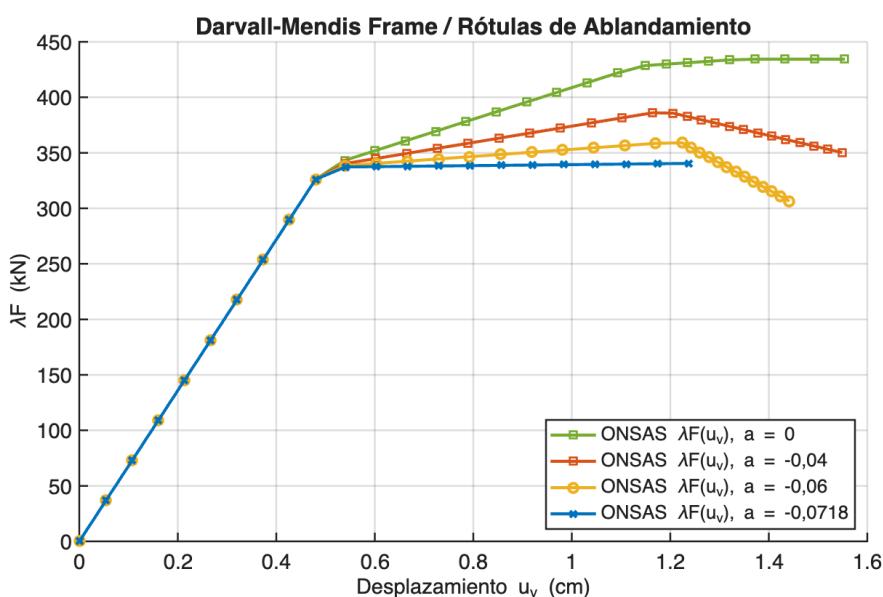


Figura 8: Pórtico Darvall-Mendis / Rótulas de ablandamiento.

a	Rótula	Darvall y Mendis $u_v(\text{cm})   \lambda F(\text{kN})$	Armero y Ehrlich $u_v(\text{cm})   \lambda F(\text{kN})$	Brank et al. $u_v(\text{cm})   \lambda F(\text{kN})$	ONSAS   Softening Hinges $u_v(\text{cm})   \lambda F(\text{kN})$
0	1	0,50 336	0,50 337	0,50 336	0,49 336
	2	1,14 427	1,14 428	1,13 427	1,14 428
	3	1,34 433	1,34 434	1,34 434	1,34 434
-0,04	1	0,50 336	0,50 337	0,50 336	0,49 336
	2	1,14 387	1,18 388	1,19 383	1,19 388
-0,06	1	0,50 336	0,50 337	0,50 336	0,49 336
	2	1,19 357	1,22 358	1,23 350	1,22 360
-0,0718	1	0,50 336	0,50 337	0,50 336	0,49 336

Tabla 2: Pórtico de Darvall-Mendis / Rótulas de ablandamiento / Carga de Colapso.

Se puede observar en la Figura 8 y en la Tabla 2, que al disminuir el parámetro  $a$  del módulo de ablandamiento de las rótulas, la carga última de colapso se reduce en forma significativa.

## 5. CONCLUSIONES

Se presentan los resultados numéricos obtenidos al aplicar la implementación de código abierto desarrollada sobre ONSAS para el modelado con rótulas de ablandamiento. En el ejemplo 1, se obtiene la secuencia de activación de las rótulas de ablandamiento, los desplazamientos, las fuerzas correspondientes a la activación de cada rótula, y la carga última de colapso. En el ejemplo 2, se muestra que la carga última de colapso de la estructura depende del módulo plástico de ablandamiento de las rótulas. Se muestra que la carga de colapso se reduce en 22,58 % al variar el parámetro del módulo de ablandamiento. Se comparan los resultados con la literatura de referencia, lo cual permite validar la implementación desarrollada para este trabajo.

## REFERENCIAS

- Armero F. y Ehrlich D. Numerical modeling of softening hinges in thin euler-bernoulli beams. *Computers and Structures*, 84, 2006. ISSN 00457949. <http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.11.010>.
- Bazzano J.B. y Pérez Zerpa J. *Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras*. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, 2017. ISBN 978-9974-0-1525-8.
- Darvall P.L. y Mendis P.A. Elastic-plastic-softening analysis of plane frames. *Journal of Structural Engineering*, 111, 1985. ISSN 0733-9445. [http://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1985\)111:4\(871\)](http://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1985)111:4(871)).
- Ibrahimbegovic A. Nonlinear solid mechanics. *Solid Mechanics and its Applications*, 160, 2009. ISSN 09250042. <http://doi.org/10.1007/978-90-481-2331-5>.
- Jirásek M. y Bažant Z.P. *Inelastic analysis of structures*. John Wiley & Sons, 2002. ISBN 978-0-471-98716-1.
- Jukić M., Brank B., y Ibrahimbegović A. Embedded discontinuity finite element formulation for failure analysis of planar reinforced concrete beams and frames. *Engineering Structures*, 50, 2013. ISSN 01410296. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.07.028>.
- Lasry D. y Belytschko T. Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24, 1988. ISSN 00207683. [http://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90059-5](http://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90059-5).
- Pérez Zerpa J.M., Pena M.C.V., Sosa J.V., Villié A., Forets M., Battini J.M., y García J.B.B. Onsas: an open nonlinear structural analysis solver for gnu-octave/matlab. 2025.