

## MODELAGEM COM O LDEM USANDO DIFERENTES TAMANHOS DE MALHAS

### MODELING WITH LDEM USING DIFFERENT MESH SIZES

Uemerson Soares de Andrade<sup>a</sup>, Caroline Bremm<sup>a</sup>, Amanda Martins de Lima<sup>a</sup>, Ederli Marangon<sup>a</sup>, Luis Eduardo Kostas<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Modeling and Analysis Experimental of Composites Group, Engineering Post Graduation Program, Federal University of Pampa, Alegrete Campus, Av. Tiaraju 810, Alegrete 97546-550, Brazil

**Palavras-chave:** Tampa de bueiro, Malhas distintas, Lattice Discrete Element Method.

**Resumo.** No Método de Elementos Discretos formados por Barras (Lattice Discrete Element Method – LDEM), o sólido é representado por uma treliça espacial, com massas concentradas nos nós e rigidez definida pela relação constitutiva dos elementos de barra. Tradicionalmente, essa treliça é construída pela repetição de um módulo cúbico, o que exige que a geometria do sólido modelado seja um múltiplo do tamanho desse cubo elementar. Alterações pontuais nas posições dos nós também podem ser feitas para melhorar o ajuste, mas, mesmo combinando essas estratégias, nem sempre é viável representar geometrias mais complexas com tamanhos de módulo elementar razoáveis. Neste trabalho, é utilizada a versão do LDEM implementada no ambiente Abaqus/Explicit. No software, foi possível estabelecer a interação entre diferentes partes do modelo com tamanhos distintos de malha (módulos elementares). Na primeira etapa do estudo, foi modelada uma geometria simples com diferentes tamanhos de malhas conectadas por variadas técnicas de ligação. Em seguida, a resposta de uma viga em balanço com malhas distintas foi validada. Após essa validação, desenvolveu-se um modelo numérico mais complexo, representando a estrutura de uma tampa de bueiro de concreto reforçado com fibras de aço. Nesse modelo, aplicaram-se as estratégias previamente testadas, buscando representar com maior realismo as regiões de alta concentração de esforços e danos potenciais.

**Keywords:** Manhole cover, Distinct meshes, Lattice Discrete Element Method.

**Abstract.** In the Lattice Discrete Element Method (LDEM), the solid is represented by a spatial truss, with masses concentrated at the nodes and stiffness defined by the constitutive ratio of the bar elements. Traditionally, this truss is constructed by repeating a cubic module, which requires the geometry of the modeled solid to be a multiple of the size of this elementary cube. Specific changes in node positions can also be made to improve the fit, but even combining these strategies, it is not always feasible to represent more complex geometries with reasonable elementary module sizes. This work uses the LDEM version implemented in the Abaqus/Explicit environment. The software enabled the interaction between different parts of the model with different mesh sizes (elementary modules). In the first stage of the study, a simple geometry with different mesh sizes connected by various connection techniques was modeled. Subsequently, the response of a cantilever beam with different mesh sizes was validated. Following this validation, a more complex numerical model was developed, representing the structure of a steel fiber-reinforced concrete manhole cover. This model applied previously tested strategies, aiming to more realistically represent areas of high stress concentration and potential damage.

## 1. INTRODUÇÃO

A simulação numérica consolidou-se como uma ferramenta indispensável na engenharia civil, permitindo a análise detalhada e a previsão do comportamento de estruturas complexas sob diversas condições de carregamento. No caso de estruturas de concreto, cujo comportamento é marcado por mecanismos de falha complexos como a fissuração e o esmagamento, os modelos computacionais são essenciais para garantir a segurança e a otimização dos projetos. Dentre as abordagens disponíveis, os métodos de elementos discretos destacam-se pela sua capacidade intrínseca de simular a descontinuidade e a propagação de fraturas, oferecendo uma representação mais realista dos processos de dano (Huang et al., 2022).

Neste contexto, o Método de Elementos Discretos por Barras (Lattice Discrete Element Method – LDEM) surge como uma alternativa poderosa. O LDEM representa o meio contínuo por uma treliça espacial tridimensional, na qual a massa é concentrada nos nós e a rigidez é governada pela relação constitutiva dos elementos de barra que os conectam. A falha progressiva desses elementos permite simular de forma natural o início e a propagação de fissuras, tornando o método particularmente adequado para a análise de propagação de fissuras e fratura em materiais quase-frágeis como o concreto (Riera e Iturrioz 1995, Iturrioz et al. 2009, Kostaski et al. 2011, Vidal et al. 2020).

Apesar de sua eficácia, a abordagem tradicional do LDEM enfrenta uma limitação significativa: a construção da treliça a partir da repetição de um módulo cúbico uniforme (Figura 1). Essa restrição impõe que a geometria do sólido seja um múltiplo do tamanho do módulo elementar, resultando em aproximações geométricas grosseiras, ao modelar superfícies curvas ou inclinadas. Embora o uso de módulos elementares menores possa mitigar esse problema, tal solução acarreta um custo computacional proibitivo. Tal desafio motivou o desenvolvimento de abordagens mais flexíveis para contornar essa limitação (Kostaski et al. 2010, Silva et al. 2020, Zanichelli et al. 2021). Dessa forma, a representação de geometrias complexas com um balanço adequado entre precisão e eficiência computacional permanece um desafio.

Diante desse cenário, este trabalho tem como objetivo propor e validar uma metodologia de acoplamento de malhas de LDEM com diferentes tamanhos (refinamento local) ou orientações, utilizando o ambiente computacional do software Abaqus/Explicit. Para atingir este objetivo, foi investigado e comparadas técnicas de ligação para conectar regiões com malhas de densidades distintas; foi validada a técnica selecionada em um problema de referência com resposta conhecida (viga em balanço), e foi aplicada a metodologia validada em um estudo de caso complexo e de relevância prática: a análise estrutural de uma tampa de bueiro de concreto reforçado com fibras de aço. Cabe salientar que neste trabalho é apresentada somente uma etapa inicial desta modelagem faltando ainda ajustar melhor certos parâmetros como propriedades dos materiais e condições de contorno além de fazer reforços com barras de aço para aumentar a capacidade de carregamento da estrutura.

## 2. METODOLOGIA

O método utilizado para simulação neste trabalho é conhecido como Método dos Elementos Discretos formados por barras (do inglês LDEM). Este método é amplamente utilizado para análise de dano, fratura e propagação de fissuras tendo vários trabalhos publicados por exemplo (Riera e Iturrioz 1995, Iturrioz et al. 2009, Kostaski et al. 2010, Kostaski et al. 2012, Silva et al., 2020, Vidal et al. 2020; Zanichelli et al., 2021; Kostaski et al. 2024). A seguir é apresentado um resumo desta metodologia.

## 2.1. Fundamentação Teórica do LDEM

O LDEM representa um meio contínuo, por uma treliça espacial regular. A estrutura é composta por elementos de barra que se conectam em pontos nodais, onde a massa do sistema é concentrada (Riera e Iturrioz 1995, Iturrioz et al. 2009, Kostas et al. 2012).

### Formulação Matemática

A relação entre o sólido elástico contínuo e a treliça espacial que o representa foi apresentado por Nayfeh and Heftzy (1978). Desta forma a relação entre as propriedades elásticas do material contínuo (Módulo de Elasticidade,  $E$ , e coeficiente de Poisson,  $\nu$ ) e as propriedades dos elementos de barra da treliça é fundamental para a precisão do modelo. Para uma treliça cúbica com elementos conectando nós vizinhos e diagonais (ver Figura 1), a área da seção transversal ( $A$ ) e o módulo de elasticidade ( $E_b$ ) de cada barra são calibrados para que a resposta elástica da treliça seja equivalente à do material contínuo (Kostas et al. 2012). As equações de equilíbrio do sistema são resolvidas dinamicamente em cada nó, seguindo a segunda lei de Newton:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + F_{int}(u) = F_{ext}(t) \quad (1)$$

Onde  $M$  é a matriz de massa diagonal,  $C$  é a matriz de amortecimento,  $u$  é o vetor de deslocamentos nodais,  $F_{int}$  é o vetor de forças internas (resultante das forças nas barras conectadas ao nó) e  $F_{ext}$  é o vetor de forças externas.

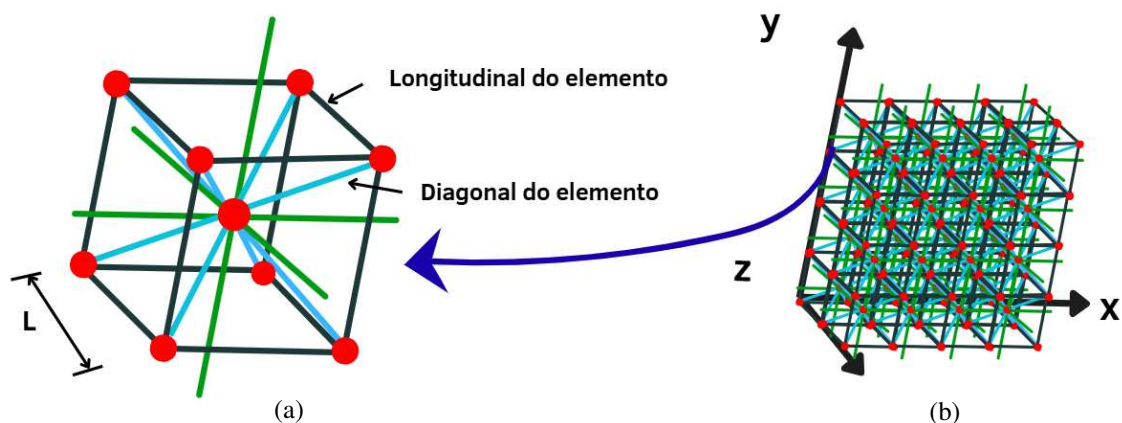


Figura 1: (a) modelo cúbico básico, (b) modelo sólido com módulos cúbicos básicos LDEM 4×4×2.

### Relação constitutiva elementar

A falha do material é simulada pela ruptura progressiva dos elementos de barra. Uma lei constitutiva bilinear, baseada na proposta de Hilerborg (1976) é geralmente adotada para as barras baseada na mecânica de fratura. Quando a deformação axial ( $\epsilon$ ) em um elemento de barra atinge o valor crítico de tração ( $\epsilon_p$ ), o elemento começa a perder rigidez até chegar ao valor de ruptura de tração ( $\epsilon_r$ ), no qual o elemento falha e é removido da simulação. Essa remoção local de um elemento redistribui os esforços para os elementos vizinhos, e a repetição desse processo simula o caminho da fissura através da estrutura de forma natural. Mais detalhes da relação constitutiva utilizada podem ser encontrados em Iturrioz et al. (2009) ou Kostas et al. (2012), entre outros.

## 2.2. Implementação do LDEM no Abaqus/Explicit

Para poder resolver problemas com geometria mais complexa ou tamanho muito grande foi implementado o LDEM dentro do ambiente do Abaqus/Explicit. O Abaqus/Explicit é particularmente adequado para análises que envolvem não-linearidades severas, como o contato

complexo e a falha de materiais, que são características intrínsecas da simulação de ruptura com LDEM. Seu algoritmo de integração temporal explícita não requer a montagem e inversão de uma matriz de rigidez global, tornando-o computacionalmente eficiente para modelos com um grande número de elementos que falham DASSAULT SYSTÈMES (2020).

Nesta adaptação os elementos de barras do LDEM são representados como elementos finitos de treliças 3D de dois nós. Mais informações sobre a implementação podem ser encontradas em Silva et al (2020) ou Kostascki et al. (2024).

No LDEM sempre foi utilizado o mesmo tamanho de elemento básico para formar a malha (ver Figura 1b). Assim se for necessária uma discretização muito fina em uma região terá que ser utilizada a mesma malha em todo o corpo simulado. Algumas pequenas alterações na direção da malha também são possíveis, contudo, sem alterações abruptas. Com a introdução do LDEM do ambiente Abaqus/Explicit é possível desenvolver modelos híbridos, nos quais a região do problema onde ocorre a ruptura é discretizada com elementos discretos, enquanto o restante é modelado com elementos finitos de maior tamanho, de modo a fornecer as condições de contorno adequadas e reduzir os graus de liberdade do problema. Assim parte deste problema foi resolvido. Porém, ainda existe a dificuldade em peças mais complexas, onde a mesma malha ou a mesma direção da malha não pode ser utilizada. Para resolver este problema se utiliza a estratégia apresentada na seguinte seção.

### 2.3. Estratégias para Acoplamento de Malhas Distintas

Um dos principais desafios deste trabalho é conectar de forma eficaz e precisa duas ou mais regiões do modelo LDEM com tamanhos de módulo elementar (densidades de malha) distintos ou até mesma malha, mas orientações diferentes. A conexão deve garantir a transferência adequada de deslocamentos e esforços através da interface, evitando a geração de concentrações de tensão indesejadas, desafio abordado pela implementação do método híbrido LDE/FE apresentado em Silva et. al (2020) e Kostascki et al. (2024).

A estratégia selecionada no Abaqus para realizar o acoplamento foi avaliada a estratégia Nó-para-Superfície, disponível no Abaqus e detalhada em sua documentação oficial (DASSAULT SYSTÈMES, 2020). A principal característica desta abordagem é a definição de uma das entidades de contato como um conjunto de nós, permitindo a conexão de um grupo de nós a uma face. Tal método é particularmente útil para criar ligações pontuais em áreas maiores.

## 3. IMPLANTAÇÃO DAS DIFERENTES MALHAS E VALIDAÇÃO

### 3.1. Estudo Preliminar em Geometria Simples

Para avaliar de forma controlada a estratégia de acoplamento de malhas descrita na seção 2.3, foi desenvolvido um modelo numérico de um bloco retangular simples e foram analisados os modos de vibração desse corpo.

#### Descrição do Modelo

Um prisma de dimensões  $L = 52$  cm  $b = 8$  cm e  $h = 24$  cm (ver Figura 2), foi modelado utilizando um material elástico linear utilizando módulo de elasticidade de 30GPa e densidade 2200 kg/m<sup>3</sup>, em princípio, com a combinação de três malhas diferentes. A malha fina com módulo elementar de 2 cm, uma intermediária com módulo elementar de 4 cm e uma mais grossa com módulo elementar de 8 cm. A face esquerda do bloco é restrita em todas as direções ficando uma viga em balanço.

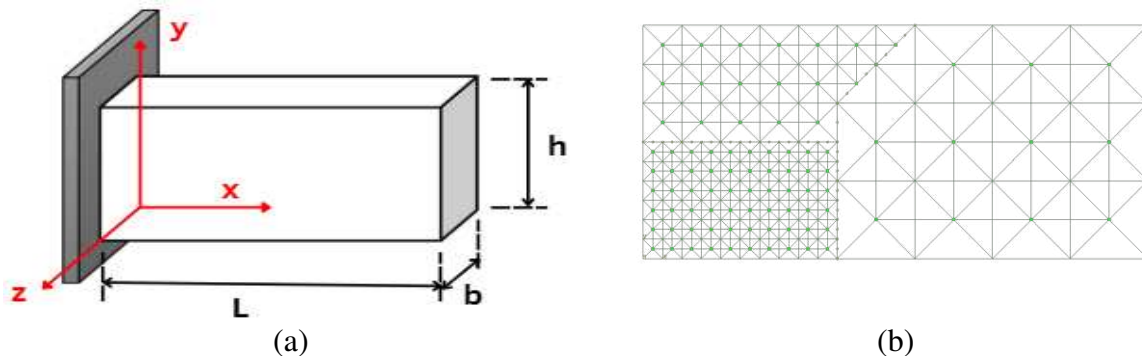


Figura 2: a) geometria e condições de contorno do corpo, b) discretização do corpo utilizando o LDEM

### Análise de frequências

A [Figura 3](#) apresenta uma comparação entre as frequências naturais obtidas pelo modelo de Elementos Discretos (LDEM-Abq) e por um modelo de Elementos Finitos (MEF).

No entanto, o modelo tende a ser menos preciso em modos de torção ou de vibração mais complexos (como os modos 3, 5 e 8), onde consistentemente subestima as frequências naturais (erros negativos grandes). Isto é devido principalmente à pouca discretização utilizada para representar o modelo com LDEM. Partes da viga têm somente um módulo e outros dois. Se utilizada uma maior discretização estes erros diminuem consideravelmente.

### 3.2. Estudo de Caso: Tapa de bueiro de concreto reforçado com fibras de aço

Se aplica a abordagem testada no item anterior à análise da capacidade resistente e do modo de falha de uma tapa de bueiro circular de concreto reforçado com fibras de aço. O objetivo é demonstrar a eficácia da estratégia de refinamento local de malha em uma geometria complexa e sob condições de carregamento que induzem altas concentrações de tensão. Cabe salientar que o presente artigo é apresentado somente a etapa inicial desta pesquisa. Existem ensaios destas placas realizadas em laboratório. Porém esses trabalhos ainda não foram publicados.

### Descrição do Problema e modelagem numérica

O objeto de estudo é uma tapa de bueiro (tampão) de concreto armado, projetada para tráfego pesado. A geometria e os materiais foram baseados nas especificações da norma brasileira ABNT NBR 10160 (2005) - "Tampões e grelhas de ferro fundido dúctil". O modelo representa uma tapa circular com 600 mm de diâmetro e 60 mm de espessura (ver [Figura 4](#)).

Foram adotadas propriedades compatíveis com os resultados experimentais realizados pelo grupo de pesquisa, sendo as propriedades homogeneizadas do concreto reforçado com fibras, Módulo de elasticidade de 32780MPa, densidade 2400 kg/m<sup>3</sup> resistência à compressão de 100 MPa, resistência a tração 16,50MPa, energia de fratura 162,5 N/m.

O modelo numérico foi construído no Abaqus/Explicit, empregando a técnica de acoplamento de malhas validada na seção anterior. Para as Condições de Contorno e Carregamento a tapa foi apoiada em sua borda externa, restringindo-se o deslocamento vertical dos nós do perímetro. O carregamento simula a área de contato de um pneu de veículo pesado, conforme a NBR 10160, sendo aplicado como uma pressão uniforme sobre uma área circular de 250 mm de diâmetro no centro da face superior da tapa, igual à utilizada no experimento. O carregamento foi aplicado de forma incremental para uma análise quasi-estática.



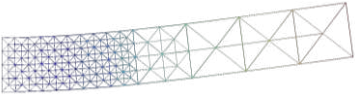
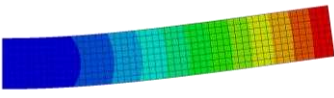
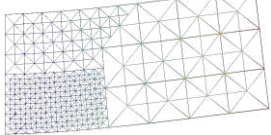
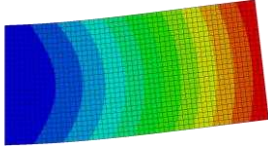
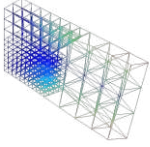
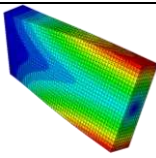

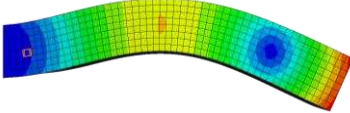
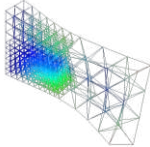
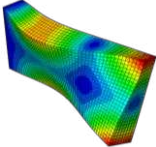
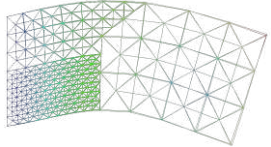
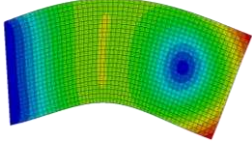
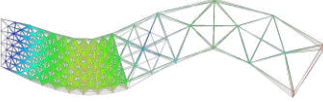
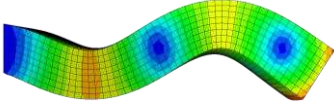
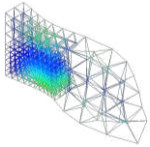
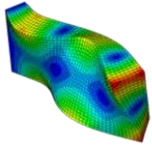
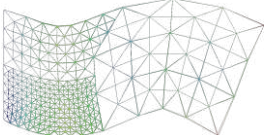
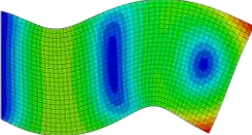
Modo	LDEM-Abq	MEF	Erro
1			3,3%
	179,66 Hz	174 Hz	
2			-2,7%
	451,86 Hz	464,4 Hz	
3			-12,5%
	592,81 Hz	677,12 Hz	
4			2,6%
	1018,6 Hz	992,08 Hz	
5			-17,9%
	1698,3 Hz	2068,2 Hz	
6			-3,4%
	1786,8 Hz	1849,9 Hz	
7			1,2%
	2505,6 Hz	2476,1 Hz	
8			-15,4%
	3029,1 Hz	3579,9 Hz	
9			-2,6%
	3808,3 Hz	3911,6 Hz	

Figura 3: Formas de vibração e resultado das frequências comparados com elementos finitos



Figura 4: (a) Vista Superior, (b) Vista inferior

Foi definida uma malha fina, com módulo elementar de 1 mm; entretanto, essa malha varia de direção conforme a região a ser simulada, não havendo coincidência entre os módulos básicos elementares.

Para montar o modelo para a simulação foi construído a partir de diferentes malhas por causa da sua geometria complexa e depois conectadas em suas interfaces para criar um modelo híbrido, uma abordagem consistente com a metodologia apresentada em trabalhos como os de Silva 2020 ou Kostascki 2024. A geometria do modelo foi composta pelas seguintes partes: (ver Figura 5) Placa superior: Simulou-se uma placa circular com espessura de 3 cm e diâmetro externo de 60 cm. Anel inferior: foi modelado um anel circular com diâmetro externo de 54 cm e diâmetro interno de 44 cm e 3 cm de espessura. Centro inferior: região circular com diâmetro de 10 cm e 3 cm de espessura. Nervuras: cada nervura possui 17 cm de comprimento, 5 cm de largura e 3 cm de espessura. Foi utilizada uma malha com módulo elementar de 1 cm para todas as partes. Para a união dessas malhas, foi utilizada a técnica de acoplamento de malhas validada na seção anterior, formando assim o modelo final para a simulação (ver Figura 6).

Em todas as partes, as posições dos nós foram levemente ajustadas em algumas extremidades para melhor representar as superfícies circulares, metodologia já empregada em diversos trabalhos anteriores, inclusive no LDEM clássico (ver detalha na Figura 6).

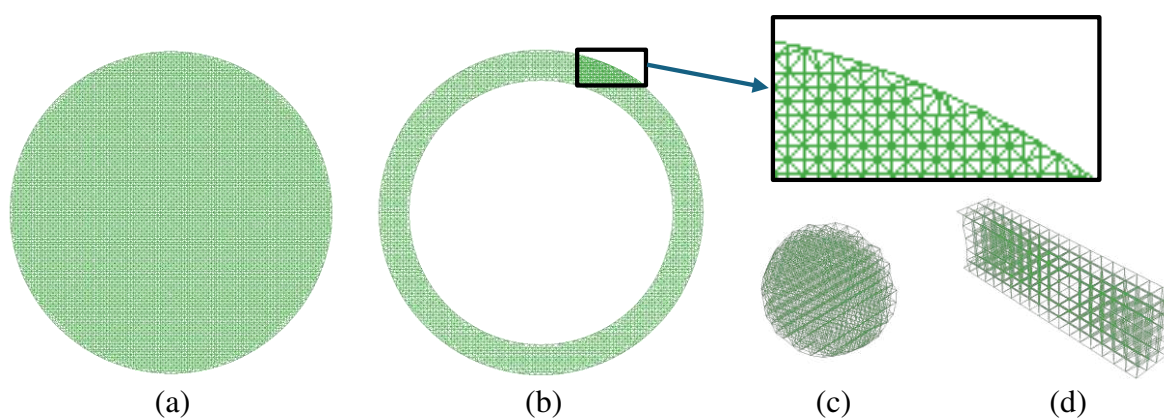


Figura 5: (a) Placa superior, (b) Anel inferior, (c) Centro inferior, (d) Nervuras



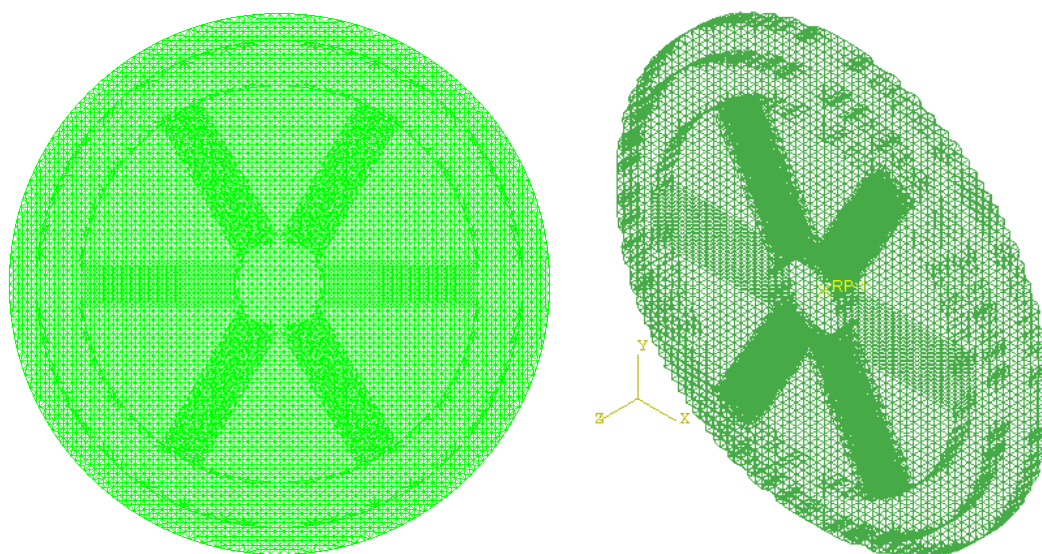
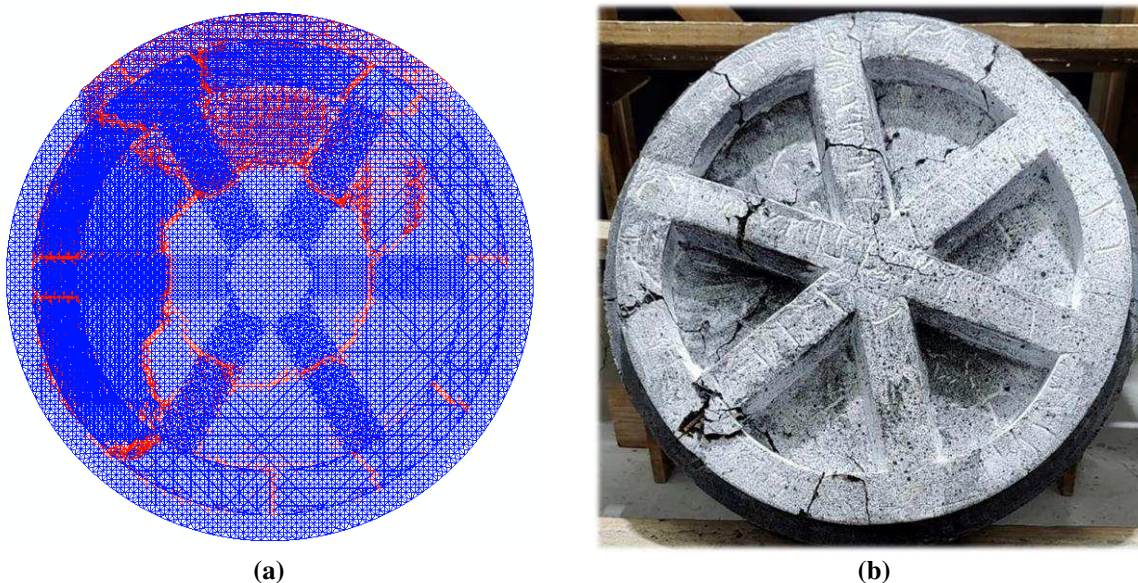


Figura 6: Representação do modelo numérico final da tampa. A geometria é formada pela união dos componentes (placa superior, anel, centro e nervuras) através do acoplamento de suas malhas.

### Padrões de Fissuração e Modo de Falha

Os resultados do modelo numérico (Figura 7a) foram diretamente comparados com o padrão de fratura observado no ensaio experimental (Figura 7b), revelando uma notável semelhança. Nessa figura os elementos pintados de vermelho representam os elementos quebrados, isto é, por onde passa a fissura, enquanto que os azuis os que ainda têm capacidade portante. O corpo de prova ensaiado, conforme a imagem fornecida, apresentou um modo de falha caracterizado por uma intensa fissuração radial partindo do centro, onde a carga foi aplicada. As fissuras se propagaram em direção à borda, seguindo e atravessando os nervos de reforço, culminando em um mecanismo de falha por punção. Notou-se uma notável semelhança entre o padrão de fratura previsto pelo modelo e o observado em laboratório. O modelo foi capaz de replicar com alta fidelidade a localização do início do dano e a trajetória das principais fissuras, validando sua capacidade de capturar mecanismos de falha complexos.



**Figura 7** – (a) Padrão de fissuração (a) previsto pelo modelo numérico (LDEM) e (b) observado no ensaio experimental.



A boa concordância entre o modo de falha simulado e o obtido experimentalmente demonstra a capacidade da metodologia de representar com fidelidade os mecanismos físicos de falha de estruturas de concreto reforçado.

### Curva Carga vs. Deslocamento

A curva de carga aplicada versus o deslocamento vertical no centro da tampa foi obtida. Ela mostrou um comportamento linear inicial, seguido por uma perda de rigidez progressiva à medida que a fissuração se desenvolvia, até atingir a carga máxima um patamar de estabilidade e a subsequente queda de resistência e ruptura brusca conforme [Figura 8](#).

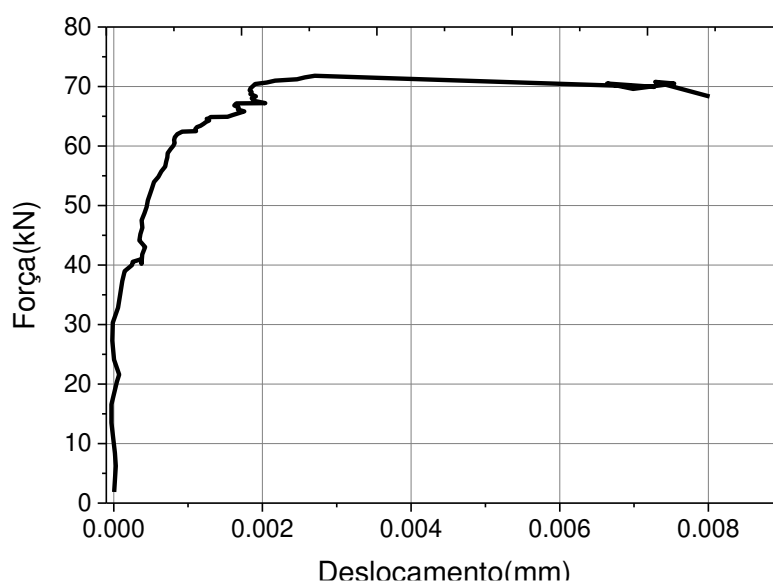


Figura 8: Diagrama de força por deslocamento

A comparação com os resultados experimentais mostrou dois problemas:

- 1- A carga máxima encontrada experimentalmente é na ordem da metade da obtida numericamente.
- 2- A deformação obtida numericamente é muito menor à encontrada experimentalmente.

Assim, há ainda vários pontos a serem ajustados para obter um modelo que represente corretamente os ensaios experimentais.

O primeiro ponto a ser corrigido é nas propriedades do material simulado. A lei constitutiva deve ser modificada de modo a representar adequadamente o material composto por concreto e fibras de aço, e não apenas concreto, como foi considerado inicialmente.

Outro ponto importante é a aplicação dos carregamentos e os apoios. Foi observado que a forma de restrição dos nós no apoio gera uma espécie de engaste, o que aumenta a rigidez do modelo enquanto que no experimento a tampa pode rotar nas bordas internas do apoio e se levantar na extremidade externa, tendo mais flexibilidade. Situação similar ocorre na região de carregamento, que obriga à placa a deformar em forma reta, enquanto isso não ocorre na realidade. As figuras 4a e 4b mostram um detalhe em um modelo 2D deste problema, que ainda deve ser corrigido no modelo tridimensional.

## 4. CONCLUSÕES

A estratégia de acoplamento foi validada em uma viga em balanço, onde a análise de frequências demonstrou boa concordância com o Método dos Elementos Finitos, especialmente

nos modos de flexão. Na aplicação ao estudo de caso da tampa de bueiro, a metodologia demonstrou um sucesso qualitativo. A simulação foi capaz de prever com alta fidelidade o padrão de fratura radial e o modo de falha por punção observados no ensaio experimental, validando o potencial do método para capturar mecanismos de falha complexos.

Contudo, a análise quantitativa apontou algumas diferenças importantes: a carga máxima prevista pelo modelo foi aproximadamente o dobro da registrada experimentalmente, enquanto a deformação foi consideravelmente menor. Concluiu-se que esses desvios indicam que ainda é necessário ajustar parâmetros do modelo, como o ajuste da lei constitutiva para representar o compósito de concreto com fibras de aço, e o refinamento das condições de contorno de apoio e carregamento para melhor corresponder à realidade do ensaio.

## REFERÊNCIAS

- ABNT: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). NBR 10160: 2005: Tampões e grelhas de ferro fundido dúctil - Requisitos e métodos de ensaios. Rio de Janeiro, 2005.
- Hillerborg, A., Modéer, M., & Petersson, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6), 773-782. 1976. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7).
- Huang, P., Pan, X., Niu, Y., Du, L. Concrete failure simulation method based on discrete element method. *Engineering Failure Analysis*, 139, 106505. 2022. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2022.106505>.
- Iturrioz I., Miguel L.F.F., Riera J.D., “Dynamic fracture analysis of concrete or rock plates by means of the Discrete Element Method”, LAJSS, Vol. 6, pp. 229-245. 2009.
- Kosteski, L. E., Friedrich, L. F., Costa, M. M., Bremm, C., Iturrioz, I., Xu, J., & Lacidogna, G. Fractal scale effect in quasi-brittle materials using a version of the discrete element method. *Fractal and Fractional*, 8(12), 678. 2024. <https://doi.org/10.3390/fractalfract8120678>.
- Kosteski, L. E., Iturrioz, I., Ronchei, C., Scorza, D., Zanichelli, A., & Vantadori, S. Experimental and combined finite-discrete element simulation of the fracture behaviour of a rigid polyurethane foam. *Engineering fracture mechanics*. Vol. 296 (Feb. 2024), art. 109818, p. 1-24. 2024. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109818>.
- Kosteski, L., Pinto, O., & Iturrioz, I. Combinação entre o Método dos Elementos Discretos Compostos por Barras e o Método dos Elementos Finitos no Ambiente Abaqus. *Mecânica Computacional*, 29(52), 5259-5283. (2010).
- Kosteski, L.; Barrios D'Ambra R ; Iturrioz I. Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method. *International Journal of Fracture*, v. 174, p. 139-161, 2012.
- Nayfeh, A. H., & Hefzy, M. S. Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures. *Aiaa journal*, 16(8), 779-787. 1978. <https://doi.org/10.2514/3.7581>.
- Riera JD, Iturrioz I. Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading. *Communications in Num. Meth. in Eng.*, Vol. 11, pp. 417-426.1995. <https://doi.org/10.1002/cnm.1640110506>.
- Silva, G. S., Kosteski, L. E., & Iturrioz, I. Analysis of the failure process by using the Lattice Discrete Element Method in the Abaqus environment. *Theoretical and applied fracture mechanics*, 107, 102563. 2020. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102563>.
- Vidal, C.D.M.; Da Silva, G.S.; Valsecchi, C.; Kosteski, L.E. Analysis of strength of brittle materials under different strain rates using LDEM simulations. *Rev. Sul-americana Eng. Estrutural*, 17, 40–59, 2020. <https://doi.org/10.5335/rsaee.v17i1.10043>.
- Zanichelli, A., Colpo, A., Friedrich, L., Iturrioz, I., Carpinteri, A., & Vantadori, S. A novel implementation of the LDEM in the ansys LS-DYNA finite element code. *Materials*, 14(24), 7792. 2021. <https://doi.org/10.3390/ma14247792>.