

ANÁLISIS DINÁMICO DE UNA ESTRUCTURA TIPO DOMO BAJO EXCITACIÓN ARMÓNICA

DYNAMIC ANALYSIS OF A DOME-TYPE STRUCTURE UNDER HARMONIC EXCITATION

Sofía A. Luna^a, Franco E. Dotti^{a,b}, Sebastián Machado^{a,b}

^a*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, gimap@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET, Argentina*

Palabras clave: Domo geodésico, dinámica no lineal, mecánica lagrangiana.

Resumen. Se presenta un modelo matemático para el estudio de la dinámica de una estructura espacial tipo domo, construido a partir de barras rectas conectadas en una configuración geodésica. La formulación se basa en un enfoque lagrangiano, en el cual se considera la masa concentrada en los nodos a la hora de definir la energía cinética, mientras que la energía de deformación elástica de las barras representa la fuente de energía potencial. Se analiza la respuesta del sistema ante excitaciones armónicas, modeladas como cargas aplicadas sobre los nodos. Se muestra evidencia de comportamiento no lineal cuando la estructura se aparta de una configuración simétrica. Si bien el estudio se encuentra en una etapa preliminar, los resultados numéricos sugieren la posibilidad de una dinámica rica y compleja, que se explora mediante herramientas clásicas del análisis no lineal, como planos de fase y puntos de Poincaré. Se discute el potencial de este tipo de modelos reducidos para el estudio de identificación de daño estructural localizado.

Keywords: Geodesic dome, nonlinear dynamics, Lagrangian mechanics.

Abstract. A mathematical model is presented for studying the dynamics of a spatial dome-type structure, composed of straight bars connected in a geodesic configuration. The formulation is based on a Lagrangian approach, in which the mass is assumed to be concentrated at the nodes when defining the kinetic energy, while the elastic strain energy of the bars represents the source of potential energy. The response of the system to harmonic excitations, modeled as loads applied to the nodes, is analyzed. Evidence of nonlinear behavior is observed when the structure departs from a symmetric configuration. Although the study is still at a preliminary stage, the numerical results suggest the possibility of a rich and complex dynamics, explored through classical tools of nonlinear analysis such as phase planes and Poincaré sections. The potential of this type of reduced models for the study of localized structural damage identification is also discussed.

1 INTRODUCCIÓN

Los domos constituyen un caso interesante dentro de las estructuras reticuladas tridimensionales, debido a su capacidad de cubrir grandes luces con un empleo eficiente de material. Su geometría geodésica con barras rectas interconectadas les confiere alta rigidez y excelente relación peso/resistencia. No obstante, estas mismas características los hacen susceptibles a comportamientos no lineales, que pueden manifestarse de manera inesperada. Entre ellos, los más estudiados han sido las inestabilidades por pandeo (Budiansky y Roth, 1962) y fenómenos de *snap-through*, donde una pequeña variación de carga puede inducir saltos abruptos hacia configuraciones invertidas (Plaut, 1991; Gioncu, 1995). En contraste, su respuesta dinámica ha recibido menor atención, pese a que el análisis de vibraciones no lineales puede ser fundamental para establecer márgenes de estabilidad o para aplicaciones en identificación de daño y monitoreo estructural (Gattulli y Paolone, 1997; Guan et al, 2018).

La formulación lagrangiana resulta particularmente adecuada para el estudio de este tipo de estructuras, ya que permite construir de manera compacta las ecuaciones de movimiento a partir de funciones de energía (Goldstein, 1994). Comparado con el método de elementos finitos, cuyo fundamento se apoya en la resolución aproximada de las ecuaciones de elasticidad, el enfoque lagrangiano permite formular directamente las ecuaciones de movimiento en términos de coordenadas generalizadas. Esto ofrece una vía más directa y transparente para estructuras tipo armadura, ya que se obtiene de manera inmediata un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, conservando generalidad respecto de la geometría y la conectividad de la estructura (Virgin, 2007).

En el presente trabajo se emplea el formalismo lagrangiano para modelar la dinámica de una estructura tipo domo geodésico sometida a cargas armónicas externas. Se analizan aspectos vinculados a la respuesta no lineal y a la sensibilidad del sistema frente a la frecuencia de forzamiento, explorando así la riqueza dinámica que caracteriza a estas configuraciones estructurales (Guan et al, 2018; Guan y Virgin, 2018). Los conceptos teóricos del modelo matemático que se describe se plantean de manera general. No obstante, se pretende que la estructura de la Figura 1 sirva como referencia al lector a modo de ejemplo y para facilitar la comprensión de dichos conceptos. Esta estructura en particular ha sido analizada por Coan y Plaut (1983) y Guan et al (2018), entre otros autores.

2 MODELO MATEMÁTICO

2.1 Ecuaciones de Lagrange

Se considera una estructura reticulada espacial tipo domo con n nodos o puntos de unión de las barras, los cuales se consideran articulados. De estos n nodos, $n_{mov} < n$ pueden desplazarse en las tres direcciones espaciales x , y y z . Así, se necesitan $3n_{mov}$ variables para describir el movimiento, las cuales resultan ser simplemente los desplazamientos en cada dirección para cada nodo. Estas son las *coordenadas generalizadas* y vienen dadas por

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3i-2}(t), q_{3i-1}(t), q_{3i}(t), \dots, q_{3n_{mov}}(t)]^T, \quad (1)$$

donde $q_{3i02}(t)$, $q_{3i01}(t)$ y $q_{3i}(t)$ son los desplazamientos del nodo i en las direcciones x , y y z , respectivamente. Las variables q_j representan en definitiva los grados de libertad (*gdl*) del sistema. En el caso del ejemplo de la Figura 1, se cuenta con $n = 13$, $n_{mov} = 7$ y $3n_{mov} = 21$ coordenadas generalizadas o *gdl*.

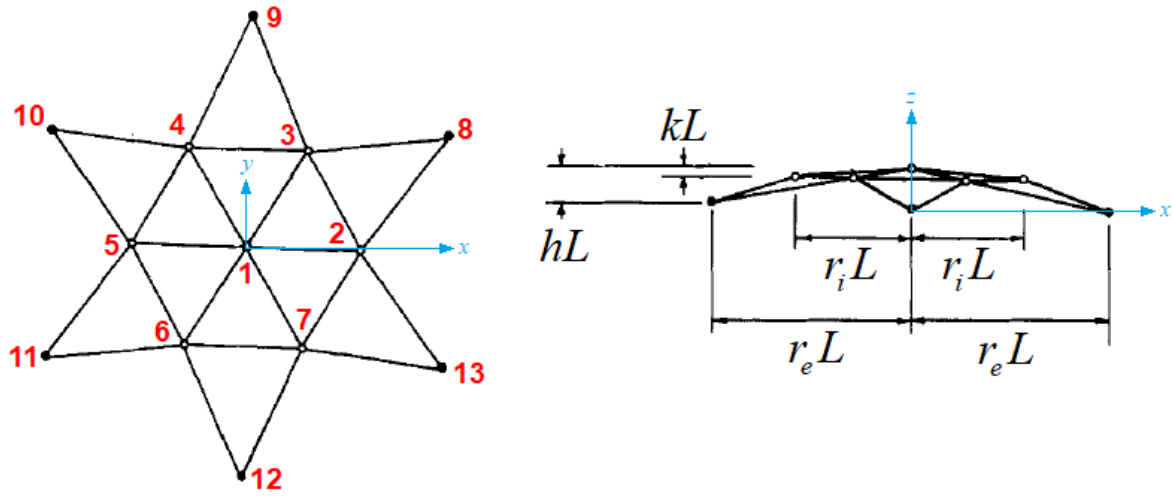


Figura 1. Ejemplo de estructura tipo domo geodésico.

Dado el lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, donde T y V respectivamente las energías cinética y potencial totales de la estructura, se definen las ecuaciones de la mecánica lagrangiana como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{dq_j} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dq_j} = Q_j^{\text{ext}} - Q_j^{\text{dis}}, \quad (2)$$

Como fuerzas externas aplicadas, $Q_j^{\text{ext}}(t)$, puede incluirse el peso propio y, en general, cualquier otra carga externa estática y dinámica. $Q_j^{\text{dis}}(t)$ corresponde a fuerzas disipativas por amortiguamiento viscoso. Desarrollando (2) se obtienen $3\dot{\mathbf{y}}_{\text{mov}}$ ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, cada una asociada a cada *gdl* del sistema. Estas se expresan como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \nabla_{\mathbf{q}}V(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{Q}^{\text{ext}}, \quad (3)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa del sistema, \mathbf{C} la matriz de amortiguamiento, \mathbf{Q}^{ext} el vector de fuerzas externas y $\nabla_{\mathbf{q}}V(\mathbf{q}(t))$, el gradiente de V respecto a las coordenadas generalizadas.

2.2 Energía potencial

Se asume que la energía potencial que contribuye en el sistema es aquella asociada a las elongaciones de las barras, esto es, la energía potencial elástica. Así

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{E_j A_j \Delta L_j(t)}{L_j^0}, \quad (4)$$

siendo E el módulo de elasticidad del material, A el área de la sección transversal y m , el número total de barras. Se define L_j^0 como la *longitud no deformada* de la barra j y $\Delta L_j(t)$ como su elongación. L_j^0 en general es diferente para cada barra, por lo que debe obtenerse a partir de la posición inicial de sus dos nodos. Para un nodo cualquiera i , su vector de posición inicial se denota como \mathbf{r}_i^0 . Así, si una barra j conecta el nodo a_j con el nodo b_j , con $j = 1, 2, \dots, m$, entonces el vector que une los extremos de dicha barra estará dado por

$$\mathbf{v}_j^0 = \mathbf{r}_{b_j}^0 - \mathbf{r}_{a_j}^0, \quad (5)$$

y en consecuencia puede definirse la longitud inicial o no deformada de esa barra j como

$$L_j^0 = \|\mathbf{v}_j^0\| = \|\mathbf{r}_{b_j}^0 - \mathbf{r}_{a_j}^0\|. \quad (6)$$

Por su parte, la elongación de una barra j se expresa como

$$\Delta L_j(t) = L_j(t) - L_j^0, \quad (7)$$

donde $L_j(t)$ a la *longitud deformada* de la barra. Esta puede depender de t , debido a la posibilidad de considerar cargas dinámicas y su expresión se obtiene de forma similar a la de L_j^0 . Así, para un nodo i , su vector posición luego de la aplicación de acciones externas es

$$\mathbf{r}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_i^0 + \mathbf{u}_i(t) & i \text{ es nodo móvil} \\ \mathbf{r}_i^0 & i \text{ es nodo fijo} \end{cases}, \quad (8)$$

donde $\mathbf{u}_i(t)$ es el vector desplazamiento del nodo i , dado por $\mathbf{u}_i = [u_i(t), v_i(t), w_i(t)]^T = [q_{3i02}(t), q_{3i01}(t), q_{3i}(t)]^T$. Entonces, si una barra j conecta el nodo a_j con el nodo b_j , entonces el vector que une los extremos de dicha barra en el estado deformado estará dado por

$$\mathbf{v}_j(t) = \mathbf{r}_{b_j}(t) - \mathbf{r}_{a_j}(t), \quad (9)$$

y en consecuencia la longitud de esa barra j en la configuración deformada se define como

$$L_j(t) = \|\mathbf{v}_j(t)\| = \|\mathbf{r}_{b_j}(t) - \mathbf{r}_{a_j}(t)\|. \quad (10)$$

Es importante notar que las elongaciones (7) son funciones no lineales de las coordenadas generalizadas, lo cual introduce no linealidad en la formulación. Tal característica puede deducirse de (10), dado que al calcular el módulo del vector $\mathbf{v}_j(t)$, se eleva al cuadrado y se toma raíz cuadrada de funciones que dependen de los desplazamientos.

2.3 Energía cinética

Se asume que la energía cinética total del sistema es la suma de las energías cinéticas de los nodos móviles, donde se consideran masas concentradas. Para una barra j , su masa será

$$m_j = \rho_j A_j L_j^0, \quad (11)$$

siendo ρ la densidad del material. La masa total asignada a cada nodo se obtiene repartiendo la masa de las barras adyacentes a dicho nodo. Así, la masa considerada en el nodo i será

$$M_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{barras } j \\ \text{unidas a } i}} m_j, \quad (12)$$

pudiendo la energía cinética total de la estructura definirse como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \|\dot{\mathbf{u}}_i\|^2, \quad (13)$$

donde las dos posibilidades para definir T se deben a que $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{u}}_i$, en virtud de (8).

2.4 Fuerzas externas

En general, cada componente de $\mathbf{q}(t)$ puede estar afectado por fuerzas externas, la cuales se agrupan en el vector $\mathbf{Q}^{ext}(t)$, definido como

$$\mathbf{Q}^{ext}(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_{3i-2}(t), f_{3i-1}(t), f_{3i}(t), \dots, f_{3n_{mov}}(t)]^T. \quad (14)$$

Este vector puede incluir en general cualquier fuerza constante o dependiente del tiempo.

2.5 Fuerzas disipativas y coeficiente de fricción

Se considera el efecto del amortiguamiento propio de la estructura de manera simplificada. Se asume que la fricción es igual para todos los nodos y en todas las direcciones cartesianas. Se consideran fuerzas disipativas de tipo viscoso y lineal con la velocidad. Estas fuerzas se agrupan en un vector $\mathbf{Q}^{dis}(t)$, cuyos elementos están dados por

$$Q_j^{dis}(t) = -c_0 \dot{q}(t), \quad (15)$$

donde c_0 es el coeficiente de amortiguamiento. La estimación de c_0 se realiza comparando las magnitudes de las fuerzas elásticas y las fuerzas disipativas, asumiendo que las segundas son un porcentaje menor de las primeras. Esto se hace de forma práctica, alcanzando el estado estacionario en simulaciones preliminares, empleando un c_0 estimado. Luego, en la fase estacionaria se estima el c_0 realista evaluando

$$c_0 = \frac{\alpha F_{\max}^e}{v_{\max}}, \quad (16)$$

donde $0.05 < \alpha < 1$ permite definir que las fuerzas disipativas sean 5-10% menor de las fuerzas elásticas (por sugerencia de normativas como Eurocódigo 8 y ASCE). v_{\max} es el máximo valor absoluto de las velocidades de un nodo testigo. Por último, F_{\max}^e es la máxima fuerza elástica observada en las barras, en valor absoluto y se obtiene a partir de evaluar

$$F_{\max}^e = \max \left[\left| \frac{E_j A_j}{L_j^0} \Delta L_j(t) \right| \right]. \quad (17)$$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS Y DISCUSIÓN

3.1 Introducción

Se realizan simulaciones con el fin de analizar el comportamiento estático y dinámico de una estructura tipo domo geodésico. Primeramente, se propone una validación del modelo frente a un esquema equivalente basado en elementos finitos. Si bien la comparación se realiza mediante un cálculo estático, se considera suficiente tratándose de un estudio preliminar. Luego, se explora la respuesta mediante escenarios de forzamiento dinámico, apuntando a identificar eventuales inestabilidades y explorar potenciales aplicaciones.

En todas las simulaciones se considera la estructura de la [Figura 1](#), con los siguientes parámetros: $L = 25.0799$ m, $r_i = 0.9968$, $r_e = 1.7265$, $h = 0.3254$, $k = 0.0797$, $\rho = 7850$ Kg/m³, $A = 3.14159 \times 10^{-4}$ m², $E = 2.11 \times 10^{11}$ N/m² y $g = 9.81$ m/s². El coeficiente de fricción se determina según la sección 2.5, obteniéndose $c_0 = 874$ Kg/s. Se trata entonces del análisis de una estructura de porte importante, con una luz máxima entre apoyos de 86.6 m, una altura de 10.16 m y un peso total de 58601.6 N. Con las dimensiones consideradas se asegura mediante un chequeo previo que los esfuerzos axiales en juego en las simulaciones se encuentran muy por debajo de las cargas críticas de pandeo en todas las barras. En todos los casos, se emplea en la resolución numérica el método convencional de Runge-Kutta de orden 4.

3.2 Validación del modelo

El modelo se testea frente a uno equivalente de elementos finitos formulado en un programa comercial. La comparación se realiza mediante un cálculo estático lineal,

empleando elementos tipo truss (T3D2), considerando cargas de peso propio de la estructura y cuatro cargas puntuales laterales.

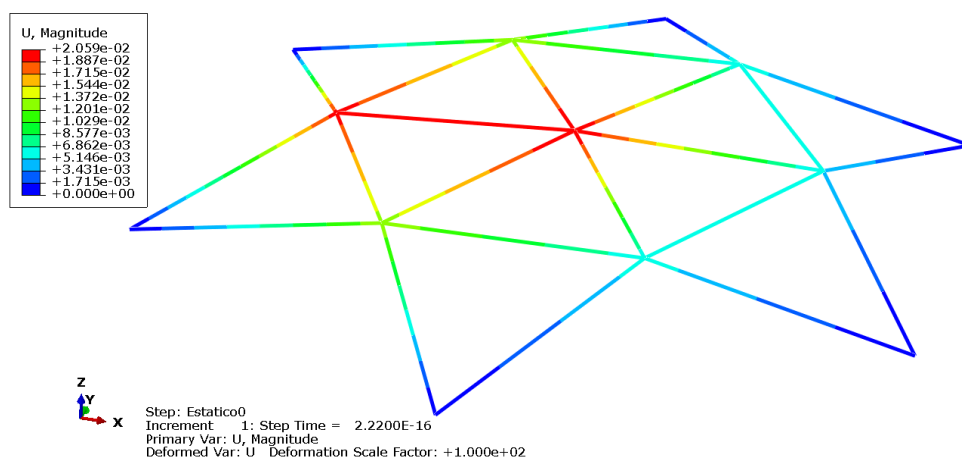


Figura 2. Magnitudes de desplazamientos obtenidas mediante el cálculo de elementos finitos. Factor de magnificación: 100x.

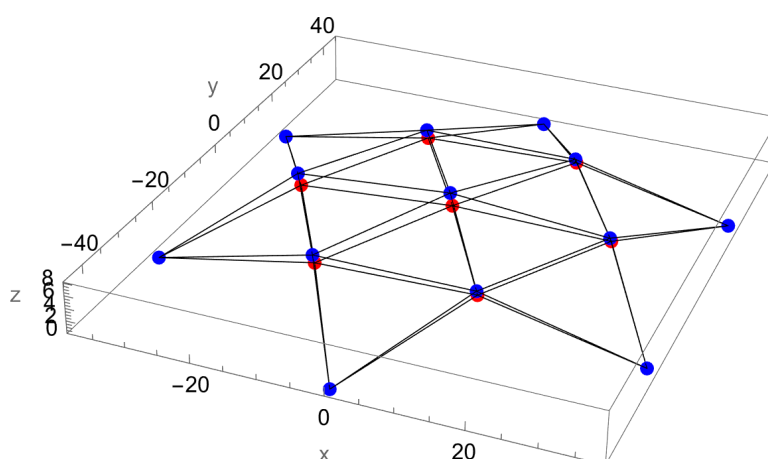


Figura 3. Configuración deformada (nodos rojos) vs. configuración original (nodos azules) obtenidas mediante el presente modelo. Factor de magnificación: 100x.

Desplazamiento dirección x (mm)				Desplazamiento dirección y (mm)				Desplazamiento dirección z (mm)			
gdl	FEM	Presente	Error %	gdl	FEM	Presente	Error %	gdl	FEM	Presente	Error %
1	3.8023	3.7934	-0.2328	2	0.0000	0.0000	-	3	-20.2312	-20.3692	0.6821
4	2.1985	2.2030	0.2061	5	0.0000	0.0000	-	6	-4.6970	-4.6446	-1.1167
7	1.6982	1.6977	-0.0294	8	0.5805	0.5863	0.9917	9	-5.6116	-5.5660	-0.8130
10	2.8168	2.8050	-0.4164	11	-1.1244	-1.1146	-0.8654	12	-12.7317	-12.6946	-0.2914
13	5.2694	5.2538	-0.2960	14	0.0000	0.0000	-	15	-18.9374	-18.9397	0.0121
16	2.8168	2.8050	-0.4164	17	1.1244	1.1146	-0.8654	18	-12.7317	-12.6946	-0.2914
19	1.6982	1.6977	-0.0294	20	-0.5805	-0.5863	0.9917	21	-5.6116	-5.5660	-0.8130

Tabla 1: Comparación de desplazamientos obtenidos a partir del presente modelo y del modelo de elementos finitos.

En el vector de cargas externas (14), el peso propio se considera como cargas verticales en los nodos móviles, esto es, estableciendo $f_3 = f_6 = f_9 = f_{12} = f_{15} = f_{18} = f_{21} = 0.2092.91$ N. Las

cargas laterales se aplican en los nodos 1, 4, 5 y 6, en dirección x , por lo que se define $f_1 = f_{10} = f_{13} = f_{16} = 5000$ N. Las fuerzas correspondientes los gdl restantes se setean a cero.

La Figura 2 ilustra los resultados del modelo de elementos finitos en lo que respecta a magnitud de desplazamientos. Por su parte, en la Figura 3 se muestra una comparación entre estructura original y deformada, empleando los resultados del presente modelo. La Tabla 1 presenta resultados comparativos, donde se observa que la máxima diferencia entre ambos modelos es de 1.12 %, y corresponde al desplazamiento vertical del nodo 2 (gdl 6).

3.3 Simulaciones con carga dinámica

Se realizan simulaciones para explorar el comportamiento dinámico de la estructura. Con el objetivo de ganar en realismo, para todos los estudios, se resuelve primeramente un cálculo estático que considera las cargas gravitatorias. Luego, los desplazamientos obtenidos en ese cálculo se emplean como estado inicial del cálculo dinámico correspondiente, junto a la condición de velocidades iniciales nulas.

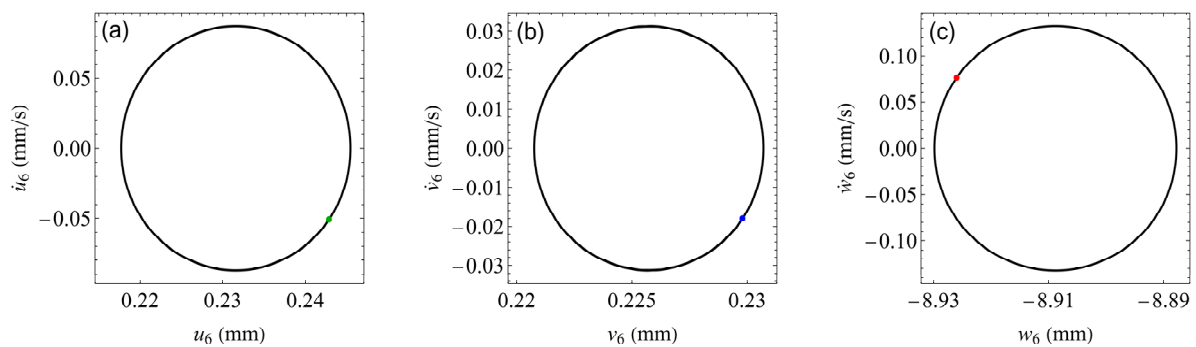


Figura 4. Planos de fase y puntos de Poincaré correspondientes al movimiento del nodo 6 en direcciones (a) x , (b) y , (c) z . Cálculo considerando peso propio y cargas dinámicas de viento en dirección x . Tiempo de simulación: 130 s. Tiempo descartado: 50 s.

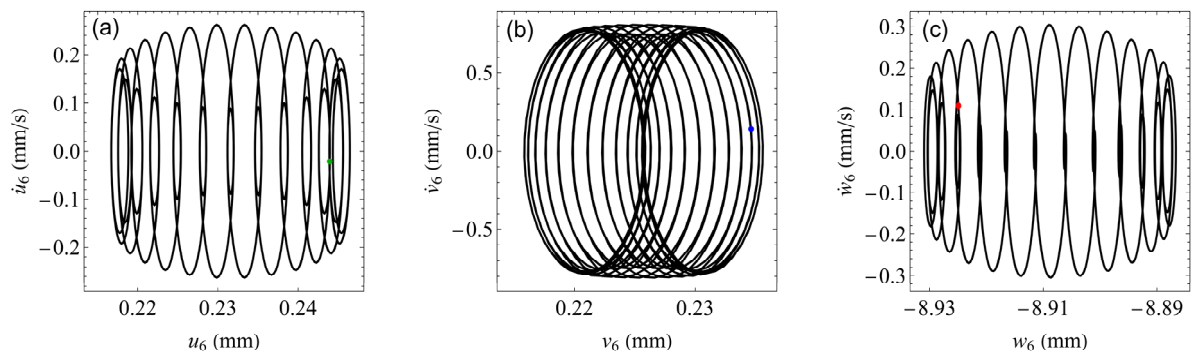


Figura 5. Planos de fase y puntos de Poincaré correspondientes al movimiento del nodo 6 en direcciones (a) x , (b) y , (c) z . Cálculo considerando peso propio, cargas dinámicas de viento en dirección x y una carga dinámica puntual vertical en el nodo 5. Tiempo de simulación: 130 s. Tiempo descartado: 50 s.

Se consideran cargas aplicadas en los nodos 1, 4, 5 y 6 en dirección x , pudiendo ser representativas de una sollicitación dinámica de viento: $f_1 = f_{10} = f_{13} = f_{16} = P_v + A_1 \cos z_1 t$, siendo $P_v = 937.44$ N, $A_1 = 100$ N y $z_1 = 2\pi \text{ s}^{-1}$. El valor de P_v se obtiene a partir de considerar un 25% de la acción de viento sugerida por el código CIRSOC 102 para la provincia de Neuquén; mientras que los valores de A_1 y z_1 resultan coherentes con el espectro de Van der Hoven (1957) para variabilidad del viento. Los resultados de tal sollicitación se muestran para un nodo testigo (nodo 6) en la Figura 4. Las gráficas presentan

planos de fase del movimiento junto a los puntos de Poincaré correspondientes, mapeados en $2s/z_1$. Las órbitas casi perfectamente circulares y el único punto de Poincaré indican un comportamiento lineal. Los valores de los desplazamientos en dirección z son mayores en magnitud que sus análogos en x e y debido a la influencia de las cargas de peso propio.

Para el segundo escenario de forzamiento, se agrega al caso anterior una carga vertical en el nodo 5, representada por $f_{15} = A_0 \cos z_0 t$, con $A_0 = 50$ N y $z_0 = 2s/25 s^{01}$. Este forzamiento pretende representar la presencia de un motor con desbalanceo. La Figura 5 muestra los resultados en el plano de fase y para el mismo nodo testigo (nodo 6). En este caso, dada la combinación de dos frecuencias, los puntos de Poincaré se mapean con $2s/z_1$, el cual constituye el mínimo común múltiplo de ambos períodos de forzamiento. Se observa que las magnitudes de desplazamientos se mantienen en valores similares a los de la Figura 4, pero las velocidades aumentan en hasta un orden de magnitud y las órbitas se complejizan debido al accionar conjunto de ambas frecuencias. El único punto de Poincaré presente indica que el movimiento periódico mantiene relación 1:1 con respecto al período de mapeo.

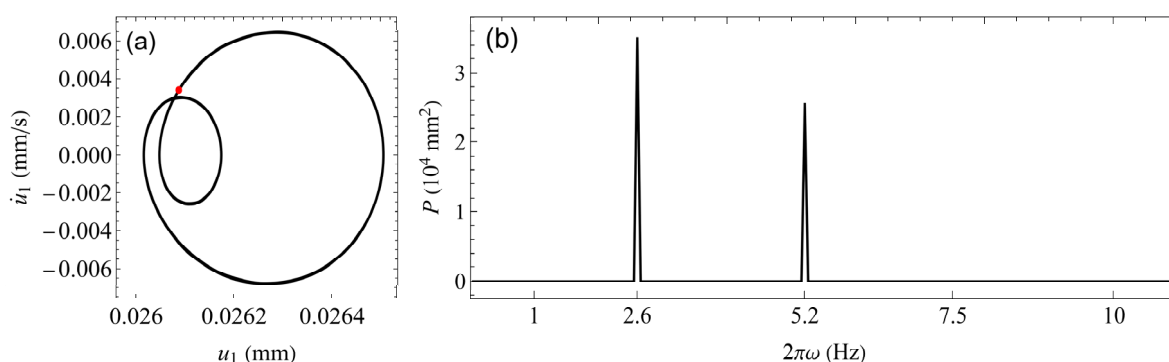


Figura 6. (a) Plano de fase y puntos de Poincaré correspondientes al movimiento del nodo 1 en dirección x . (b) Respuesta en frecuencia del nodo 1 en dirección x . Tiempo de simulación: 115 s. Tiempo descartado: 96 s.

Las expresiones (11) y (14) permiten definir las propiedades del material individualmente para cada barra. Así, pueden introducirse de una manera muy sencilla alteraciones locales de estas propiedades. Se explora un escenario donde la barra que une los nodos 2 y 8 cuenta con su módulo de elasticidad reducido en un 20%. Esto pretende modelar la presencia de daño estructural localizado. Como forzamiento, se aplica una carga vertical en el nodo 1: $f_3 = A_1 \cos z_1 t$ con $A_1 = 500$ N y $z_1 = 2s/2.6 s^{01}$. La Figura 6 describe el movimiento en dirección x del nodo 1. Cabe notar que tal movimiento resulta inexistente para la estructura intacta, debido a las condiciones de simetría. Así, la ruptura de la simetría estructural debida a la flexibilización de una de las barras modifica la respuesta dinámica, generando desplazamientos y velocidades que no existen en la estructura original. La Figura 6a muestra el plano de fase del movimiento. Se observa una órbita con doble lazo, que se aparta de la clásica lineal. El único punto de Poincaré confirma que la respuesta aún es periódica 1:1. La Figura 6b revela un rasgo clave: en el espectro de Fourier, además del pico principal en 2.6 Hz, aparece un armónico en 5.2 Hz con potencia comparable. La presencia de este armónico no se explica en un contexto de linealidad, y constituye evidencia de comportamiento no lineal inducido por el daño. En este sentido, el escenario propuesto muestra cómo defectos locales pueden introducir nuevas componentes dinámicas en la respuesta, lo cual resulta de interés para enfoques de identificación de daño en estructuras reticuladas.

Para complementar los resultados de la Figura 6, se construyen los diagramas asociados de tipo amplitud-frecuencia que se muestran en la Figura 7. Para la Figura 7a, se emplean

idénticos seteos a los de la [Figura 6](#), pero variando la frecuencia en el intervalo $2\pi \omega \in [2\pi \cdot 0.5 \text{ s}^{-1}, 2\pi \cdot 10 \text{ s}^{-1}]$. Para la [Figura 7b](#), se considera una reducción de E del 50% en vez de 20%. Se observa que las amplitudes varían considerablemente con z_1 , alcanzando picos máximos cerca de 5.8 Hz, valor que corresponde a una resonancia del sistema. Como era de esperarse, las amplitudes son mayores cuanto más se reduce E y las resonancias se manifiestan en general a frecuencias levemente menores.

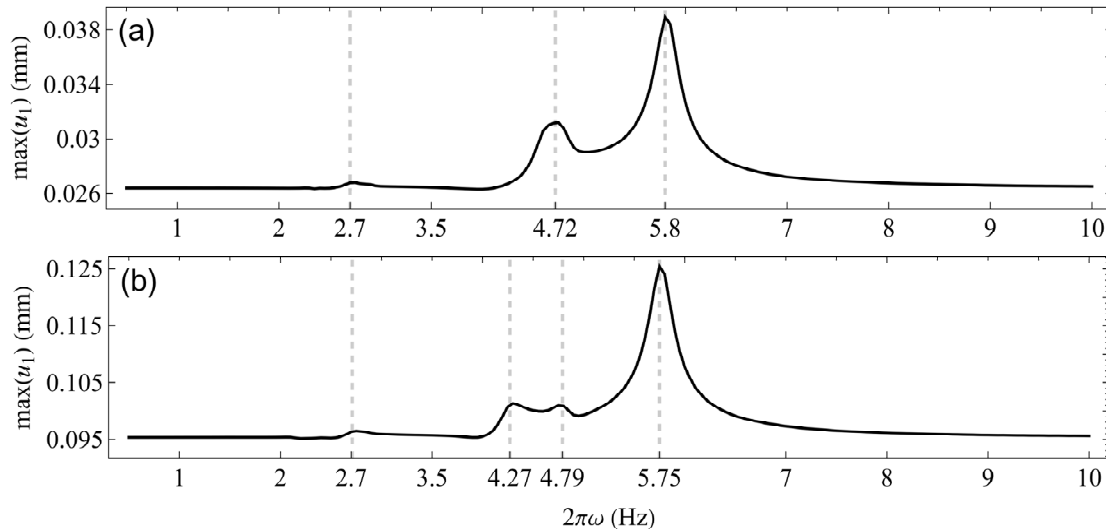


Figura 7. Amplitud de desplazamiento vs. frecuencia de excitación correspondientes al movimiento del nodo 1 en dirección x . (a) Reducción de E en un 20%. (b) Reducción de E en un 50%.

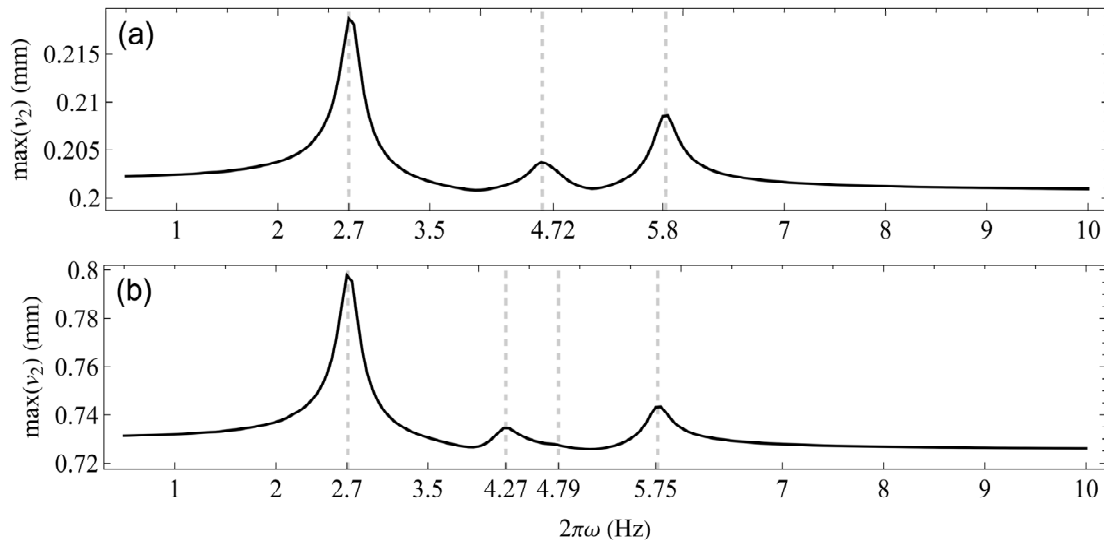


Figura 8. Amplitud de desplazamiento vs. frecuencia de excitación correspondientes al movimiento del nodo 2 en dirección y . (a) Reducción de E en un 20%. (b) Reducción de E en un 50%.

Por último, se presenta la [Figura 8](#), similar a la anterior pero correspondiente al desplazamiento en dirección y del nodo 2. Se observan patrones de amplitudes notablemente diferentes a los del nodo 1, lo cual es debido a la complejidad de los movimientos asociados a las diferentes resonancias. En este caso, el movimiento se ve muy amplificado en la primera resonancia del sistema, que corresponde aproximadamente a 2.7 Hz.

4 CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo de un domo geodésico basado en el formalismo lagrangiano, considerando masas nodales concentradas, energía elástica en las barras y fuerzas disipativas viscosas. Los análisis bajo diferentes escenarios de excitación permitieron identificar tanto respuestas lineales, dominadas por la superposición de modos y forzamientos, como comportamientos no lineales asociados a la ruptura de simetrías. En particular, la introducción de daño localizado produjo la aparición de armónicos adicionales y modificaciones en las órbitas en el plano de fases. Los diagramas de amplitud-frecuencia confirmaron la presencia de resonancias y su sensibilidad a variaciones en la rigidez local, lo que refuerza el potencial del enfoque para estudiar fenómenos de identificación de daño.

La formulación presentada es viable para sistemas relativamente pequeños, como puede ser el domo de pocos nodos de la [Figura 1](#). No obstante, es importante remarcar que si: 1) el sistema tiene muchos nodos, 2) la geometría es extremadamente complicada, 3) las barras tienen propiedades muy distintas, o 4) se desea incluir flexión, torsión y corte de forma precisa, entonces podría resultar más práctico emplear un modelo de elementos finitos. De todas formas, al tratarse en esencia un modelo reducido, tiene la ventaja de una resolución computacional muy rápida. Esto es especialmente apto para cálculos extensivos, por ejemplo, si desea analizarse cómo varía el comportamiento de la estructura al variar uno o más parámetros y evidenciar la existencia de fenómenos no lineales de diferente naturaleza.

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

REFERENCIAS

- Budiansky, B. y Roth, R. S. (1962). Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells. *Journal of the Aerospace Sciences*, 29(3), 318–325.
- Coan, J. B. y Plaut, R. H. (1983). Response of shallow spherical caps to harmonic excitation. *Journal of Applied Mechanics*, 50(3), 671–676.
- Gattulli, V. y Paolone, A. (1997). Nonlinear dynamics of shallow spherical domes under harmonic forcing. *Nonlinear Dynamics*, 13(1), 19–41.
- Gioncu, V. (1995). The collapse of reticulated domes: state-of-the-art. *International Journal of Space Structures*, 10(1), 1–46.
- Goldstein, H. (1994). *Mecánica Clásica*. 2º edición en español. Reverté.
- Guan, D. y Virgin, L. N. (2018). Nonlinear vibration of spherical caps and the role of symmetry-breaking imperfections. *Nonlinear Dynamics*, 91(3), 1997–2012.
- Guan, Y., Virgin, L. y Helm, D. (2018). Structural behavior of shallow geodesic lattice domes. *International Journal of Solids and Structures*, 155, 225–239.
- Hutchinson, J. W. (1967). Imperfection sensitivity of externally pressurized spherical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 34(1), 49–55.
- Plaut, R. H. (1991). Dynamic snap-through of shallow spherical caps. *International Journal of Solids and Structures*, 27(12), 1445–1459.
- Van der Hoven, I. (1957). Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from 0.0007 to 900 cycles per hour. *Journal of Meteorology*, 14:160–164.
- Virgin, L. N. (2007). *Introduction to experimental nonlinear dynamics: a case study in mechanical vibration*. Cambridge University Press, Cambridge.