

PROBABILIDAD DE ESTADOS DE DAÑO EN ESTRUCTURAS UTILIZANDO PARÁMETROS DINÁMICOS E INFERENCIA BAYESIANA

PROBABILITY OF DAMAGE STATES IN STRUCTURES USING DYNAMIC PARAMETERS AND BAYESIAN INFERENCE

Oscar Möller¹, Germán Lucero¹, Juan P. Ascheri¹

¹ Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Facultad Cs.Ex., Ingeniería y Agrimensura,
Universidad Nacional de Rosario, Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina.
e-mail: moller@fceia.unr.edu.ar

Palabras clave: Dinámica estructural, Escenarios de daños, Incertidumbres, Inferencia bayesiana, Vibraciones ambientales.

Resumen. El monitoreo de la salud estructural es un tema de interés por el impacto sobre los programas de mantenimiento de infraestructura. Hay que considerar si hay o no daño, donde se localiza, su magnitud y la estimación de vida útil residual. La metodología implementada es proponer “escenarios de daños” en un modelo numérico del sistema, incluyendo incertidumbres en las características físicas mediante campos aleatorios. Para cada escenario de daños se realiza la estadística de las propiedades dinámicas, modos y frecuencias, sobre las variables aleatorias aplicando Monte Carlo. Registrada una medición aceleración-tiempo e identificados los parámetros dinámicos, con la estadística se calcula la probabilidad “a priori” de obtener esos parámetros dinámicos para cada escenario de daños. Aplicando inferencia bayesiana, se calcula la probabilidad “a posteriori” dada la medición registrada. El proceso se repite hasta convergencia. El resultado final indica qué probabilidad de ocurrencia tiene cada escenario de daños. Se aplica a un modelo de puente losa y se concluye que la mejor opción es utilizar el vector de frecuencias como parámetros dinámicos.

Keywords: Structural dynamics, Damage scenarios, Uncertainties, Bayesian inference, Environmental vibrations.

Abstract. Structural health monitoring is a topic of interest due to its impact on infrastructure maintenance programs. It is necessary to consider whether or not there is damage, where it is located, its magnitude and the estimated residual useful life. The methodology implemented is to propose “damage scenarios” in a numerical model of the system, including uncertainties in the physical characteristics through random fields. For each damage scenario, the statistics of the dynamic properties, modes and frequencies are performed on the random variables by applying Monte Carlo. Once an acceleration-time measurement is recorded and the dynamic parameters are identified, the “a priori” probability of obtaining these dynamic parameters for each damage scenario is calculated with the statistics. Applying Bayesian inference, the “a posteriori” probability is calculated given the recorded measurement. The process is repeated until convergence. The final result indicates the probability of occurrence of each damage scenario. It is applied to a slab bridge model and it is concluded that the best option is to use the frequency vector as dynamic parameters.

1 INTRODUCCIÓN

El monitoreo de la salud estructural (SHM) es un tema de interés por el impacto sobre los programas de mantenimiento de infraestructura como por ejemplo puentes. Hay 4 aspectos a considerar: (a) Si hay o no daño; (b) Localización del daño; (c) Cuantificación del daño; (d) Estimación de vida útil residual. Numerosas metodologías se han desarrollado en las últimas 3 décadas, donde la mayoría se basan en el registro de vibraciones ambientales debido al tránsito, viento, etc., y otras con acciones forzadas mediante actuadores. [Peeters et al., 1999, 2000](#); [Brincker et al., 2000](#); [Hizal, 2021](#).

De los registros aceleración-tiempo se identifican las propiedades dinámicas de la estructura. Se construye un modelo numérico paramétrico de la estructura, y los parámetros se optimizan para que la predicción del modelo se aproxime a los datos registrados. Se presentan varios inconvenientes: (a) El número de sensores instalados es limitado, entonces no es posible obtener una resolución espacial detallada; (b) Están presentes incertidumbres en las mediciones, simplificaciones y aproximaciones del modelo propuesto, variaciones en las dimensiones geométricas, propiedades de los materiales, condiciones de borde, y también aproximaciones en los métodos numéricos de identificación.

En resumen, no es posible desarrollar un modelo que represente exactamente el comportamiento del sistema. Se debería intentar describir la familia de posibles valores de los parámetros del modelo basados en los datos disponibles. La inferencia bayesiana es una herramienta racional y robusta para tratar la dificultad de solución no única, ver trabajos de [Jiang et al., 2008, 2013](#); [Quiroz, 2011](#); [Huang et al., 2019](#); [Uzun et al., 2019](#); [Feng et al., 2020](#); [Hurtado et al., 2023](#). Trata la estimación de parámetros utilizando el teorema de Bayes, comenzando por una distribución de probabilidades inicial estimada “a priori” para encontrar la distribución “a posteriori” basado en los datos incompletos registrados.

En este trabajo se implementa una metodología que consiste en proponer “escenarios de daños” en un modelo numérico del sistema, incluyendo variables aleatorias en las características físicas y/o geométricas. Se aplica a un modelo de elementos finitos de un puente losa, suponiendo 10 escenarios de daños. Simulaciones numéricas aleatorias reemplazan a las mediciones, pero permiten verificar la convergencia de la metodología hacia la solución correcta. Aplicación con mediciones experimentales sobre un modelo físico del puente losa se presentan en [Lucero et al., 2024](#).

2 METODOLOGÍA

La metodología que se implementa en este trabajo es proponer “escenarios de daños” o clases de modelos del sistema estocástico $M = \{M_m: m = 1, 2, \dots, M\}$. Una clase de modelo en este contexto es un modelo numérico del sistema incluyendo variables aleatorias en las características físicas y/o geométricas. Significa definir localizaciones y magnitud de daños, usualmente representado por una disminución de la rigidez. Si bien en principio la cantidad de escenarios de daños es infinita $M \rightarrow \infty$, el “juicio ingenieril” y la experiencia limitarán la cantidad y tipos de escenarios de daño a considerar.

Para cada escenario de daños, y con el modelo numérico propuesto del sistema, se obtiene la estadística de las propiedades dinámicas, modos y frecuencias, a partir de un muestreo aplicando Monte Carlo sobre las variables aleatorias del modelo numérico. Con esa estadística se obtienen las funciones de densidad de probabilidades conjunta de los parámetros dinámicos. Se estima la probabilidad “a priori” para cada escenario de daños, en general uniforme entre todos los escenarios de daños considerados. Luego, aplicando inferencia

bayesiana, se calcula la probabilidad “a posteriori” de cada escenario de daños dada una medición registrada e identificados los parámetros dinámicos. El proceso se repite con cada nueva medición hasta convergencia. El resultado final indica qué probabilidad de ocurrencia tiene cada escenario de daños propuesto.

Se considera que cada estado de daño $D_i, i = 1, \dots, N_D$ incluye una combinación discreta de magnitudes de daño, que ocurren en diferentes ubicaciones de la estructura. Luego, para una medición r la regla de Bayes resulta

$$P(D_i | r) = \frac{P(r | D_i) P(D_i)}{\sum_{j=1}^{N_D} P(r | D_j) P(D_j)} = \frac{f(r | D_i)}{\sum_{j=1}^{N_D} f(r | D_j) P(D_j)} P(D_i) \quad (1)$$

La aplicación de la ec.(1) se representa en la Figura 1, donde r^* indica una medida particular de la respuesta r . El diagrama muestra cómo las probabilidades previas $P(D_i)$, representadas en la figura superior izquierda, se actualizan mediante las probabilidades $f(r|D_i)$ para el valor r^* específico de la respuesta medida. Las probabilidades posteriores se muestran en la figura inferior y el estado de daño más probable, en la evaluación actual, es el estado de daño con mayor probabilidad $P(D_i|r^*)$. Luego, estas probabilidades se convierten en los antecedentes para la próxima evaluación.

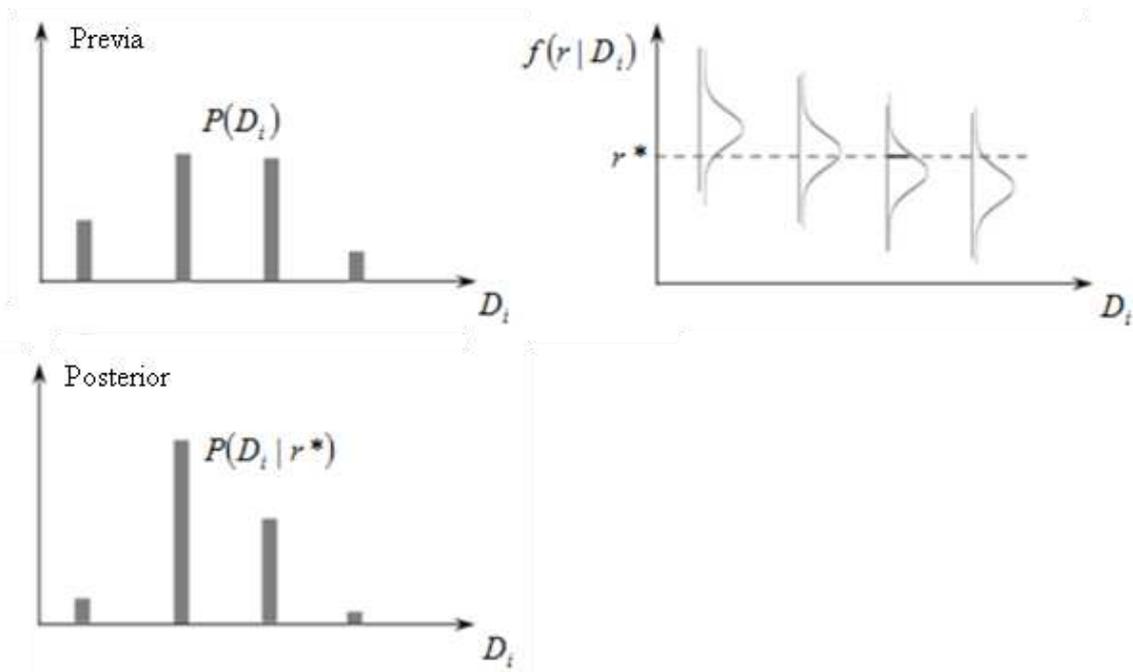


Figura 1: Esquema de la actualización de probabilidades de estados de daño

Una definición de los parámetros identificados de la respuesta medida puede ser un vector de respuestas dinámicas. Así, en ec.(1) $\mathbf{r} = \{ r_1, r_2, \dots, r_n \}$, puede ser un vector de frecuencias naturales $\boldsymbol{\omega} = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$ o de las formas modales $\boldsymbol{\Phi} = \{ \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n \}$, cada uno con n componentes. En el uso de parámetros de respuesta múltiple, las probabilidades corresponden a una función de densidad de probabilidades conjunta condicional. Así, en el caso de frecuencias medidas

$$P(\boldsymbol{\omega} | D_i) = f(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n | D_i) d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n \quad (2)$$

Las funciones de densidad de probabilidades $f(r|D_i)$ se obtienen mediante el modelo de la estructura, bajo el supuesto de que ésta ha sufrido un estado de daño definido por D_i . La variabilidad en los parámetros dinámicos, dado un escenario de daños, se debe a las variables aleatorias básicas del problema y a errores de medición. Se realiza un muestreo sobre las variables aleatorias del problema, y para cada realización k se calculan los parámetros dinámicos r_k , modos y frecuencias. Luego se calcula el valor medio y la variancia de la muestra. Al conjunto de valores r_k se le aplican las herramientas estadísticas para estimar la función de densidad de probabilidades que mejor aproxima a los resultados, utilizando las pruebas de bondad de ajuste y calculando los intervalos de confianza de los parámetros.

Comúnmente se utiliza la distribución Normal de n variables, que se justifica a medida que aumenta el número de parámetros, como consecuencia del teorema del límite central

$$f_{\mathbf{r}}(r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{C}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}})\right]$$

$$\text{con } \bar{r}_i = \frac{\sum_{k=1}^N r_{ik}}{N} \quad C_{rij} = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{k=1}^N r_{ik} r_{jk} - N \bar{r}_i \bar{r}_j \right]$$
(4)

Donde \mathbf{r} es el vector de parámetros y \mathbf{C} su matriz de covariancias.

3 ESTRUCTURA DE PUENTE LOSA

3.1 Geometría y discretización del modelo

Se aplica la metodología a un modelo a escala de un puente losa simplemente apoyada. Consiste en una chapa metálica de 5mm de espesor nominal y dimensiones en planta de 1.70m entre apoyos y 1.30m de ancho. Para definir los estados de daños se divide la losa en subdominios como se muestra en la Figura 2, junto con los puntos de medición.

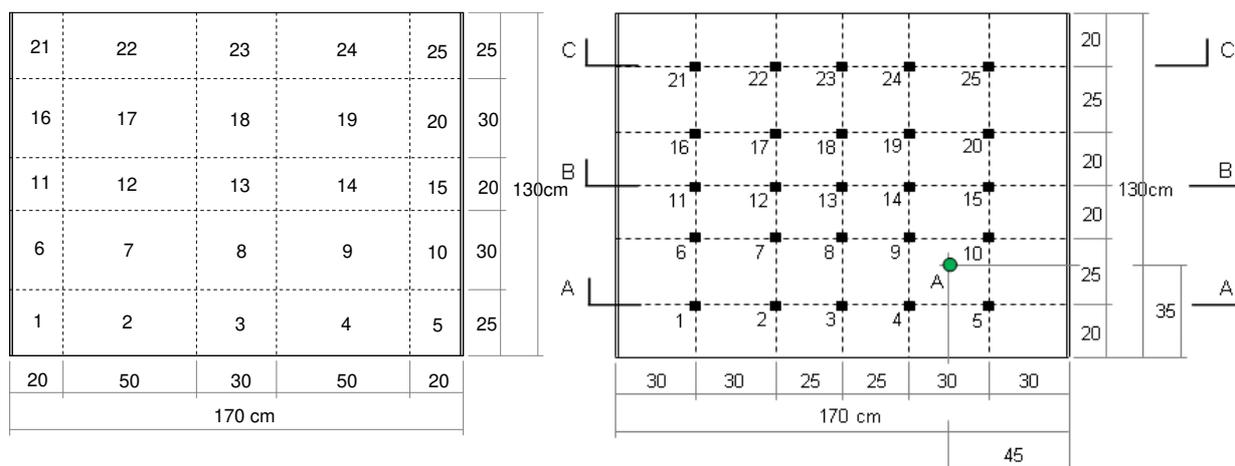


Figura 2: Modelo de puente losa, división en subdominios y puntos de medición

Las características de rigidez serán variables aleatorias en cada subdominio generando “campos aleatorios” correlacionados espacialmente, además de las variaciones por daños en cada estado de daño propuesto.

Se genera un modelo numérico para aplicar el método de elementos finitos, con discretización independiente de los subdominios, utilizando elementos cuadrados de cáscara plana con comportamiento lineal y 5cm de lado, totalizando 884 elementos y 945 nodos. Con este modelo y variando aleatoriamente la rigidez de cada subdominio, se calculan los parámetros dinámicos, frecuencias y componentes modales, que permiten generar las funciones de densidad de probabilidades de ec.(4).

Las “mediciones” sobre el modelo físico se realizarán en los 25 puntos discretos de la Figura 2. El punto A es el punto de referencia, donde habrá un acelerómetro fijo, y servirá para vincular las mediciones realizadas entre los 25 puntos.

3.2 Estados de daño propuestos

Para modelar el daño, en este trabajo se introduce una disminución del espesor en diferentes subdominios, para reducir la rigidez y así simular daños por fisuración en un puente de hormigón, tanto a flexión en la zona central como por corte y anclajes en las proximidades de los apoyos. Se proponen 10 estados de daño, incluyendo el primer caso que representa la situación sin daño. En la Tabla 1 se presentan los valores numéricos.

Escenario de daño N°	Subdominios	Factor de reducción del espesor nominal	Descripción
1	Todos	0.00	Sin daño
2	13	0.30	Daño en el centro de la losa
3	3, 8, 13, 18, 23	0.30	Daño en la franja central
4	3, 8, 13	0.30	Daño en media franja central
5	11, 15	0.30	Daño en el centro sobre ambos apoyos
6	6, 11, 16	0.30	Daño en sector central sobre apoyo izquierdo
7	6, 11, 16, 10, 15, 20	0.30	Daño en sector central sobre ambos apoyos
8	11, 15 13	0.10 0.40	Daño combinado en apoyo y centro de la losa
9	6, 11, 16, 10, 15, 20 8, 13, 18	0.20 0.30	Daño en sector central sobre ambos apoyos y centro de losa
10	1, 6, 11 3, 8, 13	0.20 0.40	Daño en sector lateral sobre apoyo izquierdo y centro de losa

Tabla 1: Definición de los escenarios de daño propuestos

3.3 Generación de campos aleatorios

Las propiedades espacialmente variables se pueden modelar mediante campos aleatorios. Por definición, un campo aleatorio consta de un número infinito de variables aleatorias. El tratamiento numérico requiere su aproximación en términos de un número finito de variables aleatorias, es decir se debe discretizar el campo, y que cada variable aleatoria represente el comportamiento promedio del campo aleatorio en un subdominio espacial, ver Figura 2.

La Figura 3 muestra una realización $x(z)$ de un campo aleatorio unidimensional, mostrado en línea azul, y su aproximación con promedio espacial de 4 elementos de igual longitud, mostrados en línea roja, $(\hat{x}_i, i=1, \dots, 4)$ donde cada uno representa el promedio de la realización sobre el intervalo Z_i .

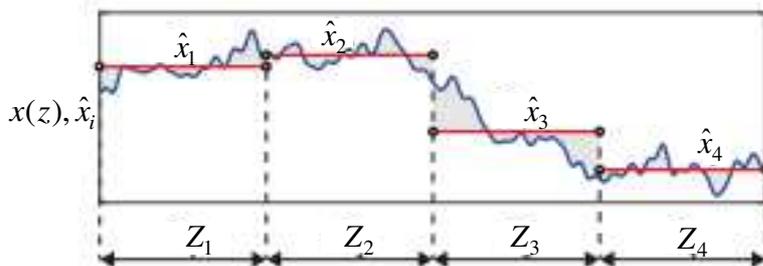


Figura 3: Realización de un campo aleatorio unidimensional y su aproximación con 4 elementos promedio

El valor medio de la variable aleatoria \hat{X}_i se puede obtener mediante la integración de la función espacial para la media $\mu_X(\mathbf{z})$ sobre el dominio Z_i . La variancia se calcula mediante integración sobre la función de autocovariancia espacial $C_X(z_1, z_2)$.

$$\mu_{\hat{X}_i} = \frac{1}{\Omega_i} \int_{Z_i} \mu_X(\zeta) d\zeta \quad \text{Var}(\hat{X}_i) = \frac{1}{\Omega_i^2} \int_{Z_i} \int_{Z_i} C_X(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (5)$$

El cálculo de las covariancias entre las variables promedio es más complejo, ver Geyer et al. (2022), obteniéndose para el caso bidimensional

$$C(\hat{X}_i, \hat{X}_j) = \frac{1}{4 A_i A_j} \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 (-1)^k (-1)^l A_{kl}^2 \text{Var}(\hat{X}_{kl}) \quad (6)$$

Donde $A_{kl} = L_{1,k} L_{2,j}$ son dominios rectangulares auxiliares Z_{kl} , $k = 0, \dots, 3$; $l = 0, \dots, 3$. Además, la covariancia en la ec.(5) se define en función de la variancia del campo y de una función de correlación que depende de la distancia \mathbf{z} entre 2 puntos $C_X(\mathbf{z}) = \sigma_X^2 \rho_X(\mathbf{z})$. Se han propuesto diferentes funciones de correlación, ver Abrahamsen (1997), Liu et al. (2019).

Para la estructura analizada, la variable aleatoria del campo es el espesor, que interviene directamente en la rigidez a flexión de la losa, con valor medio $\mu_X = 0.5 \text{ cm}$ y desvío estándar $\sigma_X = 0.03 \text{ cm}$ que significa un coeficiente de variación $\delta = 0.06$. Se utiliza la función de correlación exponencial con longitud de correlación $R = 50 \text{ cm}$ y parámetro $\nu = 1.5$.

Para cada uno de los escenarios de daños propuestos, ver Tabla 1, se realizaron 50 simulaciones del campo aleatorio para construir la estadística de los parámetros dinámicos de ec.(4), mostrándose en la Figura 4 algunos de los resultados obtenidos de campos aleatorios.

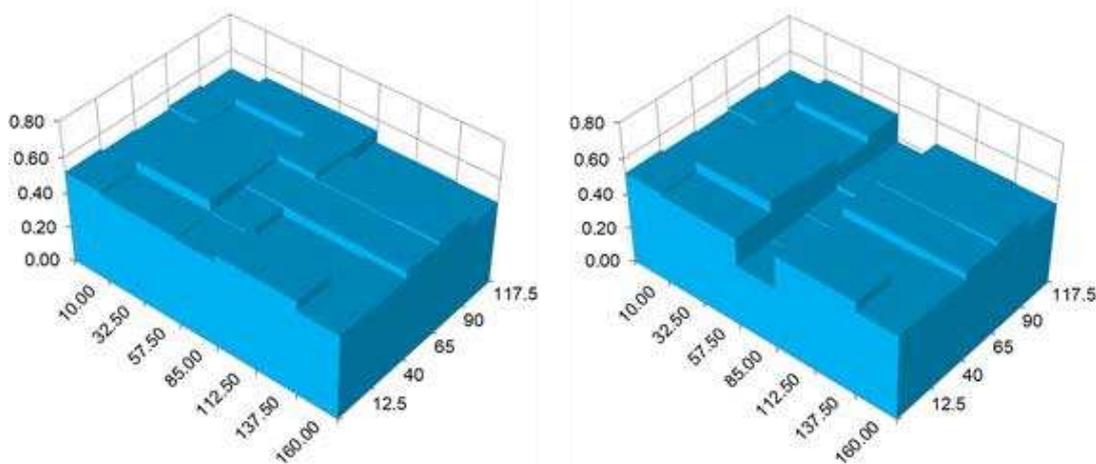


Figura 4: Simulación de campos aleatorios para escenario de daño 1, izquierda y daño 3, derecha

3.4 Estadística de parámetros dinámicos

En la Figura 5 se presenta, como ejemplo, el análisis estadístico de la frecuencia 1 para el escenario de daño 1, sin daño, a partir de las 50 simulaciones del campo aleatorio. Se observa la buena aproximación de la función de probabilidades Normal.

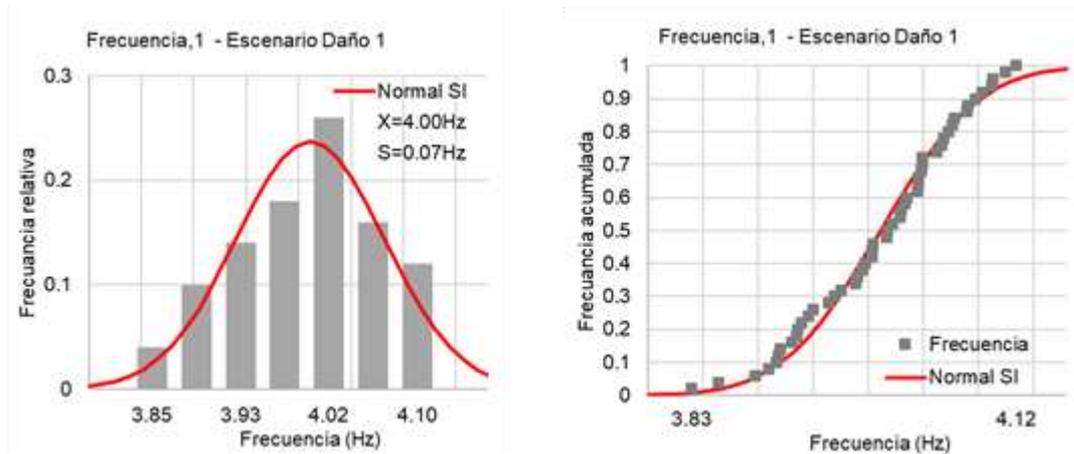


Figura 5: Ajuste de la función Normal a las 50 simulaciones del campo aleatorio del escenario de daño 1

En la Tabla 2 se muestran los valores medios y desvíos estándar de las frecuencias de los primeros 6 modos de vibración, para cada uno de los escenarios de daño propuestos. Se observa la poca variación entre los valores medios a través de los escenarios de daño, lo que dificulta la identificación del daño, y pone en evidencia la necesidad de incluir varios parámetros dinámicos y su correlación para lograr convergencia en la probabilidad de cada estado de daño.

Estado de daño	Frecuencia 1		Frecuencia 2		Frecuencia 3		Frecuencia 4		Frecuencia 5		Frecuencia 6	
	Medio	Desvío										
1	4.001	0.071	8.063	0.136	16.204	0.296	21.388	0.312	22.098	0.427	36.550	0.562
2	3.945	0.071	8.059	0.136	16.168	0.293	21.123	0.323	21.491	0.390	36.182	0.565
3	3.323	0.070	8.072	0.140	15.749	0.275	19.888	0.298	21.346	0.410	33.442	0.521
4	3.659	0.070	8.062	0.140	15.951	0.281	20.505	0.300	21.381	0.419	34.622	0.545
5	3.996	0.070	7.901	0.136	16.134	0.291	21.164	0.322	22.033	0.428	36.267	0.548
6	3.986	0.070	7.739	0.130	15.995	0.285	20.912	0.316	21.705	0.422	35.523	0.524
7	3.970	0.069	7.422	0.124	15.789	0.271	20.437	0.323	21.330	0.416	34.863	0.491
8	3.927	0.072	7.995	0.135	16.131	0.291	20.939	0.336	21.276	0.377	36.014	0.562
9	3.668	0.069	7.594	0.125	15.790	0.273	19.955	0.314	20.388	0.379	33.936	0.495
10	3.487	0.071	7.830	0.139	15.593	0.263	19.667	0.297	20.912	0.412	33.410	0.530

Tabla 2: Valores medios y desvíos estándar de las frecuencias [Hz]

4 PROBABILIDAD DE ESTADOS DE DAÑO – DATOS NUMÉRICOS

Para probar la implementación de esta metodología sobre el modelo de puente losa, se eligen aleatoriamente 5 resultados del conjunto de 50 simulaciones realizadas para cada escenario de daños, que reemplazan a las mediciones experimentales, pero permiten verificar la convergencia de la metodología hacia la solución correcta.

Con los 5 datos numéricos e identificados los parámetros dinámicos, con la estadística se calcula la probabilidad “a priori” de obtener esos parámetros dinámicos para cada escenario de daños. Aplicando la inferencia bayesiana, ver ec.(1), se calcula la probabilidad “a posteriori”

de cada escenario de daños dada la medición simulada. Para la primera evaluación se asigna la misma probabilidad a cada escenario de daños $P(D_i) = 1 / N_D$. El proceso se repite con cada nueva medición hasta convergencia. El resultado final indica qué probabilidad de ocurrencia tiene cada escenario de daños propuesto.

Resultados en función de las frecuencias: $\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6 \}$ La Figura 6 presenta resultados cuando se eligen simulaciones que corresponden al escenario de daño 1. Se observa una convergencia muy rápida con una mínima participación del estado de daño 5 en la primera iteración que se debe a que el estado 5 tiene apenas un daño muy leve sobre los apoyos.

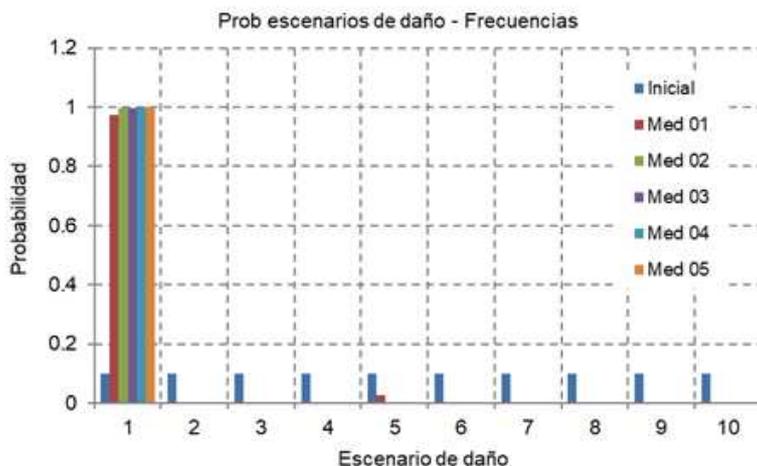


Figura 6: Resultados basado en frecuencias para Escenario de Daño 1: sin daño

La Figura 7 muestra resultados para el estado de daño 5, que propone una pequeña disminución del espesor en un subdominio cercano a cada apoyo. Entonces, hay una probabilidad de 0.11 para el estado 1 sin daño en la primera iteración. En la segunda iteración ya es imperceptible y luego converge a la solución correcta.

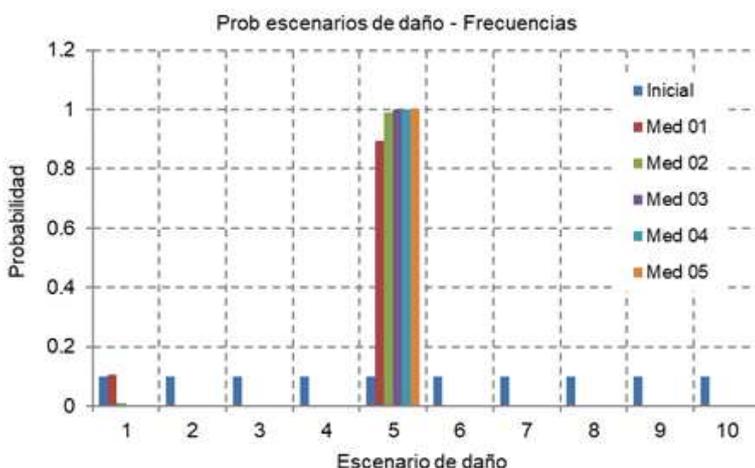


Figura 7: Resultados basado en frecuencias para Escenario de Daño 5

Resultados en función de las componentes modales: Presenta la dificultad de cómo se normalizan los modos. Además, el modelo tiene 945 nodos x 6 gr.lib por nodo = 5670 gr.lib., pero solo se registran 26 que corresponden a las componentes verticales de los 25 puntos más el de referencia A, Figura 2. Significa que las formas modales resultan poco aproximadas a las reales. Se normalizaron con la mayor componente de los 25 puntos de cada modo igual a 1.00,

tomados del modelo numérico sin daño. La correlación entre sus componentes se realizó de dos maneras: (i) correlación de cada componente a través de los modos; (ii) correlación entre las 25 componentes de cada modo. La Figura 8 muestra los resultados basados en componentes modales para Escenario de Daño 3 con correlación entre las 25 componentes del modo 1, obteniéndose buena convergencia. Similar resultado se obtuvo para el modo 5, pero no se logró convergencia para los otros modos de vibración.

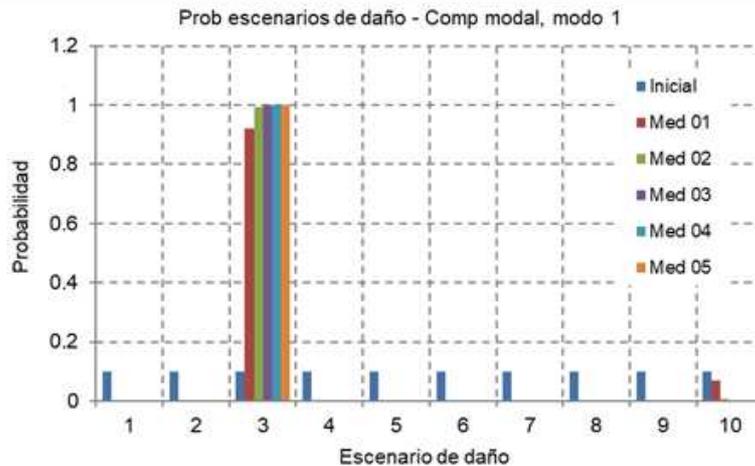


Figura 8: Resultados basados en componentes modales del modo 1 para Escenario de Daño 3

Resultados en función de las Normas de los vectores modales: se calculan las Normas 1 y 2 que se utilizan como “parámetros dinámicos” para actualizar las probabilidades de cada escenario. Entonces, será $\mathbf{r} = \mathbf{N1} = \{ N1_1, N1_2, \dots, N1_6 \}$ y también $\mathbf{r} = \mathbf{N2} = \{ N2_1, N2_2, \dots, N2_6 \}$, con sus respectivos vectores de valores medios y matriz de covariancias. La convergencia al escenario de daño correcto ocurre en algunos casos y otros no. Entonces se realizaron procesamientos eliminando algunos escenarios de daño similares, obteniéndose mejores resultados. La utilización de las Normas 1 y 2 como medida global aparece mejor en este ejemplo, que utilizar los vectores de componentes modales.

5 CONCLUSIONES

Se presentó una metodología basada en la inferencia bayesiana para evaluar la probabilidad de estados de daños, su cuantificación y localización. Se aplica a un modelo a escala de un puente losa, donde las características de rigidez son variables aleatorias en cada subdominio de la estructura generando campos aleatorios correlacionados espacialmente. Se propusieron 10 escenarios de daño caracterizados por diferentes disminuciones de espesor en distintas ubicaciones, incluyendo el caso que representa la situación sin daño. Con un modelo numérico de elementos finitos y con 50 simulaciones para cada estado de daños, variando aleatoriamente la rigidez de cada subdominio, se calcularon los parámetros dinámicos, frecuencias y componentes modales, que permitieron generar sus funciones de densidad de probabilidades conjunta. Se obtuvieron resultados utilizando simulaciones numéricas, donde se eligieron aleatoriamente 5 del conjunto de 50 simulaciones realizadas para cada escenario de daños, que permiten verificar la convergencia de la metodología hacia la solución correcta. Las principales conclusiones observadas se resumen a continuación:

- La mejor opción, para evaluar las probabilidades de estados de daño, es utilizar el vector de las frecuencias como parámetros dinámicos, porque converge rápidamente al escenario de daños correcto, probando que la metodología implementada funciona adecuadamente.

- Cuando se utilizan componentes modales como parámetros dinámicos, la convergencia sólo se logra en algunos casos y luego de eliminar algunos escenarios de daño propuestos. El problema a resolver, y mejorar en futuros trabajos, es la manera de normalizar las formas modales y también la aproximación de los modos con pocas componentes que no permiten definir con mejor precisión la forma modal y así poder diferenciar adecuadamente un escenario de daños de otro en la función de densidad de probabilidades conjunta.
- Utilizando las Normas 1 y 2 de los vectores modales como una medida global de los modos, los resultados son un poco mejores en este ejemplo, pero están afectados por los mismos inconvenientes que al utilizar el vector de componentes modales.

REFERENCIAS

- Abrahamsen, P. (1997) A review of Gaussian random fields and correlation functions – Second edition. *Norwegian Computing Center, Technical Report 917*, Oslo, Norway.
- Brincker, R., Zhang, L., & Andersen, P. (2000). Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition. *Smart Materials and Structures*. Vol. 10 (2001) 441–445.
- Feng, Z., Lin, Y., Wang, W., Hua, X., Chen, Z. (2020) Probabilistic updating of structural models for damage assessment using approximate bayesian computation. *Sensors* 2020, 20, 3197; doi:10.3390/s20113197.
- Geyer, S., Papaioannou, I., Graham-Brady, L., Straub, D. (2022) The spatial averaging method for non-homogeneous random fields with application to reliability analysis. *Engineering Structures*, Vol.253, 113751. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113761>.
- Hizal, C. (2021). Frequency domain data merging in operational modal analysis based on least squares approach. *Measurement*. Vol. 170, 108742. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.108742>.
- Huang, Y., Shao, C., Wu, B., Beck, J.L., Li, H. (2019) State-of-the-art review on Bayesian inference in structural system identification and damage assessment. *Advances in Structural Engineering*, Vol. 22(6) 1329–1351.
- Hurtado, O.D., Ortiz, A.R., Gomez, D., Astroza, R. (2023) Bayesian model-updating implementation in a five-story building. *Buildings* 2023, 13, 1568. <https://doi.org/10.3390/buildings13061568>.
- Jiang, X., Mahadevan, S. (2008) Bayesian Probabilistic Inference for Nonparametric Damage Detection of Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 134, No. 10. ©ASCE, ISSN 0733-9399/2008/10-820–831.
- Jiang, X., Yuan, Y., Liu, X. (2013) Bayesian inference method for stochastic damage accumulation modeling. *Reliability Engineering and System Safety* 111, 126–138.
- Liu, Y., Li, J., Sun, S., Yu, B. (2019) “Advances in Gaussian random field generation: A review”. *Computational Geosciences* 23, 1011-1047. <https://doi.org/10.1007/s10596-019-09867-y>
- Lucero, G., Möller, O., Ascheri, J.P. (2024) Identificación de propiedades dinámicas de un modelo físico reducido de un puente losa mediante registro de vibraciones. *Mecánica Computacional*, en prensa.
- Peeters, B. (2000). System Identification and Damage Detection in Civil Engineering. *Katholieke Universiteit Leuven – Faculteit Toegepaste Wetenschappen*.
- Peeters, B., De Roeck, G. (1999), Reference-Based Stochastic Subspace Identification For Output-Only Modal Analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 13(6), 855-878.
- Quiroz, L.M. (2011) Probabilistic assessment of damage states using dynamic response parameters. *Thesis of Master of Applied Science, University of British Columbia, Canada*.
- Uzun, M., Sun, H., Smit, D., Büyüköztürk, O. (2019) Structural damage detection using Bayesian inference and seismic interferometry. *Struct Control Health Monit.* 2019; 26:e2445 <https://doi.org/10.1002/stc.2445>.