

ESTRATEGIAS DE REFINAMIENTO ADAPTATIVO APLICADAS AL ANÁLISIS DE FLUJOS TURBULENTOS

ADAPTIVE REFINEMENT STRATEGIES APPLIED TO TURBULENT FLOW ANALYSIS

**María Clara Cortizo Carbone^{a,b}, César I. Pairetti^{a,c,d}, César M. Venier^{a,c} y Santiago
Márquez Damián^{b,e}**

^a*Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Escuela
de Ingeniería Mecánica, Rosario, Argentina*

^b*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (UNL - CONICET), Colectora Ruta Nacional
Nº 168, km 0, Paraje El Pozo (3000) Santa Fe, Argentina*

^c*IFIR Instituto de Física de Rosario (UNR, CONICET), Rosario, Argentina*

^d*Sorbonne Université and CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, 75005 Paris, France*

^e*Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe, Santa Fe, Argentina*

Palabras clave: Turbulencia, Refinamiento de Malla Adaptativo, Simulación Numérica Directa.

Resumen. En este trabajo se presentan avances en el estudio numérico de la turbulencia mediante simulaciones utilizando el software Basilisk, con el objetivo de establecer una base de referencia para el análisis de modelos de turbulencia multivel. Se trabaja sobre una simulación de flujo turbulento en condiciones periódicas, permitiendo la caracterización estadística de sus propiedades. Se utilizan técnicas de refinamiento adaptativo con el objetivo de optimizar el costo computacional sin perder resolución de las escalas relevantes del flujo. Se evalúan las fluctuaciones de las componentes de la velocidad y se calculan las correlaciones del flujo y el tensor de Reynolds. La caracterización costo-precisión de las estrategias de refinamiento en función de la precisión con la que se capturan las propiedades del flujo permite definir criterios para el modelado multivel de flujos turbulentos.

Keywords: Turbulence, Adaptive Mesh Refinement, Direct numerical simulation.

Abstract. This work presents advances in the numerical study of turbulence through simulations using Basilisk software, with the aim of establishing a baseline for the analysis of multilevel turbulence models. A simulation of turbulent flow under periodic conditions is employed, allowing for the statistical characterization of its properties. Adaptive refinement techniques are used to optimize computational cost without losing resolution at relevant flow scales. Fluctuations in the velocity components are evaluated, and flow and Reynolds tensor correlations are calculated. The cost-accuracy characterization of the refinement strategies based on the accuracy with which flow properties are captured allows for defining criteria for multilevel modeling of turbulent flows.

1. INTRODUCCIÓN

Aunque en general los flujos turbulentos pueden ser fácilmente identificados al observarlos, no hay un claro consenso en cuanto a una definición precisa de la turbulencia. En ese sentido, [Tennekes y Lumley \(1972\)](#) observan que es muy difícil dar una definición precisa de la turbulencia, y que solo es posible listar ciertas características comunes de los flujos turbulentos. El consenso actual respecto a las principales características de los flujos turbulentos indica que: son impredecibles, inherentemente tridimensionales e inestables, y abarcan un amplio rango de escalas espaciales y temporales ([Sagaut et al., 2006](#)). Esto da lugar a un problema multiescala con acoplamiento no lineal, lo cual imposibilita una descripción determinística de su movimiento detallado. [Moin y Chan \(2024\)](#) definen la turbulencia como un estado caótico del flujo de un fluido con características determinísticas identificables, usualmente llamadas torbellinos (en inglés, *eddies*). El estudio, la descripción y predicción del comportamiento de los flujos turbulentos es de gran importancia, debido a que la mayoría de los flujos presentes en gran variedad de aplicaciones, como aerodinámica, hidrodinámica, flujo en cañerías, casi cualquier aplicación de ingeniería a escala industrial, son turbulentos.

Desde el punto de vista matemático, el movimiento de fluidos puede describirse mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, que corresponden a la conservación de masa y momento lineal. Existen distintos enfoques para abordar su estudio. Desde los trabajos de O. Reynolds, la turbulencia ha sido estudiada experimentalmente, realizando mediciones y desarrollando ecuaciones útiles en determinado rango de validez. También se ha utilizado la estadística y la probabilidad, para realizar descripciones de la turbulencia, tanto en el espacio físico como en el espacio espectral de Fourier. Desde el surgimiento del cálculo numérico, se realizan simulaciones computacionales, cada vez más precisas, que permiten simplificar el análisis de la turbulencia ([Brunton, 2021b](#)).

La simulación de flujos turbulentos presenta una complejidad inherente en la dinámica de fluidos computacional, caracterizada por estructuras que se desarrollan en un amplio rango de escalas espaciales y temporales, rango que se amplía con el aumento del número de Reynolds. Realizar una Simulación Numérica Directa (DNS, en inglés *Direct Numerical Simulation*) implica resolver todas las escalas del flujo, lo cual conlleva un elevado costo computacional, especialmente para altos números de Reynolds. Para reducir este costo, se desarrollan y utilizan modelos de turbulencia que introducen en las ecuaciones los efectos de las escalas de flujo no resueltas.

Existen distintas estrategias de modelado. Por un lado, los modelos de las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS, en inglés *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) resuelven las ecuaciones obteniendo las propiedades del flujo medio, modelando todas las escalas por medio de un término adicional que contempla los efectos de las fluctuaciones sobre el flujo medio a partir de un modelo de cierre. Por otro lado, la Simulación de Grandes Vórtices (LES, en inglés *Large Eddy Simulation*) consiste en separar las escalas resueltas de las escalas no resueltas del flujo mediante un filtro espacial, normalmente la propia malla, lo cual permite resolver explícitamente las escalas más grandes y modelar las más pequeñas ([Brunton, 2021a](#)).

Por su parte, los modelos multinivel, como la utilización de técnicas de refinamiento adaptativo de la malla (AMR, en inglés *Adaptive Mesh Refinement*), presentada en este trabajo, ofrecen una alternativa para ajustar dinámicamente la resolución de la malla donde sea necesario con el objetivo de capturar todas las escalas relevantes del flujo, disminuyendo el costo computacional sin perder precisión. Trabajos recientes, como los de [De Stefano y Vasilyev \(2012\)](#); [Offermans et al. \(2023\)](#); [Ims y Wang \(2023\)](#), muestran la necesidad de desarrollar criterios de adaptación

de malla basados en la dinámica física del problema que sean robustos y eficientes. De manera complementaria, [Cadieux et al. \(2017\)](#) resalta la importancia de cuantificar la disipación numérica inherente a los métodos utilizados a la hora de interpretar los resultados.

En ese contexto, este trabajo presenta simulaciones de turbulencia isotrópica y homogénea comparando dos criterios para el refinamiento adaptativo, con el objetivo de capturar las escalas disipativas según los criterios establecidos en la bibliografía ([Pope, 2000](#)). Si bien el AMR permite reducir el costo computacional al refinar la malla donde ocurren fenómenos locales, es crucial garantizar que la malla más gruesa no comprometa la precisión. Por ello, este trabajo se centra en analizar los errores introducidos al utilizar los distintos criterios de refinamiento. En la sección 2 se describe el marco teórico y la metodología, en la sección 3 se presenta el caso de estudio, en la sección 4 se discuten los resultados obtenidos al utilizar las estrategias de refinamiento adaptativo, y en la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. METODOLOGÍA Y MARCO TEÓRICO

La dinámica del flujo de fluidos se rige por las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes, que se corresponden con la conservación de la masa y del momento lineal, respectivamente. En particular, las Ec. (1) y Ec. (2) expresan estas leyes de conservación para un fluido Newtoniano, incompresible y con densidad constante, donde \vec{u} es la velocidad, p la presión, ρ la densidad, ν la viscosidad cinemática del fluido y \vec{f} una fuerza de cuerpo.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \vec{f} \quad (2)$$

Para realizar las simulaciones se utiliza la plataforma de código libre Basilisk ([Popinet, 2014](#)), que permite resolver problemas multifísicos mediante la resolución numérica de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. En particular, cuenta con un *solver* de Navier-Stokes con formulación centrada en la celda utilizando el método de la proyección ([Popinet, 2003, 2009; Lagrée et al., 2011](#)). Este algoritmo está basado en el Método de Volúmenes Finitos, donde cada celda almacena el valor medio de las variables de interés.

Basilisk utiliza una estructura de mallas del tipo *octree* que consiste en iniciar la simulación con una celda madre del tamaño del dominio L (nivel 0), y con cada nivel de refinamiento subdividir las celdas existentes a la mitad en cada una de sus dimensiones. Por lo tanto, el tamaño de las celdas utilizadas Δ está relacionado con el nivel máximo de refinamiento \mathcal{L} mediante $\Delta = L/2^{\mathcal{L}}$. En la Fig. 1a se muestra un esquema 2D de la relación de los distintos niveles de refinamiento.

Este tipo de malla permite la realización de un refinamiento de malla adaptativo computacionalmente eficiente, el cual se utiliza para definir el paso de malla de forma local en función de un criterio determinado. El refinamiento adaptativo se controla mediante dos parámetros: el nivel máximo de refinamiento y el criterio utilizado para refinar. El criterio de refinamiento consiste en definir y evaluar una función error (en base a los campos solución), la cual tendrá un valor dado en cada celda del dominio. Si la estimación del error resulta menor a un valor mínimo aceptado, la celda es *demasiado fina* y debe desrefinarse, mientras que si el error está por encima del límite superior determinado, la celda es *demasiado gruesa* y debe refinarse, como se muestra en la Fig. 1b con una colección de valores de error indicados mediante puntos verdes.

Este proceso se realiza de forma dinámica en cada iteración del paso de tiempo, teniendo en cuenta la solución obtenida en ese instante.

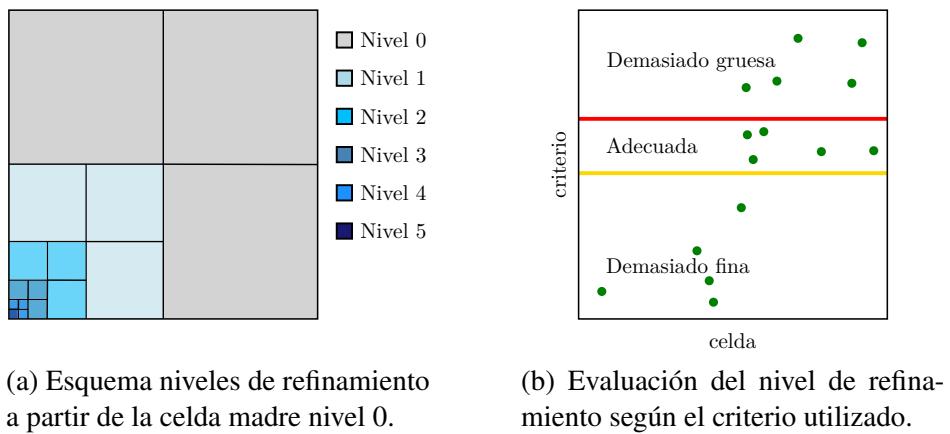


Figura 1: Descripción del refinamiento adaptativo.

El método disponible en Basilisk ha sido desarrollado por [Popinet \(2015\)](#). El trabajo de [Van Hooft et al. \(2018\)](#) brinda una clara descripción del criterio de refinamiento. Este se basa en definir una banda de tolerancia para la estimación del error numérico \mathcal{X} , el cual surge de la evaluación del campo solución de interés en celdas de distinto nivel, con el objetivo de definir el tamaño adecuado. La función `adapt_wavelet` realiza esta evaluación, y requiere como parámetros de entrada el campo sobre el cual se desea evaluar el error numérico y el valor máximo aceptable como error e . El algoritmo interno de adaptación refina la malla si la estimación del error $\mathcal{X} > e$ y la desrefina si $\mathcal{X} < \frac{2e}{3}$.

En este trabajo, además del criterio de refinamiento por error numérico, se utiliza un criterio basado en una estimación local de la escala de Kolmogorov $\eta_{local} = \nu^{3/4}/\epsilon_{local}^{1/4}$ donde ν es la viscosidad cinemática del fluido y ϵ es la tasa de disipación viscosa, calculada localmente en cada celda. La función `adapt_values` propuesta por [Pairetti \(2019\)](#), evalúa que la relación Δ/η_{local} se mantenga dentro del rango establecido por Δ_r^{max} en el límite superior y Δ_r^{min} en el inferior, con el objetivo de garantizar la representación de todas las escalas de flujo siguiendo los lineamientos del DNS brindados por [Pope \(2000\)](#).

3. CASO DE ESTUDIO

En este trabajo se realizan simulaciones numéricas de turbulencia isotrópica y homogénea sobre un dominio cúbico de lado $L = 2\pi$ m, con condiciones de borde periódicas, incluyendo un término de forzamiento lineal dependiente de la magnitud de la velocidad, tal como describen [Rosales y Meneveau \(2005\)](#), con el objetivo de sostener la turbulencia en un estado estadísticamente estacionario. Las propiedades del fluido están dadas por $\rho = 1$ kg/m³ y $\nu = 0,01$ m²/s.

El flujo analizado se encuentra caracterizado por el número de Reynolds Re_L dado por la longitud del lado del dominio, así como también el número de Reynolds asociado a la microescala de Taylor Re_λ , los cuales se definen y relacionan según las expresiones de la Ec. (3) ([Pope, 2000](#)). Según las condiciones geométricas y las propiedades físicas, este problema está caracterizado por $Re_L \approx 628$ y $Re_\lambda \approx 64$. Si bien los valores de Re analizados no corresponden a un régimen de flujo turbulento desarrollado, el sistema se encuentra en un estado de transición

donde se comienza a observar el comportamiento caótico debido a los efectos del término no lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes, característico de la turbulencia.

$$Re_L = \frac{u_0 L}{\nu} \quad ; \quad Re_\lambda = \left(\frac{20}{3} Re_L \right)^{1/2} \quad (3)$$

Como condición inicial de las simulaciones, se establece un flujo isotrópico de tipo “ABC” (flujo Arnold–Beltrami–Childress), cuya distribución de velocidad \vec{u} está dada por la expresión de la Ec. (4), donde se establece la velocidad de referencia $u_0 = 1 \text{ m/s}$ y el número de onda característico $k = 1 \text{ m}^{-1}$. Este tipo de flujo es ampliamente utilizado para el estudio del desarrollo de la turbulencia, ya que constituye soluciones inestables de las ecuaciones de Navier-Stokes no viscosas (Podvigina y Pouquet, 1994). Este flujo inicial evoluciona debido al forzamiento lineal establecido como la diferencia entre la velocidad instantánea de la celda y la velocidad media del dominio: $\vec{f} = A(\vec{u} - \bar{u})$, donde A controla la intensidad turbulenta y se establece $A = 0,1$. La metodología de análisis sigue los lineamientos presentados por Rivièvre (2024).

$$\vec{u} = u_0 (\cos(k y) + \sin(k z) ; \sin(k x) + \cos(k z) ; \cos(k x) + \sin(k y)) \quad (4)$$

Utilizando las instrucciones provistas en el sitio web de Basilisk, se realizó una primera simulación con una malla uniforme nivel 7 y se compararon los resultados obtenidos con los proporcionados como referencia a partir de una resolución numérica (Rosales y Meneveau, 2005). En la Fig. 2 se muestra la evolución de los vórtices generados dentro del dominio para distintos instantes de tiempo. Para su visualización, se utiliza el criterio λ_2 (Jeong y Hussain, 1995), donde las isosuperficies están calculadas para un valor de $\lambda_2 = -1$. Se puede observar el estado inicial del flujo, el cual evoluciona a partir del forzamiento lineal inducido, produciendo el estiramiento y la evolución de las estructuras grandes en vórtices muy pequeños. Luego de esta descomposición, los vórtices se agrupan en estructuras de tamaño intermedio, alcanzando un estado estadísticamente estacionario que se detecta a partir de la estabilización del valor medio en el tiempo de las variables integrales, como la energía cinética turbulenta total. Las superficies del dominio están coloreadas de acuerdo al siguiente detalle: la superficie vertical derecha con la componente u_y de la velocidad, la superficie vertical izquierda con la componente u_x de la velocidad y la superficie horizontal inferior con la vorticidad ω .

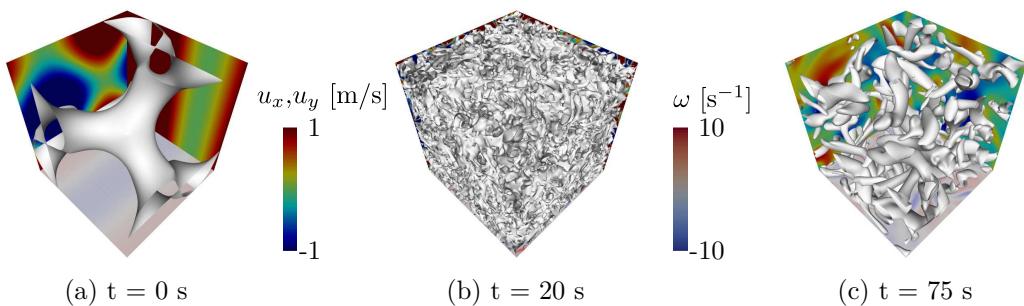


Figura 2: Evolución temporal de las estructuras turbulentas dentro del dominio analizado.

En la Fig. 3 se muestra la evolución temporal de la disipación media \bar{v}_d (Fig. 3a) y de la energía cinética media \bar{k}_e (Fig. 3b) en el dominio, donde u_i es la fluctuación de velocidad, comparadas con la solución numérica de referencia (Basilisk, 2025). Se puede observar que durante el inicio de la evolución, tanto la disipación como la energía cinética, aumentan, alcanzando un pico máximo alrededor de los 18 s aproximadamente. Este máximo ocurre en el momento de

mayor ruptura de vórtices, obteniéndose las estructuras más pequeñas como las que se observan en la Fig. 2b. Luego, la disipación y la energía cinética decaen, al mismo tiempo que las estructuras pequeñas coalescen en estructuras de tamaño intermedio, que pueden verse en la Fig. 2c, alcanzando un estado estadísticamente estacionario a partir de los 60 s aproximadamente. Sobre estas gráficas, se muestran los valores medios a partir del instante en que el sistema adopta un estado estadísticamente estacionario ($t \geq 60$ s), tanto para la simulación nivel 7 como para los datos de referencia, para la disipación media y para la energía cinética media, respectivamente. Comparando estos valores medios, se obtuvo un error relativo de 10 % para la disipación y de 11 % para la energía cinética, respecto del valor medio de referencia.

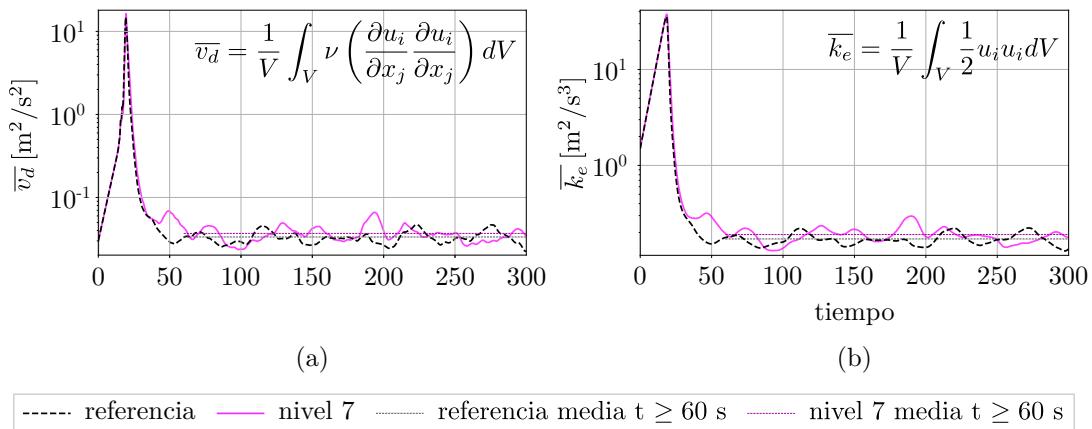


Figura 3: Evolución temporal de la disipación media (a) y la energía cinética media (b) con malla fija nivel 7, comparadas con datos de referencia del sitio web de [Basilisk \(2025\)](#).

Habiendo obtenido un acuerdo razonable con los resultados de referencia, equivalente a lo reportado en los casos disponibles en el sitio web de Basilisk, en la siguiente sección se muestran los resultados obtenidos utilizando los métodos de refinamiento adaptativo propuestos y se los compara con los obtenidos mediante mallas fijas.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se muestran las variaciones en la energía cinética media al utilizar los dos criterios de refinamiento adaptativo propuestos. Se considera como referencia los resultados de la simulación disponibles en el sitio web de Basilisk ([Basilisk, 2025](#)), y se muestran los resultados obtenidos con mallas fijas, cuyo nivel de refinamiento se corresponde con el nivel máximo establecido en el refinamiento adaptativo.

Para `adapt_wavelet` se define el límite de error máximo como $e = w \cdot \overline{u_x}$, donde $\overline{u_x}$ es el promedio volumétrico de la componente x de la velocidad en cada instante y w representa el porcentaje máximo admitido como error. Se verifica que ninguna de las tres componentes de la velocidad supere este límite, considerando valores de 5 %, 10 % y 20 %.

En la Fig. 4 se muestran los resultados obtenidos para niveles máximos de refinamiento 6, 7, 8 y 9 utilizando el criterio de refinamiento por `wavelet` y los tres valores de tolerancia, junto con los resultados de las mallas fijas. Cada nivel de refinamiento está identificado por un tipo de línea diferente y se muestran con un mismo color las simulaciones que comparten el mismo criterio de malla. Además, se muestra un acercamiento a la zona del pico máximo de la energía cinética media. Se puede observar que, independientemente del umbral de error establecido, las simulaciones con refinamiento adaptativo subestiman el valor máximo de energía cinética,

así como también adelantan su ocurrencia en el tiempo. Asimismo, para un mismo criterio de refinamiento, los resultados obtenidos son similares para todos los niveles máximos de refinamiento establecidos. Se evidencia que existe una tolerancia del error numérico óptima para la utilización de este criterio, ya que no se observa una tendencia monótona de los resultados al establecer una tolerancia cada vez más exigente. Sin embargo, todas las simulaciones alcanzan un estado estadísticamente estacionario similar.

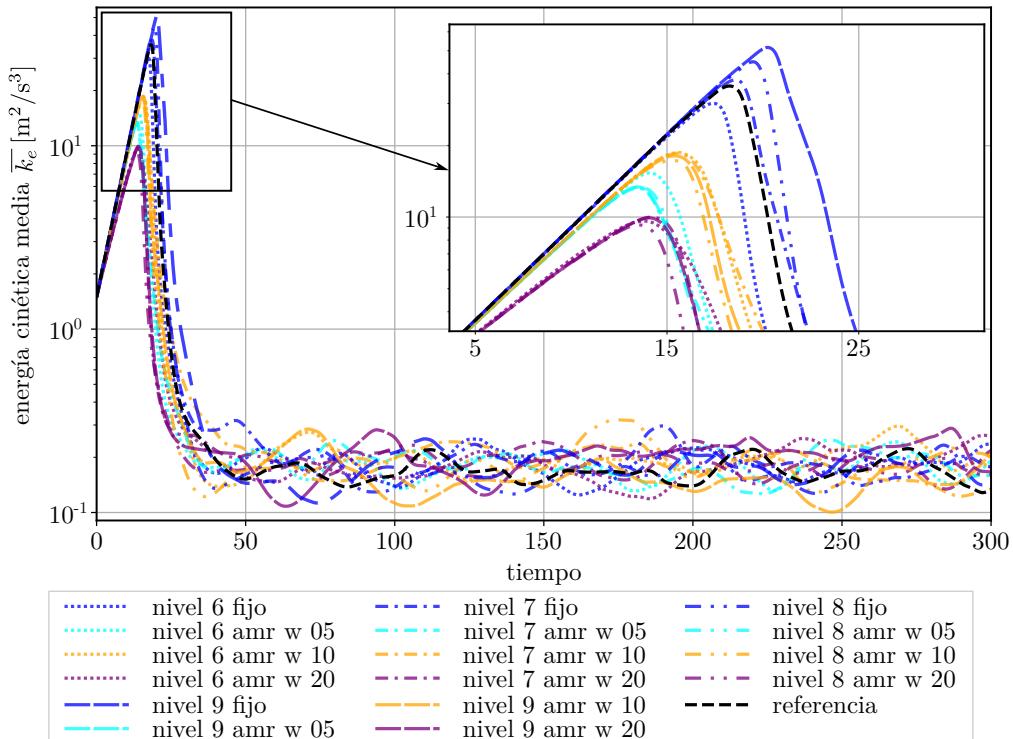


Figura 4: Evolución temporal de la energía cinética para distintos niveles de refinamiento, utilizando malla fija y el criterio `adapt_wavelet` con dos valores de umbral.

Al utilizar el refinamiento adaptativo `adapt_values`, se define $\Delta_r^{max} = 2$, de acuerdo con los lineamientos de [Pope \(2000\)](#) para simulaciones DNS. El valor mínimo se establece como $\Delta_r^{min} = \Delta_r^{max}/c$, donde c representa una fracción de Δ_r^{max} , tomando $c = 5$ y $c = 10$.

En la Fig. 5 se muestran los resultados obtenidos para niveles máximos de refinamiento 6, 7, 8 y 9 utilizando el criterio de refinamiento por *values* y los dos valores de Δ_r^{min} establecidos, junto con los resultados de las mallas fijas. Cada nivel de refinamiento está identificado por un tipo de línea diferente y se muestran con un mismo color las simulaciones que comparten el mismo criterio de malla. Se puede observar que las simulaciones realizadas con malla adaptativa subestiman el valor máximo de la energía cinética media, así como también el instante de ocurrencia, respecto de las mallas fijas para el mismo nivel de refinamiento. Las menores discrepancias respecto de la malla fija se observan para el nivel 7 de refinamiento. Al igual que en el refinamiento adaptativo por *wavelet*, por *values* también se observan valores óptimos para el rango de evaluación del criterio de refinamiento. En todos los casos, el sistema alcanza un estado estadísticamente estacionario a partir de los 60 s aprox., con valores medios similares.

En base a los resultados de las simulaciones realizadas con malla fija, se puede observar que al aumentar el nivel de refinamiento, se obtiene un mayor valor máximo de energía cinética media. Esto se debe a que el término de forzamiento lineal utilizado está directamente relacionado

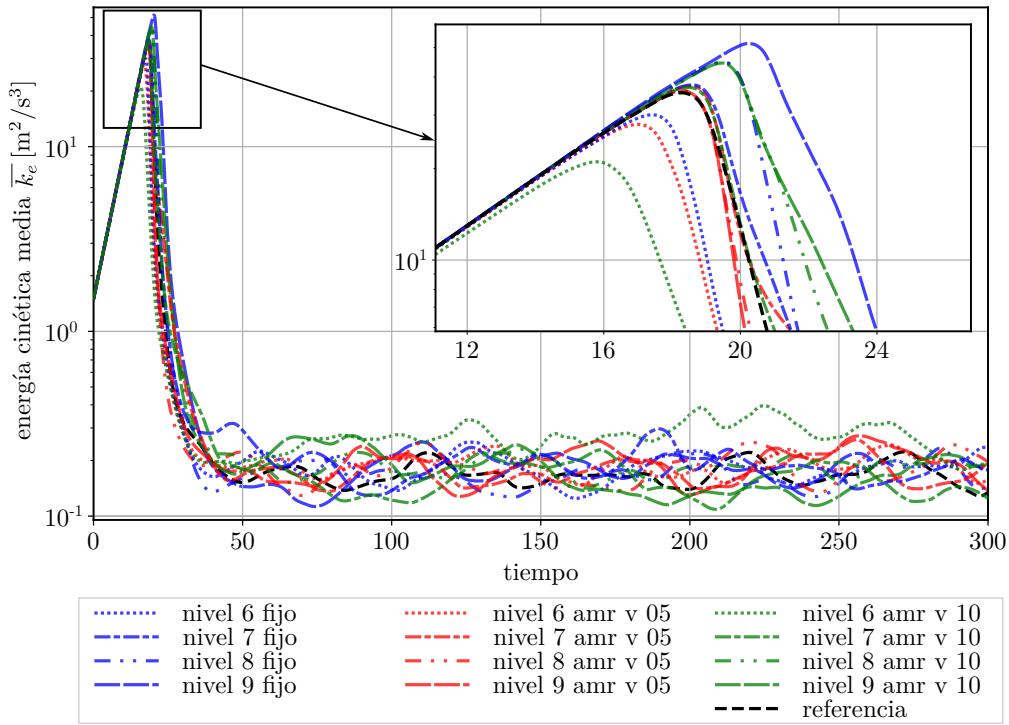


Figura 5: Evolución temporal de la energía cinética para distintos niveles de refinamiento, utilizando malla fija y el criterio `adapt_values` con dos valores de umbral.

con el valor de la velocidad en cada celda. Al variar el nivel de refinamiento, varía la resolución del campo de velocidad en el dominio, con lo cual, varía el forzamiento lineal introducido en cada punto para sostener la turbulencia. Motivo por el cual es esperable una variación en el valor máximo de la energía cinética media en función de la discretización espacial utilizada.

En la Fig. 6 se muestra la evolución temporal de la energía cinética media para todas las simulaciones realizadas con malla nivel 7: con malla uniforme, con refinamiento adaptativo por *wavelet* y por *values*, y se colocan los datos de referencia. Se puede ver que los resultados de las simulaciones utilizando el criterio de refinamiento por *values* presentan un mejor acuerdo, tanto respecto de la simulación propia realizada con malla fija como de la referencia disponible. Por contraparte, las simulaciones con criterio de *wavelet* subestiman el valor máximo de energía cinética y su instante de ocurrencia.

Como se ve, el criterio de refinamiento en función de la estimación local de la escala de Kolmogorov resulta adecuado para capturar con mayor precisión las variables de interés macroscópicas. Es decir, utilizar un criterio que reduce el error numérico local no garantiza que se resuelvan todas las escalas de flujo. Utilizar una métrica de refinamiento de malla basada en la relación entre el tamaño de la celda y la escala de Kolmogorov local estimada, permite un mejor control del balance entre la precisión y el costo computacional, brindando la posibilidad de establecer el rango de escalas resueltas deseado. Además, esta estrategia resulta de utilidad a la hora de evaluar flujos turbulentos transitorios, que presentan una gran amplitud de escalas en su evolución temporal, permitiendo adaptar el tamaño de malla al requerido según las estructuras más pequeñas presentes en cada instante.

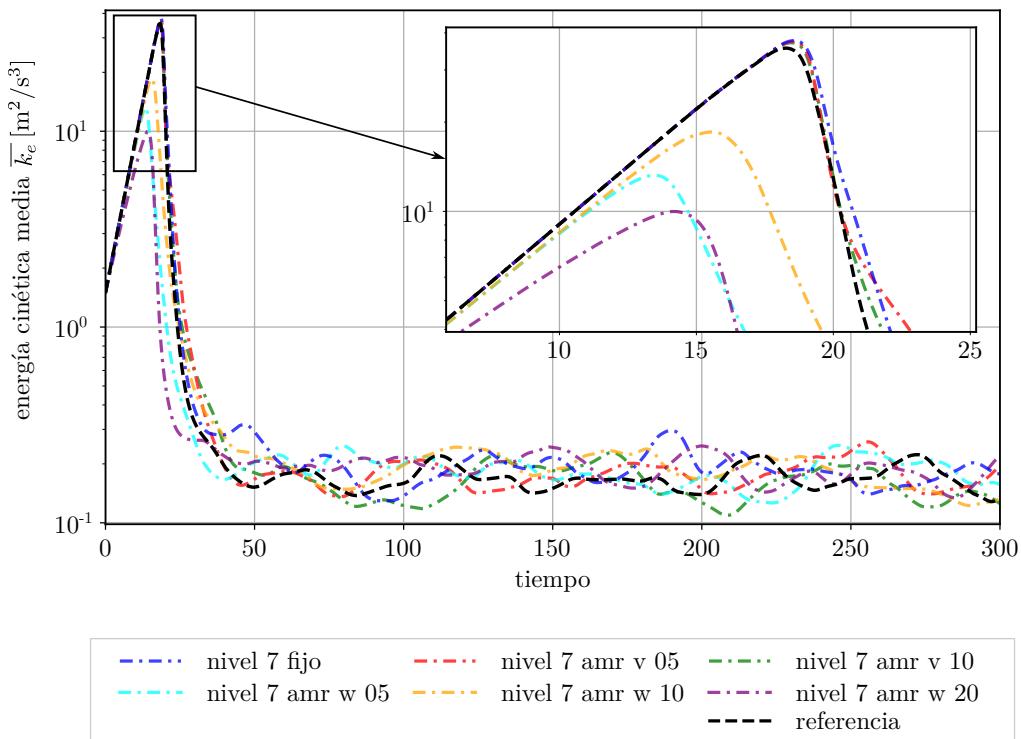


Figura 6: Evolución temporal de la energía cinética para malla nivel 7: comparación entre malla uniforme, malla adaptativa por `adapt_wavelet` y `adapt_values`, y referencia.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se observó que al utilizar estrategias de refinamiento adaptativo para reducir el costo computacional de simulaciones DNS, se debe tener en cuenta no solo el nivel máximo de refinamiento, sino también el criterio de refinamiento local a evaluar. En base al estudio realizado, para este tipo de problemas resulta conveniente utilizar el criterio de refinamiento adaptativo basado en una estimación local de la escala de Kolmogorov, es decir, en la estimación del tamaño de las escalas disipativas locales. Esto resulta de gran interés a la hora de analizar flujos turbulentos, ya que es una metodología que tiene en cuenta la física del problema, en contraste con solo considerar el error numérico como parámetro de refinamiento.

Como trabajo futuro, se pretende explorar el desempeño de estas herramientas en casos con mayor número de Reynolds, más cercanos a casos de turbulencia desarrollada y cuantificar otras métricas del flujo, como los tensores de esfuerzos turbulentos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a CONICET por el financiamiento de la Beca Interna Doctoral de Ma. Clara Cortizo Carbone, a la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación de la Provincia de Santa Fe y a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Rosario. El trabajo utilizó recursos computacionales del cluster Pirayu, adquirido con fondos de la Agencia Santafesina de Ciencia, Tecnología e Innovación, mediante el Proyecto AC-00010-18.

REFERENCIAS

Basilisk. Forced isotropic turbulence in a triply-periodic box. <http://www.basilisk.fr/src/examples/isotropic.c>, 2025. Accessed: 01/09/2025.

- Brunton S.L. Turbulence Closure Models: Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) and Large Eddy Simulations (LES). 2021a. <http://doi.org/10.52843/cassyni.cjkr7f>.
- Brunton S.L. What Is Turbulence? Turbulent Fluid Dynamics are Everywhere. 2021b. <http://doi.org/10.52843/cassyni.hrpvdf>.
- Cadieux F., Sun G., y Domaradzki J.A. Effects of numerical dissipation on the interpretation of simulation results in computational fluid dynamics. *Computers & Fluids*, 154:256–272, 2017. <http://doi.org/10.1016/j.compfluid.2017.06.009>.
- De Stefano G. y Vasilyev O.V. A fully adaptive wavelet-based approach to homogeneous turbulence simulation. *Journal of fluid mechanics*, 695:149–172, 2012. <http://doi.org/10.1017/jfm.2012.6>.
- Ims J. y Wang Z.J. A comparison of three error indicators for adaptive high-order large eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, 490:112312, 2023. <http://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112312>.
- Jeong J. y Hussain F. On the identification of a vortex. *Journal of fluid mechanics*, 285:69–94, 1995. <http://doi.org/10.1017/S0022112095000462>.
- Lagrée P.Y., Staron L., y Popinet S. The granular column collapse as a continuum: validity of a two-dimensional Navier–Stokes model with a μ (I)-rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, 686:378–408, 2011. <http://doi.org/10.1017/jfm.2011.335>.
- Moin P. y Chan W.H.R. *Fundamentals of Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2024.
- Offermans N., Massaro D., Peplinski A., y Schlatter P. Error-driven adaptive mesh refinement for unsteady turbulent flows in spectral-element simulations. *Computers & Fluids*, 251:105736, 2023. <http://doi.org/10.1016/j.compfluid.2022.105736>.
- Pairetti C.I. *Modelización de flujos turbulentos multifásicos aplicada al diseño de sistemas inyectores de nafta en motores de combustión interna*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Rosario, 2019.
- Podvigina O. y Pouquet A. On the non-linear stability of the 1: 1: 1 ABC flow. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 75:471–508, 1994. [http://doi.org/10.1016/0167-2789\(94\)00031-X](http://doi.org/10.1016/0167-2789(94)00031-X).
- Pope S.B. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000.
- Popinet S. Gerris: a tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 190(2), 2003. [http://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00298-5](http://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00298-5).
- Popinet S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics*, 228(16), 2009. <http://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.04.042>.
- Popinet S. The basilisk code: <http://basilisk.fr/>. 2014.
- Popinet S. A quadtree-adaptive multigrid solver for the Serre–Green–Naghdi equations. *Journal of Computational Physics*, 302:336–358, 2015. <http://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.09.009>.
- Rivière A. *Bubble deformation and fragmentation in turbulence*. Tesis de Doctorado, Université Paris sciences et lettres, 2024.
- Rosales C. y Meneveau C. Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence: Physical space implementations and convergence properties. *Physics of fluids*, 17(9), 2005. <http://doi.org/10.1063/1.2047568>.
- Sagaut P., Deck S., y Terracol M. *Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence*. Imperial College Press, 2006.
- Tennekes H. y Lumley J.L. *A first course in turbulence*. MIT press, 1972.
- Van Hooft J.A., Popinet S., Van Heerwaarden C.C., Van der Linden S.J.A., De Roode S.R., y Van de Wiel B.J.H. Towards adaptive grids for atmospheric boundary-layer simulations. *Boundary-layer Meteorology*, 2018. <http://doi.org/10.1007/s10546-018-0335-9>.