

UNA ESTRATEGIA PARA LA OBTENCIÓN DE LA RPD Y DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LONGITUDES LAMINARES EN SISTEMAS DE 2 DIMENSIONES

A STRATEGY FOR THE OBTENTION OF THE RPD AND PROBABILITY DENSITY OF THE LAMINAR LENGTHS IN 2 DIMENSIONAL SYSTEMS

Juan Colman^{a,b}, Sergio A. Elaskar^{a,b} y Marcelo J. Frías^a

^a *Dto. Ing. Aeroespacial, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina*

^b *Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, CONICET-UNC, Córdoba, Argentina*

Palabras clave: Intermitencia Caótica, RPD, Densidad de Probabilidad de las Longitudes Laminares, Puntos fijos, Mapas Bidimensionales.

Resumen.

La intermitencia caótica es una ruta por medio de la cual un sistema evoluciona hacia comportamientos caóticos. Este fenómeno ha sido observado en varias ramas de la ciencia como la ingeniería, física, química, economía, biología, neurociencias, etc. En la mecánica de fluidos, particularmente en flujos turbulentos, la intermitencia es un rasgo característico. En los últimos años se ha desarrollado una teoría nueva de intermitencia caótica que permite comprender mejor la misma aplicada en mapas unidimensionales. Este trabajo continúa un esfuerzo por ampliar el estudio y la teoría a mapas de dos dimensiones. Se trabaja sobre un mapa bidimensional que presenta intermitencia tipo I para sus mapas de retorno 10 y 14. Se describen las metodologías empleadas para tratar con intermitencia en atractores de múltiples puntos fijos. Se presenta la estrategia utilizada para calcular numéricamente las funciones características de la intermitencia, la RPD y la densidad de probabilidad de las longitudes laminares. Se comparan los resultados numéricos con los obtenidos en mapas de una dimensión.

Keywords: Chaotic Intermittency, RPD, Probability Density of the Laminar Lengths, Fixed Points, Two-Dimensional Maps.

Abstract. Chaotic intermittency is a phenomenon observed in various branches of science, including engineering, physics, chemistry, economics, biology, and neuroscience. In fluid mechanics, particularly in turbulent flow, intermittency is a crucial characteristic. Recently, a new theory of chaotic intermittency has emerged, providing a better understanding of the phenomenon, and has been applied to one-dimensional maps. This work progresses with an effort to extend the new theory to two-dimensional maps. In this context, a two-dimensional return map exhibiting type-I intermittency is analyzed, particularly in its 10th and 14th iterations. The methodologies utilized to address intermittency with a significant number of fixed points are presented. The approach to deriving the characteristic functions that describe intermittency, including the reinjection probability density (RPD) function and the probability density of laminar lengths, is detailed. Additionally, numerical results are compared to those obtained from one-dimensional maps.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la intermitencia como ruta hacia el caos se origina en el trabajo seminal de Pomeau y Manneville ([Pomeau y Manneville, 1980](#)), siendo esta caracterizada por la alternancia entre fases de comportamiento regular (fases laminares) y fases de comportamiento caótico. En el ámbito de la mecánica de fluidos, el sistema de Lorenz se relaciona con la convección de Rayleigh–Bénard, la ecuación de Schrödinger no lineal, los flujos turbulentos, entre otros fenómenos ([Elaskar y del Río, 2017](#)). Extender la teoría al caso bidimensional brinda la posibilidad de caracterizar y analizar una mayor diversidad de comportamientos ([Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Elaskar y del Río, 2017](#)).

La primera clasificación de intermitencia propuso tres tipos, según el tipo de bifurcación que se produzca en el mapa. En la intermitencia tipo I los valores propios de la matriz Jacobiana evaluada en el punto fijo abandonan el círculo unitario a través de +1.

En los años recientes, una nueva teoría de intermitencia caótica fue desarrollada para mapas unidimensionales, centrando el estudio en la función de distribución de probabilidad de reinyección (RPD) y su relación con la duración de la longitud laminar media; en ella, la teoría clásica es un caso particular ([del Río y Elaskar, 2010, 2016, 2018, 2021, 2012; del Río y Makarov, 2013; del Río et al., 2014; Elaskar et al., 2017; Elaskar y del Río, 2018, 2023a,b; Elaskar et al., 2011, 2015, 2018](#)).

En ([Kim y Kye, 2001](#)) se estudia un sistema que muestra intermitencia tipo I en dos dimensiones, describiéndose la evolución temporal del sistema y obteniendo la relación característica.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El sistema bajo estudio es el mapa bidimensional propuesto en ([Kim y Kye, 2001](#)), definido por las ecuaciones:

$$x_{n+1} = 4\alpha x_n (1 - x_n) + \beta y_n (1 - x_n) \quad (1a)$$

$$y_{n+1} = 4\alpha y_n (1 - y_n) + \beta x_n (1 - y_n) \quad (1b)$$

Este mapa representa una generalización bidimensional de la forma normal cerca de una bifurcación tangente. α actúa como un parámetro de capacidad de carga análogo al del mapa logístico, y β acopla las dos variables del sistema.

2.1. Puntos fijos

Los puntos fijos son aquellos pares (x^*, y^*) tales que $x^* = F(x^*, y^*)$ y $y^* = G(x^*, y^*)$. Estos puntos desaparecerán por medio de una bifurcación tangente, dando origen a la intermitencia caótica.

2.2. Región laminar

La región laminar \mathcal{L} se define como un subconjunto acotado del espacio de fases donde la dinámica del sistema es aproximadamente periódica (laminar). Su geometría y tamaño deben definirse con criterios específicos, siendo su escala típicamente pequeña en comparación con la extensión total del espacio de fases explorado por la órbita caótica.

Para sistemas unidimensionales, \mathcal{L} suele definirse como un intervalo centrado en la ubicación del punto fijo "fantasma" (desaparecido producto de la bifurcación), de longitud $2c$. En dos dimensiones, la elección de la geometría de \mathcal{L} no es trivial. Entre las definiciones comunes se incluyen:

Región circular (norma L^2):

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y) - (x_f, y_f)|_2 \leq c\} \quad (2)$$

Región rectangular (norma L^∞):

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_f| \leq a, |y - y_f| \leq b\} \quad (3)$$

donde (x_f, y_f) es el punto fijo.

2.3. Función de distribución de probabilidad de reinyección RPD

La Función de distribución de probabilidad de reinyección (RPD, por sus siglas en inglés) describe la densidad de probabilidad con la que las trayectorias caóticas son reinyectadas en la región laminar \mathcal{L} . Esta función, junto con el mapa local que gobierna la dinámica dentro del canal, determina estadísticamente la distribución de las longitudes de las fases ligeras.

2.4. Longitud laminar

La longitud laminar l es una variable aleatoria que cuantifica la duración de una fase laminar, medida en número de iteraciones del mapa (para sistemas discretos) o en unidades de tiempo (para sistemas continuos). En intermitencia tipo I es una función de la distancia entre el mapa y la llamada hiper-superficie diagonal (DHS por sus siglas en inglés), la cual en sistemas de una dimensión es la recta bisectriz $x_n = x_{n+1}$.

3. RESULTADOS

En esta sección se presentan resultados numéricos y se comparan con las expresiones teóricas para diferentes valores de los parámetros de control.

3.1. Cálculo de puntos fijos

El estudio numérico se llevó a cabo para tres conjuntos de parámetros α, β , cuyos valores se detallan en la Tabla 1. Estos valores fueron seleccionados para producir intermitencia tipo I.

α	β
$\alpha_1 : 0.674149344$	$\beta_1 : 0.5$
$\alpha_2 : 0.77826511$	$\beta_2 : 0.3$
$\alpha_3 : 0.68900156$	$\beta_3 : 0.5$

Tabla 1: Valores de parámetros trabajados.

Los pares (α_1, β_1) y (α_2, β_2) muestran una bifurcación tangente para el mapa de retorno $n + 14$, el cual posee 14 puntos fijos. El par (α_3, β_3) muestra una bifurcación tangente para el mapa de retorno $n + 10$, que posee 10 puntos fijos.

Para calcular los puntos fijos, se modificó levemente el parámetro α , aumentándolo de forma progresiva hasta observar la desaparición de la dinámica intermitente y la estabilización del sistema en una órbita periódica estable. Una vez identificados los valores de α críticos, se procedió a caracterizar los atractores.

La figura 1 muestra la evolución temporal para los tres casos indicados en la tabla 1 para el mapa de retorno $n + 1$, donde se aprecian los múltiples puntos fijos.

Para cada conjunto de parámetros, se integró numéricamente el sistema hasta que la dinámica había abandonado el régimen transitorio. Posteriormente, los puntos fijos del mapa correspondiente se estimaron filtrando y aislando estados repetidos de la órbita periódica, con una tolerancia predeterminada.

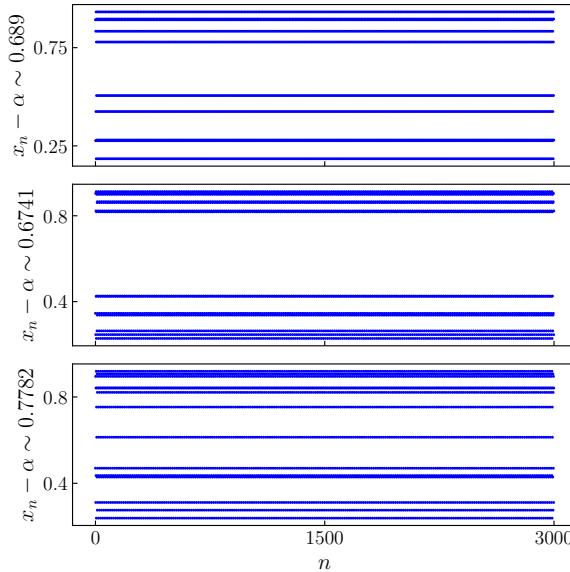


Figura 1: Evolución del sistema para los tres pares de parámetros.

Los 10 puntos fijos obtenidos en el caso de (α_3, β_3) se muestran en la tabla 3 en conjunto con sus valores propios.

n	x	y	λ_1	λ_2	n	x	y	λ_1	λ_2
1	0.2812	0.7793	0.9902	0.0841	6	0.7793	0.2812	0.9902	0.0841
2	0.8372	0.505	0.9902	0.0841	7	0.505	0.8372	0.9902	0.0841
3	0.4168	0.8961	0.9902	0.0841	8	0.8961	0.4168	0.9902	0.0841
4	0.9312	0.2782	0.9902	0.0841	9	0.2782	0.9312	0.9902	0.0841
5	0.186	0.8895	0.9902	0.0841	10	0.8895	0.186	0.9902	0.0841

Tabla 2: Valores de los puntos fijos y valores propios para $a \approx 0,689$.

Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene la localización de los puntos fijos para los casos correspondientes a (α_1, β_1) y (α_2, β_2) (se omite la introducción de la tabla análoga para (α_1, β_1) 3 por razones de espacio).

El análisis de estabilidad lineal para el caso (α_3, β_3) requiere el cálculo de la matriz Jacobiana del sistema iterado k -veces, donde $k = 10$ es el periodo del ciclo, evaluada en el punto fijo (x^*, y^*) del mapa compuesto F^{10} :

$$\mathbf{J} = DF^{10}(x^*, y^*) \quad (4)$$

n	x	y	λ_1	λ_2	n	x	y	λ_1	λ_2
1	0.2387	0.8212	0.8345	0.1693	8	0.8212	0.2387	0.8345	0.1693
2	0.7532	0.4699	0.8349	0.1692	9	0.4699	0.7532	0.8349	0.1692
3	0.6135	0.8952	0.836	0.1685	10	0.8952	0.6135	0.836	0.1685
4	0.842	0.3113	0.8366	0.1682	11	0.3113	0.842	0.8366	0.1682
5	0.4289	0.8414	0.8366	0.1682	12	0.8414	0.4289	0.8366	0.1682
6	0.9067	0.4359	0.8362	0.1688	13	0.4359	0.9067	0.8362	0.1688
7	0.2756	0.9189	0.8339	0.1696	14	0.9189	0.2756	0.8339	0.1696

Tabla 3: Valores de los puntos fijos y valores propios para $a \approx 0,778$.

El cálculo analítico de DF^{10} resulta prohibitivamente complejo. Para superar esta dificultad se aplica numéricamente la regla de la cadena, multiplicando secuencialmente las matrices Jacobianas del mapa original F evaluadas en cada punto de la órbita 10-periódica $\{(x_i^*, y_i^*)\}_{i=1}^{10}$, que converge al punto fijo de F^{10} :

$$DF^k(x^*, y^*) = DF(F^{k-1}(x^*, y^*)) * DF(F^{k-2}(x^*, y^*)) \dots DF(x^*, y^*) \quad (5)$$

Los valores propios son naturalmente los mismos, pues el método de cálculo implica:

$$DF^k(x^*, y^*) = DF(x_9^*, y_9^*) * DF(Fx_8^*, y_8^*) \dots DF(x_1^*, y_1^*) \quad (6)$$

El espectro de valores propios $\sigma(J)$ de la matriz Jacobiana presenta las características de una bifurcación tangente: un autovalor $\lambda_1 \approx 1$ y un segundo autovalor $|\lambda_2| \ll 1$. Esta configuración confirma la inestabilidad neutra en dirección del autovector asociado a λ_1 (variedad central) y una dinámica fuertemente contractiva en la dirección del autovector de λ_2 . La presencia de este par de valores propios es consistente con la observación del régimen de intermitencia tipo I, el cual se manifiesta típicamente en las proximidades de este tipo de bifurcación.

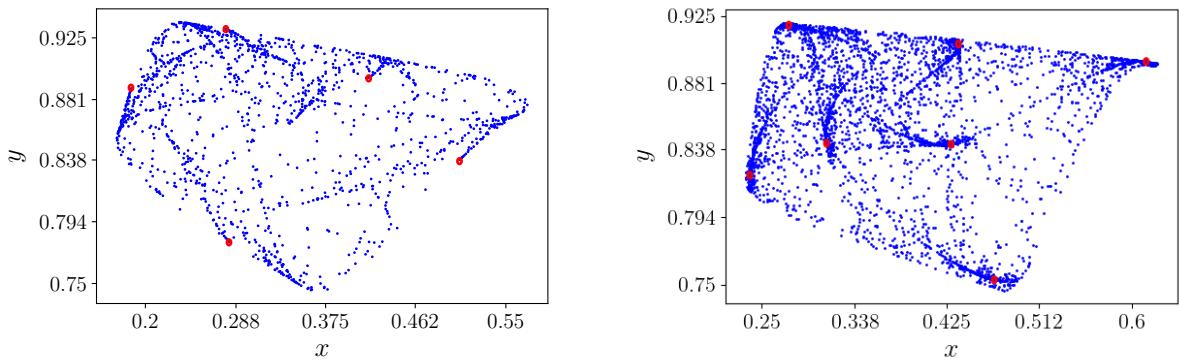
3.2. Función RPD

Para calcular la RPD se definió una región laminar de forma circular de radio c centrada en cada punto fijo (x^*, y^*) usando la norma L^2 previamente definida. La función RPD se caracterizó numéricamente desde dos perspectivas:

1. **Unidimensional:** Calculando las distribuciones $\phi(x), \phi(y)$ y la distribución radial $\phi(r)$.
2. **Bidimensional:** Calculando la distribución conjunta $\phi(x, y)$ para capturar posibles correlaciones espaciales.

Las figuras 2a y 2b ilustran, para (α_2, β_2) y (α_3, β_3) respectivamente, la geometría del atractor caótico en el espacio de fases (x, y) , la localización de los puntos fijos del ciclo periódico inestable y las regiones laminares circulares definidas a su alrededor. Solo se muestran los puntos tales que $y > x$ ya que por simetría la otra mitad del atractor es idéntica.

Los eventos de reinyección se identificaron por un criterio algorítmico. Un punto (x_n, y_n) se considera reinyectado en la región laminar \mathcal{L} si satisface:



(a) Atractor caótico para puntos $y_n > x_n$ (es simétrico respecto a la bisectriz $x_n = y_n$), con las regiones laminares en rojo, con parámetros (α_3, β_3) .

(b) Atractor caótico para puntos $y_n > x_n$ (es simétrico respecto a la bisectriz $x_n = y_n$), con las regiones laminares en rojo, con parámetros (α_2, β_2) .

Figura 2: Atractores caóticos.

$$(x_n, y_n) \in \mathcal{L} \quad \text{y} \quad (x_{n-1}, y_{n-1}) \notin \mathcal{L} \quad (7)$$

donde $\mathcal{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2} \leq c \right\}$

El criterio se implementó monitorizando la función distancia $d(n)$ al punto fijo (ec. 8). Se registró una reinyección cuando la trayectoria cumple: $d(n) > c$ y $d(n+1) \leq c$. Siendo la distancia:

$$d(n) = \sqrt{(x(n) - x^*)^2 + (y(n) - y^*)^2} \quad (8)$$

Para cada punto fijo se almacenaron las coordenadas (x, y) de todos los puntos identificados como reinyectados, así como su distancia radial $r = d(n+1)$. Las funciones RPD $\phi(x), \phi(y), \phi(r)$ y $\phi(x, y)$ se estimaron posteriormente construyendo histogramas normalizados de estas cantidades, los cuales aproximan su densidad de probabilidad subyacente.

En la figura 3 se presentan los resultados de este procedimiento para un punto fijo del mapa de retorno $n+10$, correspondiente a los parámetros (α_3, β_3) . La figura 4 muestra lo mismo para el mapa $n+14$ y (α_2, β_2) .

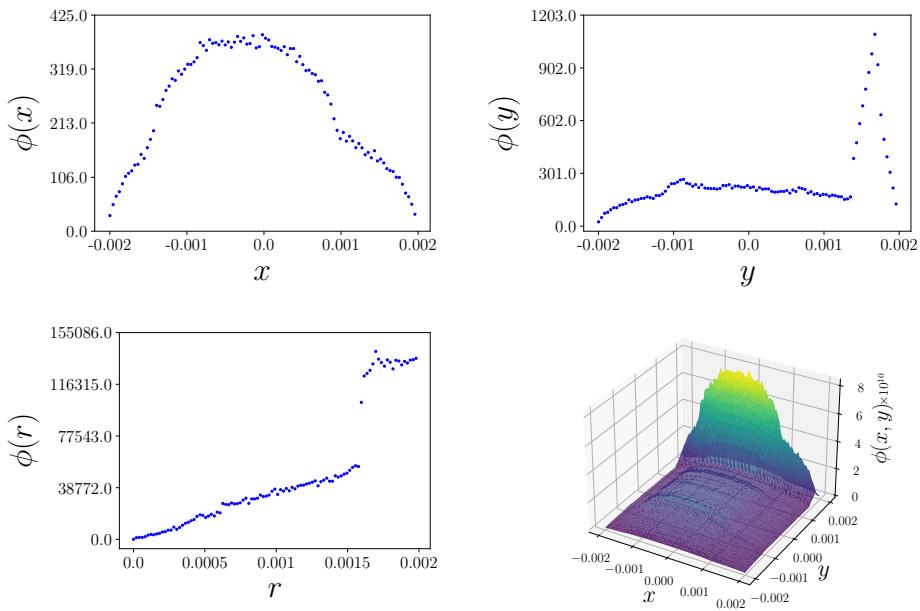
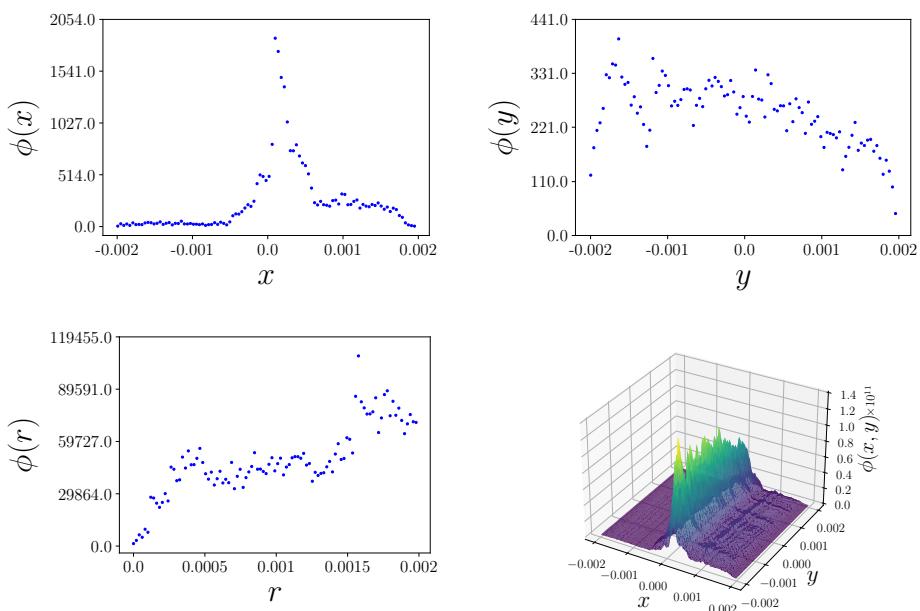
Las figuras de las RPD calculadas no revelan la presencia de simetrías evidentes ni sugieren relaciones funcionales simples o universales que caractericen la dinámica de reinyección.

La representación bidimensional $\phi(x, y)$, exhibe un perfil marcadamente irregular y ruidoso, con la aparición de picos de probabilidad localizados en regiones específicas del espacio de fases.

La causa probable del aspecto ruidoso de $\phi(x, y)$ es una limitación estadística inherente al método de cálculo. Para una malla con resolución de 100×100 bines (resultando en 10000 celdas bidimensionales) y un tamaño muestral de $N \approx 200000$ puntos de reinyección, la cuenta promedio por bin es aproximadamente 20 puntos. Este número resulta insuficiente para obtener una estimación suave de la RPD.

3.3. Longitudes laminares

Las probabilidades de longitudes laminares, denotadas como $\psi(l)$, se calcularon empleando dos metodologías distintas con el objetivo de comparar su consistencia.

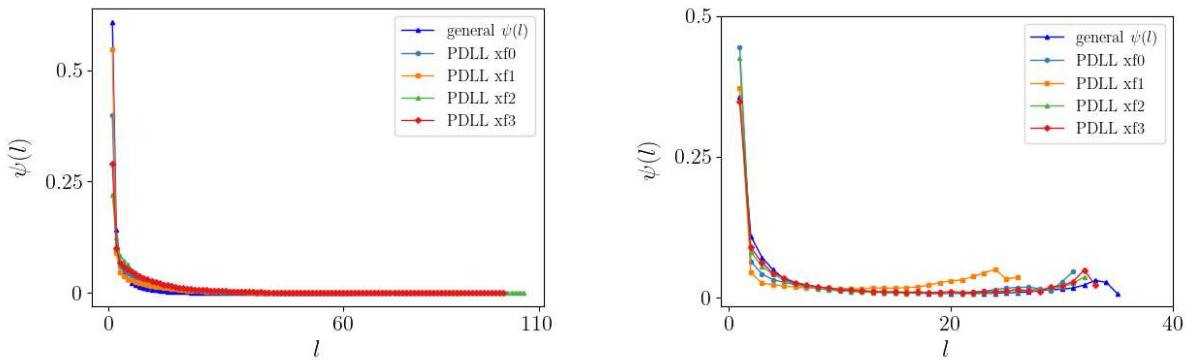
Figura 3: Funciones RPD para (α_3, β_3) Figura 4: Funciones RPD para (α_2, β_2) .

- 1. Método de la Hipersuperficie Diagonal (DHS):** Este enfoque global calcula la distancia Euclíadiana en el espacio de fases extendido a la hipersuperficie diagonal, definida por $x_{n+1} = x_n$ u $y_{n+1} = y_n$. La distancia se calcula como:

$$d_{DHS} = \sqrt{(x_n - x_s)^2 + (x_{n+1} - x_s)^2 + (y_n - y_s)^2 + (y_{n+1} - y_s)^2}, \quad (9)$$

donde $x_s = (x_n + x_{n+1})/2$ y $y_s = (y_n + y_{n+1})/2$ representan las coordenadas del punto más cercano a (x_n, y_n) sobre la DHS. Este método genera una única función $\psi(l)$.

- 2. Método de Distancia a Punto Fijo:** Este enfoque local utiliza la distancia Euclíadiana en el plano (x, y) (definida en la Ec. 8) a un punto fijo específico (x^*, y^*) . Una fase laminar se considera iniciada cuando la trayectoria es reinyectada en la región laminar de dicho punto fijo (i.e., $d(n) \leq c$). Este método produce una función $\psi(l)$ independiente para cada punto fijo del ciclo.



(a) Funciones $\psi(l)$ calculadas con el método de la hipersuperficie y en cuatro puntos fijos para (α_3, β_3)

(b) Funciones $\psi(l)$ calculadas con el método de la distancia (general) y en cada punto fijo para (α_2, β_2)

con el método de la distancia al punto fijo.

Figura 5: Comparación de las funciones $\psi(l)$ obtenidas con distintos métodos y parámetros.

Las figuras 5a y 5b muestran la comparación de las funciones $\psi(l)$ obtenidas mediante ambos métodos para los dos conjuntos de parámetros. Los resultados revelan que las funciones $\psi(l)$ son similares, independientemente del método de cálculo empleado.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha contribuido a la descripción del fenómeno de intermitencia caótica en un mapa bidimensional. Para tal fin se estudia la dinámica del sistema alrededor de ciclos de 10 y 14 iteraciones que se obtienen para diferentes valores de los parámetros de control α y β .

Se ha obtenido la matriz Jacobiana $DF^k(x^*, y^*)$ y se ha realizado la caracterización espectral de la misma (con valores propios $\lambda_1 \approx 1$ y $|\lambda_2| \ll 1$). Dicho análisis confirma que la dinámica observada corresponde a intermitencia caótica tipo I, originada en una bifurcación tangente.

La significativa disparidad en la magnitud de los valores propios sugiere que la dinámica esencial de la intermitencia puede proyectarse sobre la dirección asociada al autovector v_1 . Permitiendo estudiar el fenómeno en una dimensión reducida. Se han evaluado numéricamente las

funciones RPD no encontrándose un comportamiento regular de las mismas y sí una dependencia en la dirección en la que es considerado el mecanismo de reinyección, siendo este un tema que será necesario analizar más detalladamente en trabajos futuros.

La coincidencia entre las distribuciones $\psi(l)$ calculadas mediante el método global (*DHS*) y el método local (distancia al punto fijo) confirma que la estadística de las fases laminares es una propiedad global del sistema. Validando el uso del método de la *DHS*, más eficiente computacionalmente.

Agradecimientos Los autores agradecen a la SECyT, Universidad Nacional de Córdoba (UNC) por financiar esta investigación, al Dpto. Ing. Aeroespacial, FCEFyN de la UNC, al Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, CONICET-UNC.

REFERENCIAS

- del Río E. y Elaskar S. New characteristic relation in type ii intermittency. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 20:1185–1191, 2010. <http://doi.org/https://doi.org/10.1142/S0218127410026381>.
- del Río E. y Elaskar S. On the intermittency theory. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 26:1650228, 2016. <http://doi.org/https://doi.org/10.1142/S021812741650228X>.
- del Río E. y Elaskar S. Experimental evidence of power law reinjection in chaotic intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 64:122–134, 2018. <http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.013>.
- del Río E. y Elaskar S. Type iii intermittency without characteristic relation. *Chaos*, 31:043127, 2021. <http://doi.org/https://doi.org/10.1063/5.0040599>.
- del Río E., Elaskar S., y Donoso J. Laminar length and characteristic relation in type i intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 19:967–976, 2014. <http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.08.012>.
- del Río E. Sanjuán M. y Elaskar S. Effect of noise on the reinjection probability density in intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17:3587–3596, 2012. <http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.01.020>.
- del Río E. Elaskar S. y Makarov S. Theory of intermittency applied to classical pathological cases. *Chaos*, 19:967–976, 2013. <http://doi.org/https://doi.org/10.1063/1.4813857>.
- Elaskar S. y del Río E. *New Advances on Chaotic Intermittency and its Applications*. Springer, 2017. <http://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-47837-1>.
- Elaskar S. y del Río E. Discontinuous reinjection probability density function in type v intermittency. *J. Comp. Nonlinear Dynam.*, 13:121001, 2018. <http://doi.org/https://doi.org/10.1115/1.4041577>.
- Elaskar S. y del Río E. Review of chaotic intermittency. *Symmetry*, 15:1195, 2023a. <http://doi.org/https://doi.org/10.3390/sym15061195>.
- Elaskar S. y del Río E. Theoretical evaluation of the reinjection probability density function in chaotic intermittency. *Symmetry*, 15:1591, 2023b. <http://doi.org/https://doi.org/10.3390/sym15081591>.
- Elaskar S., del Río E., y Costa A. Reinjection probability density for type iii intermittency with noise and lower boundary of reinjection. *J. Comp. Nonlinear Dynam.*, 12:031020–11, 2017. <http://doi.org/https://doi.org/10.1115/1.4034732>.
- Elaskar S., del Río E., y Donoso J. Reinjection probability density in type iii intermittency. *Physica A*, 390:2759–2768, 2011.
- Elaskar S., del Río E., y Gutierrez Marcantoni L. L. non-uniform reinjection probability density function in type v intermittency. *Nonlinear Dynam.*, 92:683–697, 2018.

- <http://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11071-018-4083-7>.
- Elaskar S., del Río E. and Krause G., y A. C. Effect of the lower boundary of reinjection and noise in type ii intermittency. *Nonlinear Dynam.*, 79:1411–1424, 2015.
<http://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11071-014-1750-1>.
- Kim C. y Kye W. Two-dimensional type-i intermittency. *Physical Review E*, 2001.
<http://doi.org/https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.037202>.
- Marek M. y Schreiber I. Chaotic behaviour of deterministic dissipative systems. *Cambridge University Press*, 1995.
- Nayfeh A. y Balachandran B. Applied nonlinear dynamics. Wiley, 1995.
<http://doi.org/https://doi.org/10.1002/9783527617548>.
- Pomeau Y. y Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Commun. Math. Phys.*, 74:189–197, 1980.
<http://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF01197757>.
- Schuster H. y Just W. Deterministic chaos. Wiley VCH, 2005.
<http://doi.org/https://doi.org/10.1002/3527604804>.