

CAPAS ABSORBENTES FORMADAS POR DISIPADORES VISCOSOS DISTRIBUIDOS

ABSORBING LAYERS FORMED BY DISTRIBUTED VISCOUS DASHPOTS

Adriano Trono^a, Leonardo J. Cocco^a, Diego Turello^{a,b}, Federico Pinto^{a,b} y Marcelo A. Ceballos^{a,b}

^aFCEfyn, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina.
depestructuras@fcefyn.unc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu.ar>

^bInstituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) – CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. idit@fcefyn.edu.ar,
<http://www.inv.idit.uncor.edu/>

Palabras clave: Interacción suelo-estructura, Bordes Viscosos, Capas absorbentes.

Resumen. La modelación de la interacción dinámica suelo-estructura presenta el desafío de representar de forma adecuada la característica ilimitada del medio físico a través de condiciones de borde absorbentes. En años recientes, las capas perfectamente acopladas (Perfectly Matched Layer, PML) han representado un gran avance en este campo. Si bien estas condiciones de bordes son altamente efectivas, suelen presentar inestabilidades numéricas que dificultan la integración de las ecuaciones de movimiento en el dominio del tiempo, y restringen su uso a sistemas lineales. Por otro lado, los bordes viscosos representan una alternativa simple y completamente estable, aunque presentan deficiencias en la absorción de ondas de baja frecuencia, típicas de los eventos sísmicos. En este trabajo se propone una técnica que combina las ventajas de ambos enfoques: la constante del borde viscoso se distribuye en una determinada longitud, formando una capa absorbente. El resultado es una condición de borde precisa, estable y de fácil implementación. La propuesta se introduce mediante un caso unidimensional. Los resultados numéricos se verifican mediante comparaciones con soluciones analíticas de referencia.

Keywords: Soil-Structure Interaction, Viscous Boundaries, Absorbing Layers.

Abstract. The modeling of soil–structure dynamic interaction poses the challenge of properly representing the unbounded nature of the physical medium through absorbing boundary conditions. In recent years, Perfectly Matched Layers (PML) have represented a major breakthrough in this field. Although these boundary conditions are highly effective, they often exhibit numerical instabilities that hinder the time-domain integration of the equations of motion and restrict their application to linear systems. On the other hand, viscous boundaries offer a simple and fully stable alternative, but they show deficiencies in absorbing low-frequency waves, which are typical of seismic events. This work proposes a technique that combines the advantages of both approaches: the viscous boundary constant is distributed over a given length, forming an absorbing layer. The result is an accurate, stable, and easily implementable boundary condition. The proposed method is introduced through a one-dimensional case. Numerical results are validated by comparisons with reference analytical solutions.

1 INTRODUCCIÓN

En la modelación de efectos de interacción suelo-estructura es importante considerar de forma adecuada las condiciones de borde absorbentes, para simular la naturaleza infinita del medio que rodea a la estructura. En los últimos años ha habido un gran avance en el desarrollo de capas perfectamente acopladas (Perfectly Matched Layer, PML) utilizadas como bordes absorbentes (Kucukcoban y Kallivokas (2013), Trono et al. (2022)). Si bien estas condiciones de bordes son altamente efectivas, suelen presentar inestabilidades numéricas que dificultan la integración de las ecuaciones de movimiento en el dominio del tiempo, y restringen su uso a sistemas lineales.

Por otro lado, los bordes viscosos estándares (Standard Viscous Boundary – SVB) propuestos por Lysmer y Kuhlemeyer (1969) son una alternativa simple y completamente estable, aunque presentan deficiencias en la absorción de ondas de baja frecuencia, típicas de los eventos sísmicos (Trono et al. 2024). Implican una solución analítica exacta en problemas de propagación de ondas mecánicas unidimensionales y tan sólo una solución aproximada en problemas bidimensionales y tridimensionales.

La impedancia de una barra semi infinita sometida a carga axial en el extremo libre es equivalente a la de un disipador viscoso:

$$Z(\omega) = i\omega C \quad (1)$$

donde ω es la frecuencia de la carga, i es la constante imaginaria y C es la constante del disipador viscoso. La constante de dicho disipador se calcula con la expresión $C = cA$, siendo A la sección transversal de la barra y $c = \rho V = \sqrt{\rho E}$, donde ρ es la densidad del material, V es la velocidad de propagación de la onda y E es el módulo de Young. Lysmer y Kuhlemeyer (1969) proponen conectar los bordes de un modelo de elementos finitos planos a disipadores de constante c_p y c_s utilizando las velocidades de ondas P y S (V_p y V_s), respectivamente, en el cálculo de c .

Debido a que los bordes viscosos utilizados en modelos bidimensionales producen errores significativos en frecuencias bajas (Trono et al. 2024), en este trabajo se propone distribuir los disipadores viscosos en una determinada longitud para minimizar el error. Se realizan pruebas con modelos unidimensionales con un error impuesto adrede en el valor de c , y se demuestra que el error en la impedancia obtenida disminuye si los disipadores se distribuyen en una longitud dada, en lugar de ubicar un solo disipador en un extremo. Esto tiene el objetivo de demostrar que, dado que los disipadores c_p y c_s no representan una condición de borde exacta en problemas de dos y tres dimensiones, el hecho de distribuirlos de forma adecuada en una dirección perpendicular al borde, podría disminuir el error y mejorar el rendimiento del disipador viscoso como borde absorbente.

2 MÉTODOS DE CAPA DE DISIPADORES

1.1 Disipadores puntuales distribuidos

En la Figura 1 a se muestra un modelo analítico de barra semi infinita que se logra conectando un disipador viscoso en el extremo de una barra de longitud finita. Este mismo modelo se puede plantear como el mostrado en la Figura 1 b, donde se conectan dos barras en serie, una de área A y otra de área $\frac{A}{2}$, y en paralelo a la segunda barra se coloca un disipador $\frac{C}{2}$.

Estos dos modelos son equivalentes a los efectos de calcular la rigidez dinámica de cualquier punto del primer tramo de barra.

Razonando de esta manera se podrían plantear infinitos sistemas equivalentes con diferentes barras conectadas en serie, siempre que se cumpla que el disipador conectado en paralelo a cada barra compense la disminución del área de dicha barra respecto de la anterior. Por ejemplo, en la [Figura 1 c](#) se muestra un modelo equivalente de cinco barras puestas en serie con cinco disipadores de constante $\frac{C}{5}$, ya que la variación del área es constante entre las barras. Cabe recalcar que no es necesario que los cambios de área sean constantes. Podría ser diferente, siempre que el disipador puesto en paralelo compense la disminución del área en cada caso. La disminución de la rigidez dinámica a través del área también puede lograrse a través de la disminución del módulo de Young y de la densidad del material, manteniendo el área constante. Esto último permite extender de forma sencilla este tipo de borde absorbente a modelos tridimensionales (este procedimiento no se desarrolla en este trabajo).

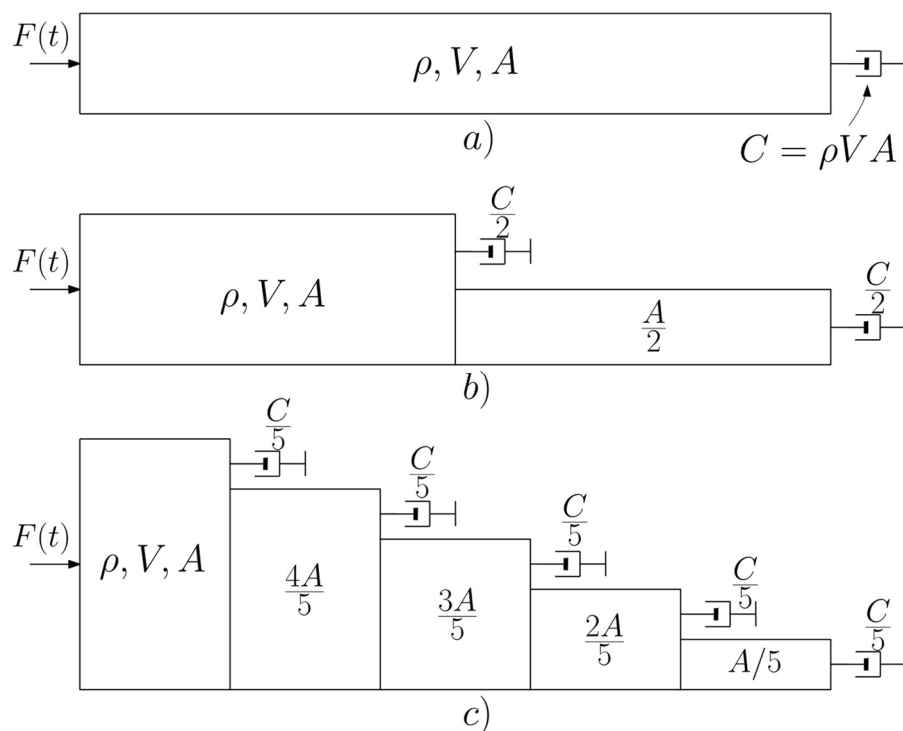


Figura 1: Modelos unidimensionales equivalentes con bordes viscosos SVB.

El razonamiento expuesto permite convertir un borde puntual en un borde viscoso distribuido: se trata de una “capa” de disipadores. En problemas unidimensionales todos estos casos son equivalentes y exactos a los efectos de calcular la impedancia $Z(\omega)$ del extremo libre. En caso de desconocerse la constante exacta c (como lo que ocurre en problemas de dos y tres dimensiones), cabe preguntarse si distribuir un disipador aproximado c^* (con cierto error) formando una capa de disipadores permitiría disminuir el error respecto de ubicar al disipador c^* de forma puntual en un extremo. Para responder esta pregunta, en este trabajo se comparan los resultados de diferentes modelos de elementos finitos unidimensionales de capa de disipadores con error inducido en la constante c^* .

1.2 Disipadores continuamente distribuidos

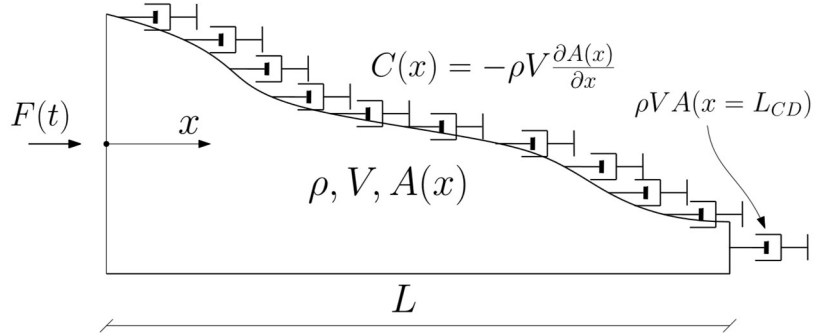


Figura 2: Capa de disipadores distribuidos continuamente.

Los disipadores viscosos también pueden distribuirse en forma continua en una determinada longitud. En la [Figura 2](#) se muestra una barra de longitud L cuya sección transversal varía según una función $A(x)$. Dado que $\frac{\partial A(x)}{\partial x} \leq 0$, la constante del disipador se plantea negativa ($C(x) = -\rho V \frac{\partial A(x)}{\partial x}$). Planteando el equilibrio de un elemento diferencial de barra, puede obtenerse la ecuación diferencial asociada al tramo de barra de sección variable conectado a disipadores viscosos continuos:

$$EA(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E \frac{dA(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{\rho E} \frac{dA(x)}{dx} \dot{u} = \rho A(x) \ddot{u} \quad (2)$$

donde $u = u(x, t)$ representa el desplazamiento en la dirección longitudinal de la barra. Para plantear la formulación débil del problema se pre multiplica a la Ec. (2) por una función de peso $W(x)$ y se integra en la longitud L del dominio:

$$\begin{aligned} \int_0^L W(x) EA(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \int_0^L W(x) E \frac{dA(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^L W(x) c \dot{u} \frac{dA(x)}{dx} dx \\ = \int_0^L W(x) \rho A(x) \ddot{u} dx \end{aligned} \quad (3)$$

Como es habitual en el campo de los elementos finitos unidimensionales, se plantea una integral por partes del primer término de la Ec. (3):

$$\begin{aligned} \int_0^L W(x) EA(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ = \left[W(x) EA(x) \frac{du}{dx} \right]_0^L - \int_0^L W(x) \frac{\partial u}{\partial x} E \frac{dA(x)}{dx} dx \\ - \int_0^L \frac{dW(x)}{dx} EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (4)$$

Reemplazando la Ec. (4) en la Ec. (3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[W(x) EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dW(x)}{dx} EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^L W(x) c \frac{dA(x)}{dx} \dot{u} dx \\ = \int_0^L W(x) \rho A(x) \ddot{u} dx \end{aligned} \quad (5)$$

En este caso, se utilizan polinomios de Lagrange de segundo orden ($N_1(x)$, $N_2(x)$ y $N_3(x)$), detallados en [Zienkiewicz et al. 2005](#)) para interpolar las funciones de desplazamiento, de peso y de área:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathbf{N} \mathbf{u}_e(t), \\ \text{con } \mathbf{N} &= [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x)] \text{ y } \mathbf{u}_e^T(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t)] \\ W(x) &= \mathbf{w}_e^T \mathbf{N}^T \text{ con } \mathbf{w}_e^T(t) = [w_1 \quad w_2 \quad w_3] \\ A(x) &= N_1(x)A_1 + N_2(x)A_2 + N_3(x)A_3 \end{aligned} \quad (6)$$

donde A_1 , A_2 , A_3 , $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ y w_1 , w_2 , w_3 son los valores del área de la sección transversal, de desplazamiento y de función de peso, respectivamente, en los nudos del elemento finito. Como es habitual, las derivadas se obtienen de derivar las funciones de interpolación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \mathbf{B}(x) \mathbf{u}_e(t) \\ \frac{dW(x)}{dx} &= \mathbf{w}_e^T \mathbf{B}^T(x) \\ \frac{dA(x)}{dx} &= B_1(x)A_1 + B_2(x)A_2 + B_3(x)A_3 \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx}$, $B_1 = \frac{dN_1(x)}{dx}$, $B_2 = \frac{dN_2(x)}{dx}$ y $B_3 = \frac{dN_3(x)}{dx}$. Si se subdivide al dominio en n elementos finitos, las integrales de la Ec. (5) pueden subdividirse en el dominio de cada elemento finito:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dW(x)}{dx} EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_e^{T^i} \mathbf{K}_e^i \mathbf{u}_e^i \\ \int_0^L W(x) \rho A(x) \ddot{u} dx &= \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_e^{T^i} \mathbf{M}_e^i \ddot{\mathbf{u}}_e^i \\ - \int W(x) c \frac{dA(x)}{dx} \dot{u} dx &= \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_e^{T^i} \mathbf{C}_e^i \dot{\mathbf{u}}_e^i \end{aligned} \quad (8)$$

donde las matrices elementales (del elemento i) de rigidez, masa y amortiguamiento se calculan de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}_e^i = E \sum_{j=1}^3 A_j^i \int_0^{l_e^i} \mathbf{B}^T(x) N_j(x) \mathbf{B}(x) dx \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_e^i = \rho \sum_{j=1}^3 A_j^i \int_0^{l_e^i} \mathbf{N}^T(x) N_j(x) \mathbf{N}(x) dx \quad (10)$$

$$\mathbf{C}_e^i = -c \sum_{j=1}^3 A_j^i \int_0^{l_e^i} \mathbf{N}^T(x) B_j(x) \mathbf{N}(x) dx \quad (11)$$

donde l_e^i es la longitud del elemento finito y A_j^i es el área en el nudo j del elemento finito i .

3 MODELOS NUMÉRICOS

Como ya se ha mencionado previamente, resulta de interés construir modelos numéricos imponiendo un error Δ^{error} en la constante c de amortiguamiento. Se define la constante de amortiguamiento con error de la siguiente manera:

$$c^* = \left(1 + \frac{\Delta^{error}}{100\%}\right) c \quad (12)$$

Se proponen tres modelos diferentes con error inducido en la constante c compuestos por:

- a) elementos finitos lineales con un solo disipador ubicado en el extremo,
- b) elementos finitos lineales con disipadores puntualmente distribuidos y
- c) elementos finitos cuadráticos con disipadores continuamente distribuidos (ver [Figura 3](#)).

La cantidad de elementos lineales utilizados en los casos a) y b) es el doble de la cantidad de elementos finitos cuadráticos usados en el caso c), con el propósito de que todos los modelos numéricos presenten la misma cantidad de grados de libertad (y poder comparar casos con costo computacional similar).

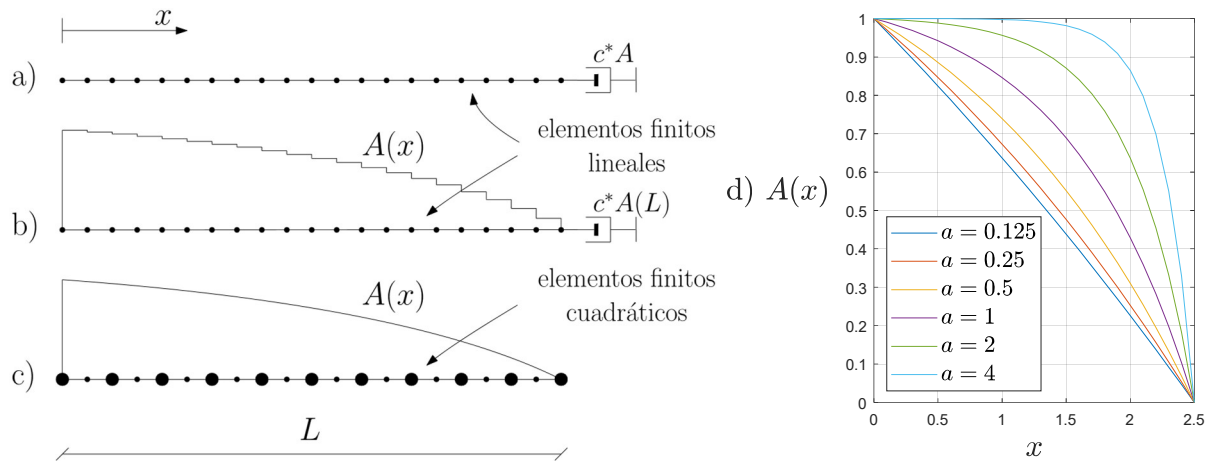


Figura 3: Esquema de los modelos numéricos utilizados para calcular $Z(\omega)$: a) barra con un disipador en un extremo, b) barra con disipadores puntualmente distribuidos y c) barra con disipadores continuamente distribuidos. En d) se muestra la función $A(x)$ según el parámetro a utilizado.

Se utiliza una función de área de la siguiente forma:

$$A(x) = \frac{1 - e^{-aL}e^{ax}}{1 - e^{-aL}} \quad (13)$$

En la [Figura 3 d](#) se muestran las distintas funciones $A(x)$ según el parámetro a utilizado. Para los casos b) y c) se utiliza la misma función de área, con la diferencia de que en b) se producen saltos discretos de área entre un elemento y otro. En el caso b) se conectan disipadores puntuales en cada nudo. A partir de un análisis de sensibilidad de error (no presentado en detalle en este trabajo) se utiliza un valor de $a = 0.5$ en la Ec. (13).

Se modela un caso particular con $E = 20500000 \text{ kPa}$, $\rho = 2.4 \text{ t/m}^3$. En los modelos a) y b) se utilizan elementos lineales de longitud $l_e^{a,b} = 0.125 \text{ m}$ y en el caso c) se utilizan elementos cuadráticos de longitud $l_e^c = 0.25 \text{ m}$.

En cada caso se obtiene el sistema de ecuaciones en términos de los grados de libertad de desplazamientos:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (14)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices del sistema y \mathbf{P} es el vector de cargas. Aplicando la transformada de Fourier de la Ec.(14) se obtiene:

$$(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{P}} \quad (15)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{P}}$ son las transformadas de Fourier del vector de incógnitas y del vector de cargas. La matriz de receptancia del sistema puede calcularse a partir de cada frecuencia de muestreo f_m :

$$\alpha_m = (-(2\pi f_m)^2\mathbf{M} + i2\pi f_m\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \quad (16)$$

La impedancia condensada del extremo de cada modelo numérico se calcula haciendo $Z_m = \frac{1}{\alpha_m^{11}}$, donde α_m^{11} es el elemento de la matriz α_m ubicado en la diagonal principal y asociado al grado de libertad del extremo libre de la barra (ubicado en $x = 0$).

4 RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados de los modelos detallados en la sección anterior con diferentes magnitudes de error inducido Δ^{error} (ver Ec. (12)) en la constante c^* . En las Figuras 4, 5, 6 y 7 se grafica la impedancia $Z(\omega)$ del extremo de barra en función de una frecuencia adimensional $a_0 = \frac{2\pi f l_e^{a,b}}{v}$.

En la Figura 4, se muestra el resultado de utilizar la constante c sin error inducido. Se trabaja con una longitud $L = 2.5 \text{ m}$. Se observa que todos los modelos propuestos funcionan de forma adecuada para representar la impedancia de la barra semi infinita. Puede observarse una pequeña discrepancia por encima de $a_0 = 0.35$ que se debe a la limitación del método de elementos finitos para representar adecuadamente la impedancia en frecuencias altas. Si se desear minimizar este error numérico puede disminuirse la longitud l_e del elemento finito (no es el objetivo de este trabajo).

En las Figuras 5, 6 y 7 se muestran los resultados de los modelos con error inducido en c de -20% , 20% y 50% , respectivamente. La función de área en estos casos es la definida en la Ec. (13) con un valor particular de $a = 0.5$. Se observa que los casos de capas distribuidas (b y c) disminuyen considerablemente el error respecto del caso de borde puntual en el extremo. No se distinguen diferencias significativas entre los modelos de capas de disipadores. Para poder observar la diferencia entre estos modelos, se define una medida de error:

$$\epsilon = \frac{1}{0.5} \int_0^{0.5} \sqrt{((Z_m - Z)(Z_m^* - Z^*))} da_0 \quad (17)$$

donde Z_m es la impedancia calculada numéricamente y Z es la impedancia analítica, y el supraíndice $*$ significa conjugado. Esta medida de error se calcula numéricamente en cada caso.

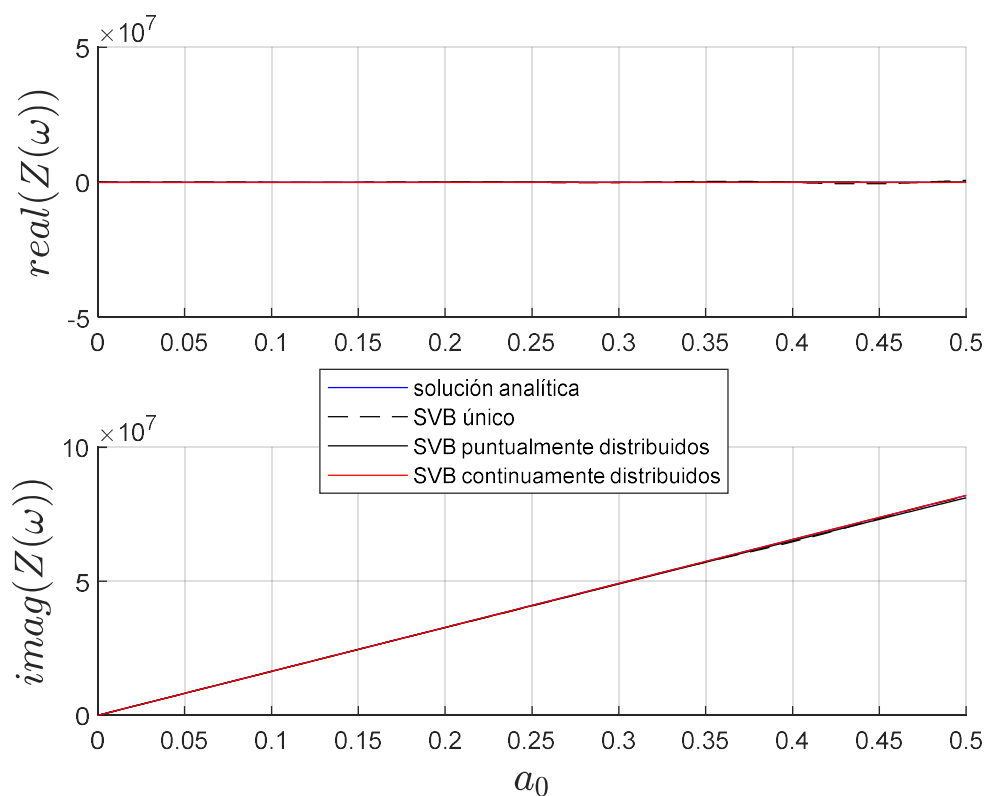


Figura 4: Impedancia del extremo de la barra semi infinita calculada con la constante de amortiguamiento adecuada ($\Delta^{error} = 0, L = 2.5 \text{ m}$).

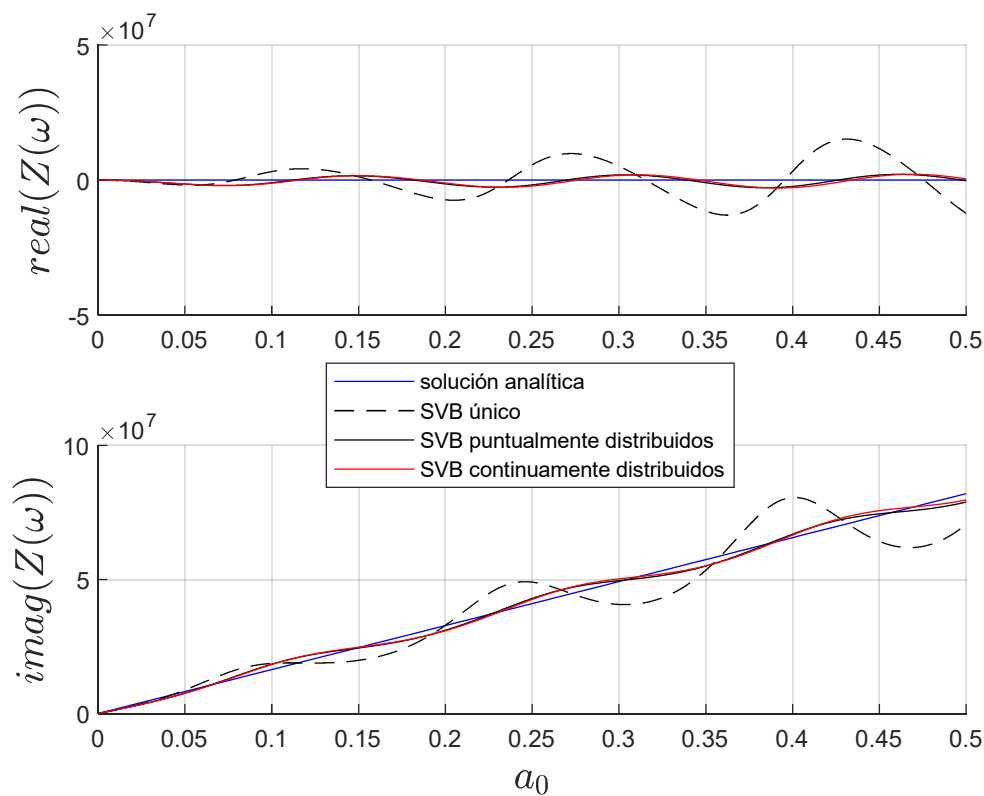


Figura 5: Impedancia del extremo de la barra semi infinita calculada con $\Delta^{error} = -20 \%$ y $L = 2.5 \text{ m}$.

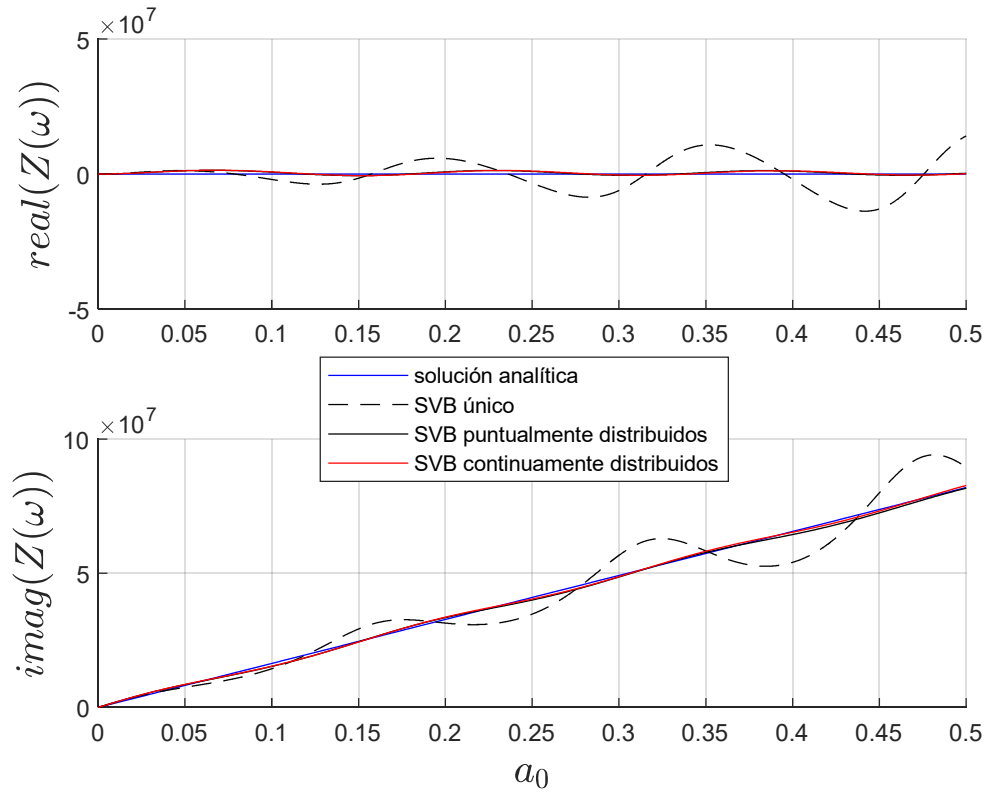


Figura 6: Impedancia del extremo de la barra semi infinita calculada con un $\Delta^{error} = 20\%$ y $L=2.5$ m.

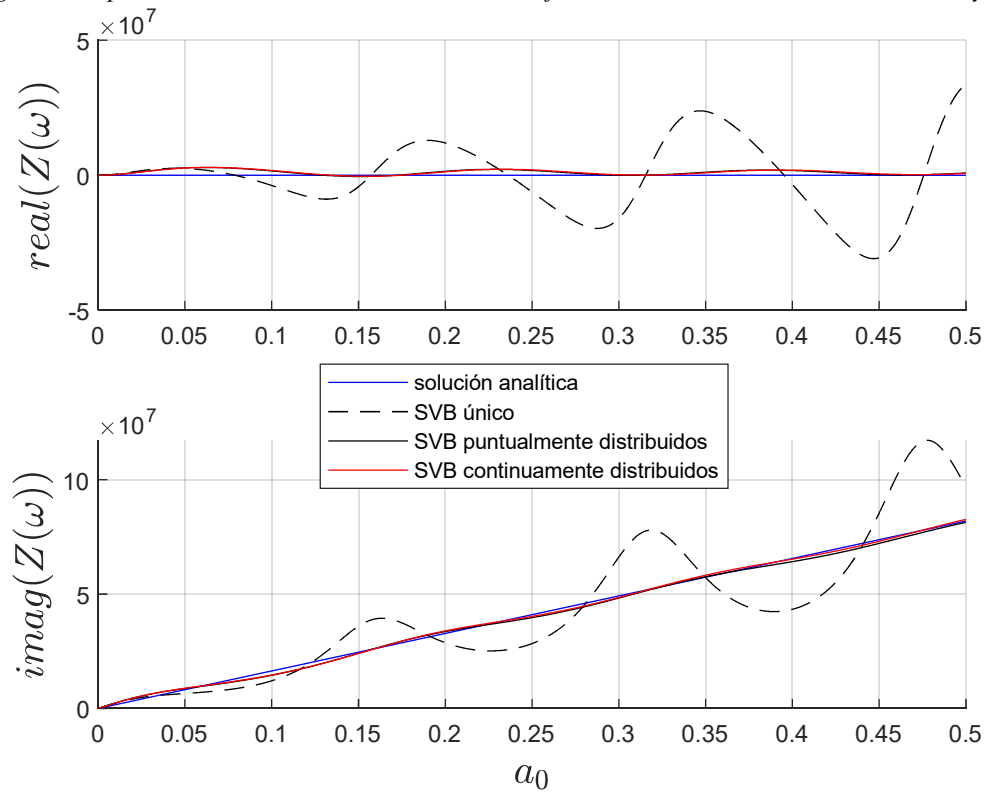


Figura 7: Impedancia del extremo de la barra semi infinita calculada con un $\Delta^{error} = 50\%$ y $L=2.5$ m.

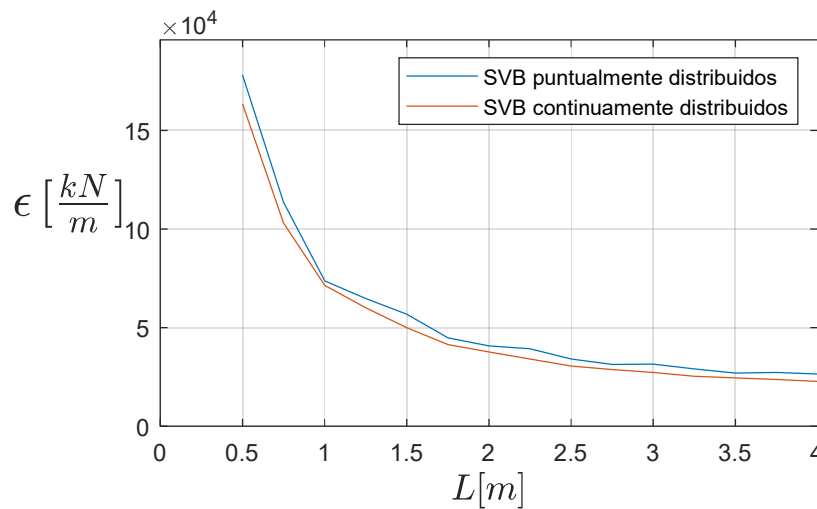


Figura 8: Error en $Z(\omega)$ obtenido según diferentes longitudes de capa de disipadores ($\Delta^{error} = 20\%$).

En la Figura 8 se compara la medida de error obtenida según la longitud de capa de disipadores para el caso particular con error impuesto $\Delta^{error} = 20\%$. La longitud de los elementos finitos se mantiene constante en cada caso, es decir, la cantidad de elementos se incrementa linealmente con la longitud L . Se observa que incrementar la longitud de la capa disminuye el error y que el modelo de disipadores continuamente distribuidos no representa una mejora significativa respecto del modelo de disipadores puntualmente distribuidos.

5 CONCLUSIONES

El método propuesto es altamente satisfactorio: distribuir los disipadores con error impuesto en una determinada longitud de barra, ya sea puntualmente entre elementos finitos o continuamente a través de matrices consistentes, disminuye de forma considerable el error en el cálculo de la impedancia de una barra semi infinita. Si la constante del disipador es desconocida o presenta un error, formar una capa de disipadores representa una ventaja considerable respecto de ubicar un disipador de forma local en el extremo de la barra. Este método podría extenderse a modelos de dos y tres dimensiones donde la utilización local de disipadores c_s y c_p produce errores significativos en el cálculo de la impedancia de fundaciones.

REFERENCIAS

- Lysmer J. Kuhlemeyer R. L.. Finite dynamic model for infinite media. *Journal of Engineering Mechanics Division*, 95:859-877, 1969.
- Trono A., Brewer A.T., Pinto F., Ceballos M. A.: Bordes absorbentes de capas perfectamente acopladas mediante elementos finitos mixtos. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Vol XXXIX, 2022.
- Trono A., Turello D., Pinto F., Ceballos M. A.: Estudio comparativo entre bordes viscosos y bordes de capas perfectamente acopladas. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Vol XXXXI, 2024.
- Zienkiewicz, O.C., Bicanic N. *Earthquake input definition and the transmitting boundary conditions*. Advances in Computational Nonlinear Mechanics. Springer-Verlag. Wien, 1989.
- Kucukcoban S. y Kallivokas, L.F. A symmetric hybrid formulation for transient wave simulations in PML-truncated heterogeneous media. *Wave Motion*, 50, 57-79 (2013).
- Zienkiewicz, O.C., Taylor R.L., Zhu J. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Sixth edition. Elsevier, 2005.