

## INFLUENCIA DE LAS PROPIEDADES TERMO-MECÁNICAS EN VIGUETAS PRETENSADAS SOMETIDAS A CICLOS DE TEMPERATURA

### INFLUENCE OF THERMO-MECHANICAL PROPERTIES ON PRE-STRESSED BEAMS SUBJECTED TO TEMPERATURE CYCLES

Gonzalo Ruano<sup>a,b</sup>, Virginia Quintana<sup>a,b</sup>, Daniela Scotta<sup>b</sup>, Marcelo Piován<sup>c</sup>

<sup>a</sup>INIQUI (CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avda. Bolivia 5159,  
4400 Salta, Argentina.

<sup>b</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de Salta, Campus Castañares, 4400 Salta, Argentina.

<sup>c</sup>Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, UTN Fac. Reg. Bahía Blanca, 11 de abril  
461, B8000LMI, Bahía Blanca, Argentina.

**Palabras clave:** Incertidumbre, Propiedades Termo-Mecánicas, Paramétrico, Ciclos  
Térmicos.

**Resumen.** Las viguetas pretensadas de hormigón son ampliamente usadas en la industria de la construcción y pueden estar sujetas a cargas extremas como es el caso de incendios. El hormigón es un material cuyo comportamiento es modificado por las altas temperaturas, incluyendo la máxima alcanzada y ultimadamente se reconoce la importancia de la rama descendente. En este trabajo la historia de las acciones externas se representa mediante un análisis termo-mecánico transitorio mediante el método de elementos finitos. El objetivo es mostrar paraméricamente la influencia estructural de considerar incertidumbre de las propiedades térmicas y mecánicas para estructuras pretensadas sometidas a ciclos de temperatura. Se presta especial atención a la influencia de la incertidumbre de las propiedades termo-mecánicas frente al enfriamiento de la estructura abordando el problema con un enfoque probabilístico paramétrico. Se consideran enfriamientos a diferentes tasas observando la respuesta mecánica obtenida. Además, se aplica el principio de entropía máxima para deducir las funciones de distribución de los parámetros considerados como variables aleatorias y aquellos sujetos a la información disponible.

**Keywords:** Uncertainty, Thermo-Mechanical Properties, Parametric Study, Thermal Cycles.

**Abstract.** Prestressed concrete beams are extensively used in the construction industry and may be exposed to extreme loads, such as those caused by building fires. Concrete is a material that evolves over time, particularly when exposed to high temperatures; it is sensitive to the highest temperature reached and nowadays the importance of the descending phase is recognized. This work employs the finite element method to model load histories using transient thermo-mechanical analysis. The objective is to capture, through a parametric probabilistic approach, the structural effects of uncertainties in the thermal and mechanical properties of prestressed beams subjected to thermal cycles. The descending branch is analyzed at various rates, and the mechanical response is evaluated. The maximum entropy principle is used to derive the probability density functions for the random parameters.

## 1 INTRODUCCIÓN

Actualmente el diseño de estructuras civiles considera situaciones extremas como los incendios (G. Ruano et al., 2018). Es una práctica generalizada realizar ensayos de temperatura en estructuras en las que se considera solamente la rama ascendente como por ejemplo (Foti, 2014). Poco se sabe del comportamiento material frente al descenso de temperaturas o ciclos de temperaturas. Todas las propiedades térmicas son función de la temperatura (Sha and Asadi, 2018) (Niels and Ristinmaa, 2005), de las condiciones de los ensayos y del material ensayado (Kodur et al., 2020).

Las fuentes de incertidumbre en estructuras civiles pueden ser variadas debidas a que no es posible un control total del proceso de manufactura (Tomar et al., 2018). Habitualmente se diseñan estructuras compuestas usando valores característicos y la significación de la incertidumbre en el análisis estructural es una extensión importante para los modelos actuales (Tomar et al., 2018). Actualmente el análisis y diseño computacional puede abordar sistemas ingenieriles más grandes, más complejos y realistas desde una óptica que considera la incertidumbre (Stefanou, 2009).

El presente trabajo busca considerar la incertidumbre de propiedades termo-mecánicas de viguetas pretensadas de hormigón en la respuesta estructural de estos elementos sometidos a acciones térmicas cíclicas.

## 2 CASO DE ESTUDIO

Se simula un ensayo realizado sobre viguetas de hormigón pretensado sometidas a alta temperatura ascendente. La modelación evolutiva de la puesta en tensión de los materiales acero y hormigón, la carga mecánica estática y la aplicación de una carga térmica ascendente puede consultarse en trabajos previos (Ruano et al., 2023) (Ruano and Piovan, 2023). La Figura 1(a) muestra las dimensiones transversales de la vigueta y la Figura 1(b) esquematiza una viga simplemente apoyada con carga mecánica estática uniforme y carga térmica uniforme que evoluciona en el tiempo. Para este trabajo la carga térmica corresponde a un ciclo en el que la temperatura asciende según lo registrado experimentalmente y luego desciende hasta temperatura ambiente.

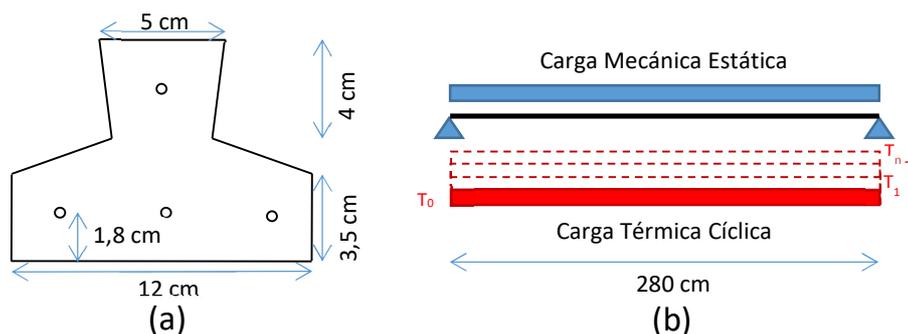


Figura 1. (a) Sección transversal. (b) Apoyos y Cargas.

Experimentalmente se tiene registro de temperaturas y flecha de la rama ascendente de temperatura para todos los ensayos (Foti, 2014) y no hay registro del enfriamiento. Solamente se sabe que al llegar a la temperatura objetivo se retiró la carga térmica y se dejó enfriar la vigueta. Es decir, experimentalmente no se registraron datos para el enfriamiento. El presente trabajo tiene como finalidad estudiar paramétricamente la influencia de la incertidumbre en la respuesta de viguetas sometidas a ciclos de temperatura teniendo en cuenta diferentes tasas de enfriamiento. Para esto se partió de la simulación del ensayo de térmico (Ruano et al., 2023) y

se agregó la rama descendente de temperaturas considerando un enfriamiento brusco realizado en 10 minutos y otro de 30 minutos de duración hasta alcanzar temperatura ambiente. Esto equivale a considerar la carga térmica de naturaleza determinista. Además, al no tener datos de carga térmica para ningún enfriamiento, se simularon numéricamente dos escenarios. Para esto se partió de un análisis estructural previo (Ruano et al., 2023) en el que se simula el problema de temperatura considerando que la vigueta dentro del horno está rodeada de aire que genera un entorno del tipo convectivo. La Figura 2(a) esquematiza la fuente de calor y las condiciones convectivas. En Figura 2(b) se observa la malla de elementos finitos en la que están resaltados mediante una cruz los nodos en los que se registraron experimentalmente las temperaturas y también las condiciones de borde. Este modelo térmico de la vigueta considera únicamente al hormigón y se expuso a las temperaturas registradas experimentalmente y luego de alcanzar la temperatura objetivo del ensayo se propusieron 2 ramas lineales de descenso de temperatura: una rápida de 10 y otra moderada de 30 minutos de duración en los puntos 3 y 4 de la Figura 2(b). Las temperaturas modeladas dentro del cuerpo de la vigueta fueron usadas en los estudios determinista y estocástico que se muestran en las siguientes secciones (puntos 5 y 6 cercanos a la superficie y 1 y 2 en correspondencia con la posición de la armadura, ver Figura 2(c) y (d)).

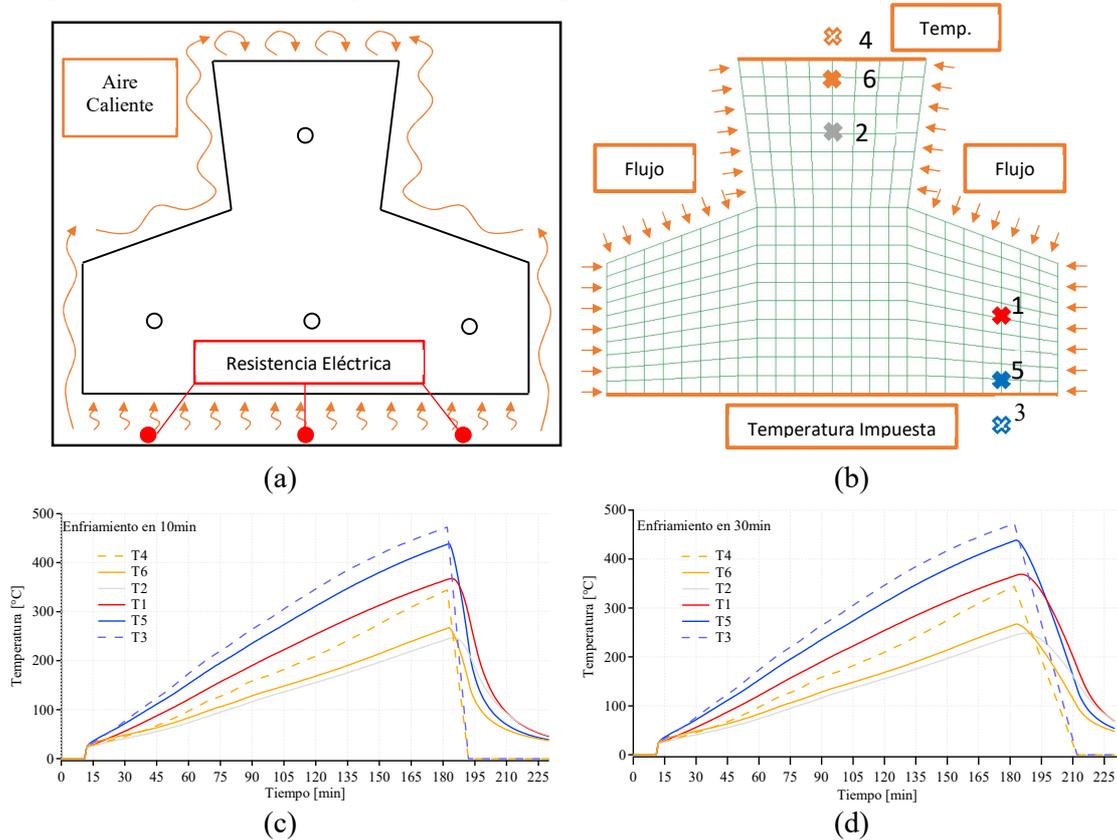


Figura 2. (a) Vigueta dentro del Horno y Fenómeno de Convección. (b) Malla de EF y Condiciones de Borde del problema térmico. (c) Carga Térmica Enfriamiento 10min. (d) Carga Térmica Enfriamiento 30min.

La etapa de calentamiento es de 173 minutos de duración. La parte superior de Figura 5 muestra la historia de temperatura que se impone para conseguir la respuesta cíclica y es el resultado de la simulación térmica descrita. La diferente tasa de descenso de temperaturas para ambos casos es evidente. En la referencia de temperaturas se observan la superficie inferior cercana a la fuente de calor “T5” y la superior “T6”; mientras que la posición de la armadura

inferior es designada como “T1” y la armadura superior como “T2”. Para la rama de calentamiento las temperaturas de la superficie son mayores a la de la armadura más cercana. Mientras que para la rama de enfriamiento la temperatura de la superficie queda levemente por debajo de la de la armadura para ambas tasas.

### 3 PROPIEDADES MECÁNICAS Y TERMO MECÁNICAS ANALIZADAS

Previamente se analizó la influencia de algunas propiedades térmicas y mecánicas para viguetas sometidas a carga térmica ascendente (Ruano and Piovan, 2023). De considerar la Carga de Pretensado, el Módulo de Elasticidad del Acero, El Módulo de Elasticidad del Hormigón, la Tensión Máxima del Acero y el Coeficiente de Expansión Térmica del Hormigón se concluyó que la influencia de esta última propiedad es la que tiene efecto notorio. Es así que, en el presente trabajo, se tendrá en cuenta esta propiedad que además evoluciona con la temperatura.

**Coefficiente de expansión térmica del hormigón:** esta propiedad relaciona los problemas térmicos con el mecánico. No es constante, sino que depende de la temperatura. Esta propiedad es estrictamente positiva (Möller, 2019), por lo que se supone una distribución log normal. Se consideró un coeficiente de variación de 0,1. Además, se supone un comportamiento reversible ante ciclos de aumento y disminución de la temperatura. La Figura 3(abajo) muestra las propiedades mecánicas y térmicas dependientes de la temperatura y la Figura 3(arriba) el cambio del coeficiente de expansión térmica del hormigón en función de la temperatura que es tratado como variable aleatoria.

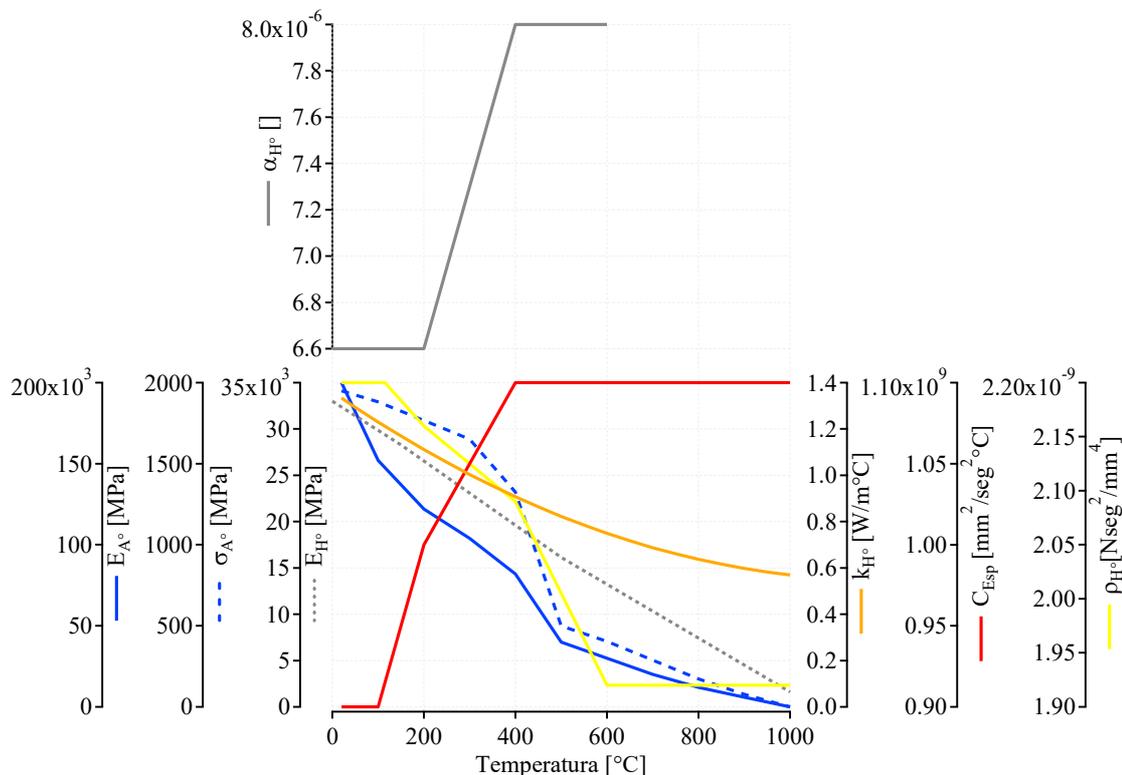


Figura 3. Coeficiente de Expansión Térmica (arriba). Propiedades mecánicas (izquierda) y térmicas (derecha).

### 4 MODELO DETERMINISTA

Las ecuaciones de balance térmico y mecánico que gobiernan el problema pueden

aproximarse como:

$$\begin{cases} \rho c_k \dot{\theta} - k \nabla_x^2 \theta = r \\ \rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $c_k$  el calor específico por unidad de masa,  $v_i$  la velocidad y  $b_i$  las fuerzas volumétricas. En (1) los coeficientes  $\rho$ ,  $c_k$  y  $k$  son funciones de la temperatura por lo que la ecuación de balance de calor es no lineal.

Se plantea una solución desacoplada del problema (*stagger*). En cada incremento de tiempo, se resuelve, en primer lugar, el problema térmico y, luego, considerando constantes los valores de temperatura, se resuelve el problema mecánico.

Para el hormigón se utiliza el modelo de daño plástico modificado, (Luccioni et al., 2003) que permite simular el comportamiento de materiales friccionales del tipo hormigón sometidos a temperatura. Este modelo se deriva como una generalización de la teoría clásica de la plasticidad (Luccioni et al., 1996) al que se le introduce una nueva variable interna, la variable de daño térmico, que representa una medida del deterioro que se observa en las propiedades mecánicas del hormigón sometido a temperaturas elevadas (Luccioni et al., 2003).

El modelo está basado en la hipótesis de la elasticidad desacoplada (Lublimer, 1972). La energía libre puede suponerse formada por dos partes independientes: una parte elástica y una parte plástica-daño térmico (Ulm, F. J.; Acker, P.; Lévy, 1999):

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e, \kappa^p, \xi, \theta) = \Psi^e(\varepsilon_{ij}^e, \xi, \theta) + \Psi^{qp}(\kappa^p, \xi, \theta) \quad (2)$$

donde  $\Psi$  es la densidad de energía libre por unidad de volumen,  $\Psi^e$  es la densidad de energía libre por unidad de volumen termo-elástica,  $\Psi^{qp}$  es la densidad de energía por unidad de volumen termo-dañada,  $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p$  es el tensor de deformaciones elásticas,  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor de deformaciones,  $\varepsilon_{ij}^p$  es el tensor de deformaciones inelásticas o permanentes,  $\theta$  una medida de la temperatura y  $\kappa^p$  es la variable de endurecimiento plástico isótropo.  $\xi$  es una variable interna que depende de la historia térmica. Se la denomina variable de daño térmico porque representa una medida del deterioro producido por las altas temperaturas. Es una variable adimensional que teóricamente puede variar entre  $\xi = 0$  cuando el material no presenta ninguna alteración por efecto de la temperatura y  $\xi_{max}$  cuando alcanza la máxima alteración. El caso extremo  $\xi_{max} = 1$  correspondería a un material que ha perdido completamente la rigidez. En la práctica  $\xi_{max} < 1$ . Como  $\xi$  está relacionado con la historia térmica, como simplificación, se utiliza esta misma variable interna para describir la variación de las propiedades térmicas.

El tensor de acoplamiento termo-elástico que representa la tensión por unidad de temperatura inducida por la dilatación térmica restringida es

$$\beta_{ij}(\xi, \theta) = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial \varepsilon_{ij}^e} = C_{ijkl}^s(\xi) \alpha_{kl}(\theta) \quad (3)$$

Donde  $\alpha_{kl}(\theta)$  representa el tensor de dilatación térmica que en el caso isótropo se escribe como  $\alpha_{kl} = \alpha \delta_{kl}$ . Se considera que  $\alpha_{kl}$  es función explícita y reversible de la temperatura.

De acuerdo a los resultados encontrados en la bibliografía, el proceso de daño térmico es varios órdenes de magnitud más rápido que el proceso de conducción del calor en estructuras de hormigón. Esto permite definir al daño térmico como una función explícita e irreversible de la temperatura máxima alcanzada durante toda la historia térmica del material (Luccioni et al., 2003). La evolución del daño térmico puede ser obtenida indirectamente a través de los efectos del daño térmico en la rigidez elástica o en la resistencia. Suponiendo que la relación entre el módulo elástico degradado y el inicial es proporcional al daño térmico, lo cual es una propiedad

intrínseca de los materiales de base cementícea (Ulm, F. J.; Acker, P.; Lévy, 1999), se pueden utilizar las curvas experimentales de variación del módulo elástico longitudinal con la temperatura para encontrar dicha función. En este caso dicha función resulta:

$$\xi(\theta_{max}) = 1 - \frac{E(\theta_{max})}{E_0} \quad (4)$$

Donde  $E_0$  es el módulo elástico longitudinal inicial, a temperatura ambiente y  $E(\theta_{max})$  el módulo elástico longitudinal luego de la exposición a la temperatura máxima  $\theta_{max}$ .

El límite del comportamiento elástico se describe a través de una función de fluencia que depende de la variable de daño plástico  $\kappa^p$  y del daño térmico  $\xi$ :

$$F(\sigma_{ij}; \kappa^p; \xi) = f(\sigma_{ij}) - K(\sigma_{ij}; \kappa^p; \xi) \leq 0 \quad (5)$$

donde  $f(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente definida en el espacio de tensiones.  $K(\sigma_{ij}; \kappa^p; \xi)$  es el umbral de fluencia,  $\kappa^p$  es la variable de daño plástico o variable de endurecimiento isótropo y  $\xi$  el daño térmico. En este trabajo se utiliza el criterio de Lubliner-Oller modificado (Luccioni and Rougier, 2005) con meridianos curvos.

Se trabajó con el método de elementos finitos. Se utilizaron elementos rectangulares de 4 nodos con 4 puntos de Gauss en estado plano de tensiones. La malla utilizada corresponde a 4572 elementos agrupados en 9 fajas de materiales compuestos que tienen espesores variables para representar la sección transversal de la vigueta Figura 4(a y b). Los espesores mostrados en Figura 4(b) corresponden al promedio de la altura del elemento rectangular. Se trabaja con teoría de mezclas de sustancias (Truesdell, C.; Toupin, 1960), la cual considera que todos los materiales poseen la misma deformación específica. El proceso constructivo de las viguetas provoca que el material acero no posea la misma deformación que el hormigón y esto se tiene en cuenta mediante un esquema que preserve las deformaciones de la etapa de pretensado (Gonzalo Ruano et al., 2018).

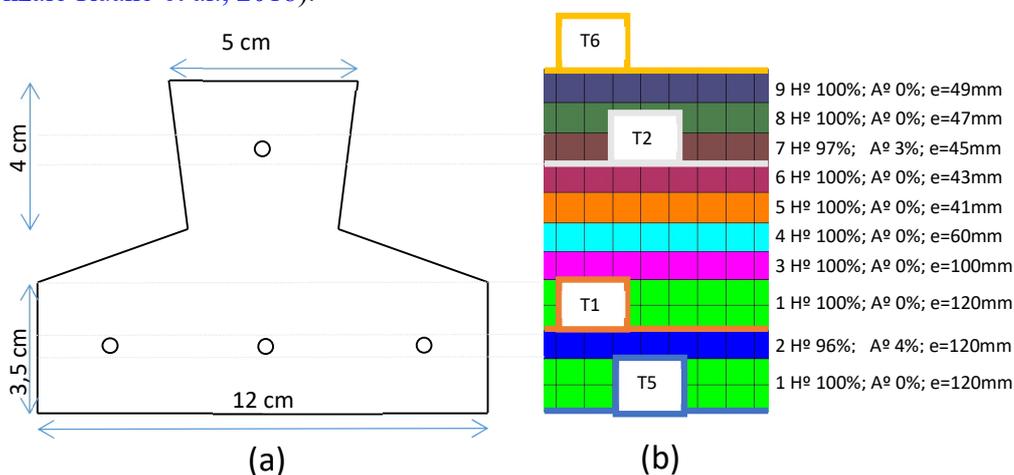


Figura 4. Malla de Elementos Finitos. (a) Sección transversal. (b) Materiales Compuestos.

La estructura modelada considera una carga mecánica correspondiente al peso propio y la sollicitación más importante es la debida a la carga térmica cíclica. Se realiza una modelación termo-mecánica de la estructura. La carga térmica aplicada es la que corresponde al análisis térmico mediante elementos finitos de la historia de temperaturas dentro de una sección transversal de las viguetas descrito en la sección 2. Así se puede ver en Figura 4(b) las indicaciones de “T1”, “T2”, “T5” y “T6” que corresponden a la posición donde

experimentalmente se encontraban termocuplas que midieron temperaturas que fueron aplicadas imponiendo temperatura cíclica que evoluciona en el tiempo como se describió anteriormente.

## 5 MODELO ESTOCÁSTICO

Las variables aleatorias se representan mediante funciones de distribución de probabilidades que se obtienen haciendo uso del Principio de Máxima Entropía (PME) (Giorgio and Piovan, 2019) y la información disponible (Piovan and Sampaio, 2015) o restricciones impuestas (Martín et al., 2021). En este trabajo se estudian los efectos mecánicos de la incertidumbre del coeficiente de dilatación térmica del hormigón. Se asume que la variable aleatoria es independiente de las demás propiedades que se mantienen en los valores deterministas. La construcción del modelo estocástico es la descrita en (Sampaio, Rubens; Lima, 2003) y se utiliza el método de Monte Carlo y como variable aleatoria el coeficiente de expansión térmica del hormigón. El estudio de la convergencia se realizó con la siguiente expresión (Campos et al., 2018)

$$Conv(N_{MC}) = \sqrt{\frac{1}{N_{MC}} \sum_{j=1}^{N_{MC}} \|\hat{T}_j - T\|^2} \quad (6)$$

## 6 RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados numéricos alcanzados del modelo determinista y estocástico para los enfriamientos en 10 minutos (Figura 5(a)) y en 30 minutos (Figura 5(b)).

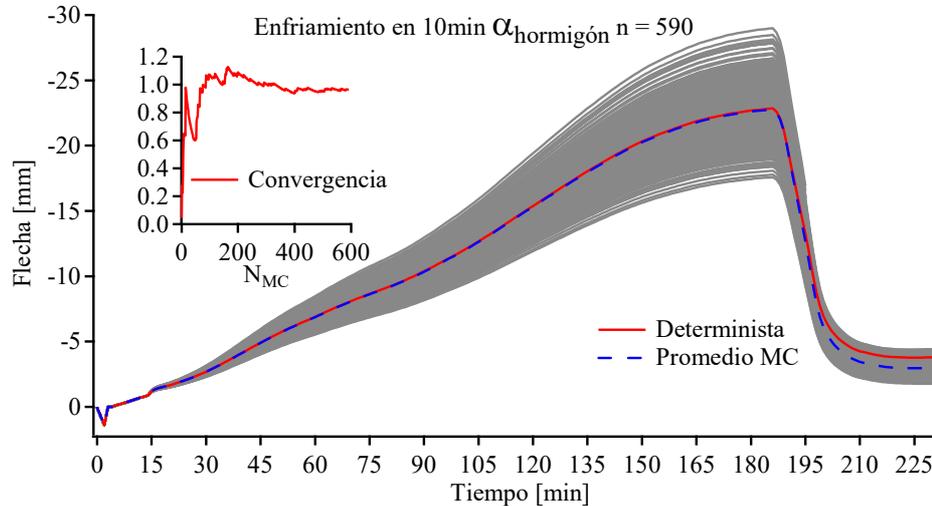
La Figura 5 muestra la evolución de la flecha de la viga causada por la carga térmica. Tanto las simulaciones deterministas como las del estudio paramétrico muestran diferente comportamiento. La simulación determinista de 10min de enfriamiento tiene una flecha residual que se mantiene para los minutos finales de la simulación. Por su parte el enfriamiento en 30min prácticamente no presenta flecha residual. En cuanto a los resultados estocásticos el calentamiento provoca una amplitud de resultados cuyo rango crece a medida que se alcanzan las mayores temperaturas. Para los enfriamientos considerados las respuestas cambian. El enfriamiento rápido tiene al final de la simulación un rango notorio de respuestas estocásticas y contrariamente el enfriamiento más lento se concentra en un valor cercano a flecha cero. Además, el valor promedio de la flecha de las simulaciones estocásticas para el enfriamiento rápido está por debajo de la flecha determinista. Esto no sucede para el enfriamiento lento que converge a un valor compartido por todas las simulaciones. Se muestra inserto en el gráfico del enfriamiento rápido el estudio de convergencia de la flecha para el instante final.

## 7 CONCLUSIONES

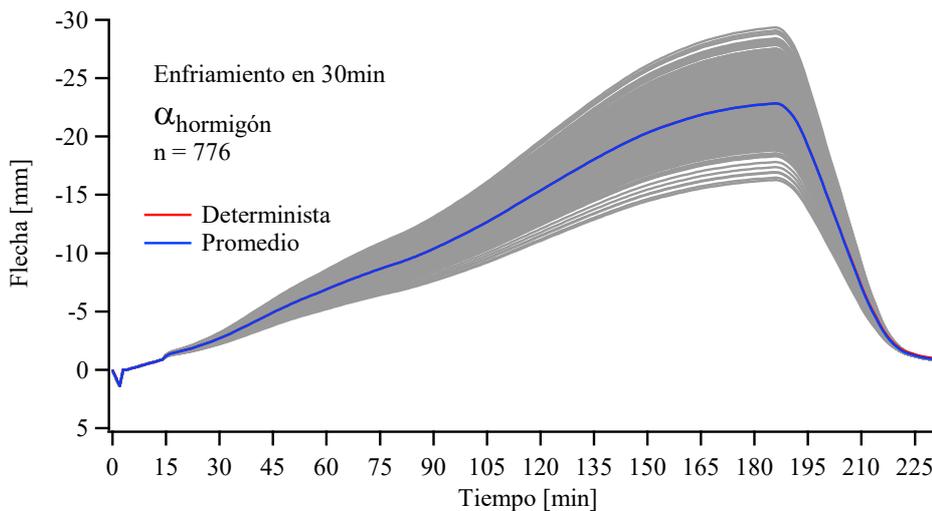
El presente trabajo muestra los resultados numéricos del enfoque probabilístico paramétrico de viguetas pretensadas sometidas a cargas cíclicas de temperatura. Se consideraron 2 tasas de enfriamiento, una de 10 minutos de duración y otra de 30 minutos. Solamente se dispone de datos experimentales correspondientes a la rama de temperaturas ascendentes y para la etapa de descenso de temperatura se recurrió a una simulación térmica de la sección transversal de la viga que posteriormente se usó para describir el ciclo de ascenso y descenso de temperatura de la simulación termo-mecánica.

Los resultados muestran que considerar incertidumbre en el coeficiente de expansión térmica del hormigón influencia en las respuestas obtenidas mediante el estudio paramétrico para los dos casos de carga térmica considerados. Para el calentamiento la influencia del coeficiente de expansión es mayor a medida que aumenta la temperatura. Para el enfriamiento rápido este

parámetro provoca un rango de respuestas mientras que para el enfriamiento lento la respuesta converge a un valor para todas las simulaciones.



(a)



(b)

Figura 5. Resultados numéricos. (a) Enfriamiento en 10 minutos. (b) Enfriamiento en 30 minutos.

## 8 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico brindado mediante los proyectos UCASAL Res. Rec. N°1248/2.022 “Relevamiento de fibras naturales en hormigón para caracterización estocástica”, y PICT-2021-I-INVI-00172 “Diseño e implementación de métodos de medición para la caracterización de las propiedades térmicas de hormigón expuesto a altas temperaturas”.

## REFERENCIAS

Campos DF, Keil GG and Piovan MT (2018) Cuantificación de incertidumbre paramétrica asociada al galloping en cables de transmisión de electricidad. *Mecánica Computacional*

- XXXVI: 651–660.
- Foti D (2014) Prestressed slab beams subjected to high temperatures. *Composites Part B: Engineering* 58. Elsevier Ltd: 242–250.
- Giorgio LE Di and Piovan MT (2019) Aspectos de incertidumbre en la dinámica de metaestructuras piezoeléctricas curvas. *Mecánica Computacional* XXXVII: 629–637.
- Kodur VKR, Banerji S and Solhmirzaei R (2020) Test methods for characterizing concrete properties at elevated temperature. *Fire and Materials* 44(3): 381–395.
- Lubliner J (1972) On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Mechanics. *Int. Journal Non Linear Mechanics* 7: 237–254.
- Luccioni B, Oller S and Danesi R (1996) Coupled plastic-damaged model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129(1–2): 81–89.
- Luccioni BM and Rougier VC (2005) A plastic damage approach for confined concrete. *Computers and Structures* 83(27): 2238–2256.
- Luccioni BM, Figueroa MI and Danesi RF (2003) Thermo-mechanic model for concrete exposed to elevated temperatures. *Engineering Structures* 25(6): 729–742.
- Martín HD, Martín N, Pereson MN, et al. (2021) MÉTODOS PROBABILÍSTICOS PARA EL ESTUDIO DE VIBRACIONES LIBRES DE ENTRAMADOS PLANOS CON PARÁMETROS INCIERTOS. *Mecánica Computacional* XXXVIII: 531–539.
- Möller O (2019) *Confiabilidad de Estructuras*.
- Niels MO and Ristinmaa (2005) *The Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier. Available at: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780080446066X50000>.
- Piovan MT and Sampaio R (2015) Parametric and non-parametric probabilistic approaches in the mechanics of thin-walled composite curved beams. *Thin-Walled Structures* 90. Elsevier: 95–106.
- Ruano G and Piovan M (2023) ESTUDIO PARAMÉTRICO DE LA INFLUENCIA DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS EN VIGUETAS PRETENSADAS SOMETIDAS A ENSAYOS DE ALTA TEMPERATURA. XL: 383–390.
- Ruano Gonzalo, Nallim L and Oller S (2018) Simulación Termo-Mecánica de Estructuras de Hormigón Pre-Comprimido con Armadura Pre-Tesa. *Mecánica Computacional* 36(30): 1449–1463.
- Ruano G., Isla F, Luccioni B, et al. (2018) Steel fibers pull-out after exposure to high temperatures and its contribution to the residual mechanical behavior of high strength concrete. *Construction and Building Materials* 163.
- Ruano G, Quintana V, Lascala A, et al. (2023) Simulación termo mecánica de viguetas pretensadas sometidas a alta temperatura. XL: 6–9.
- Sampaio, Rubens; Lima R (2003) *MODELAGEM ESTOCÁSTICA E GERACÃO DE AMOSTRAS DE VARIÁVEIS E VETORES ALEATÓRIOS*.
- Sha P and Asadi I (2018) Concrete as a thermal mass material for building applications - A review. 19(April): 14–25.
- Stefanou G (2009) The stochastic finite element method: Past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198(9–12): 1031–1051.
- Tomar SS, Zafar S, Talha M, et al. (2018) State of the art of composite structures in non-deterministic framework: A review. *Thin-Walled Structures* 132(July). Elsevier Ltd: 700–716.
- Truesdell, C.; Toupin R (1960) *The Classical Field Theories. Handbuch Der Physik*.
- Ulm, F. J.; Acker, P.; Lévy M (1999) The Channel Fire II: Analysis of Concrete Damage. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics* 125(3): 283–289.