

ANÁLISE DE FALHAS EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS COM FIBRAS EMBUTIDAS UTILIZANDO A MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO EXPANDIDA

FAILURE ANALYSIS OF ANISOTROPIC MATERIALS WITH EMBEDDED FIBRES USING THE EXTENDED LUMPED DAMAGE MECHANICS

Daniel V. C. Teles^a, David L. N. F. Amorim^{b,c} e Edson D. Leonel^a

^a*Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Avenida Trabalhador São-Carlense, 400, São Carlos-SP, Brasil, danielvcteles@usp.br, <https://ppgset.eesc.usp.br/>*

^b*Laboratório de Modelagem Matemática em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe, Avenida Marcelo Déda Chagas s/n, São Cristóvão-SE, Brasil, davidnf@academico.ufs.br, <http://www.ipd.ufs.br>*

^c*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Campus A. C. Simões, Maceió-AL, Brasil, davidnf@academico.ufs.br, <https://ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec/>*

Palavras-chave: Materiais anisotrópicos, reforços embutidos, mecânica do dano.

Resumo. O uso de materiais com comportamento anisotrópico tem crescido nas últimas décadas, impulsionado pela busca por soluções estruturais mais eficientes. O reforço com fibras destaca-se como estratégia eficaz para melhorar o desempenho mecânico em direções de menor resistência. A modelagem de falhas desses materiais, contudo, ainda representa um desafio relevante. Este trabalho emprega a Mecânica do Dano Concentrado Expandida (XLDM) para descrever o comportamento fisicamente não linear de materiais anisotrópicos reforçado por fibras. A abordagem tem se mostrado robusta na análise de processos de degradação estrutural. Adota-se uma técnica de embutimento para representar os efeitos dos reforços sem introduzir novos graus de liberdade. A formulação foi implementada em um código computacional baseado no método dos elementos finitos com estrutura baseada em posições, permitindo considerar os efeitos da não linearidade geométrica na evolução do dano.

Keywords: Anisotropic materials, embedded reinforcements, damage mechanics.

Abstract. The use of materials with anisotropic behaviour has grown in recent decades, driven by the pursuit of more efficient structural solutions. Fibre reinforcement stands out as an effective strategy to improve mechanical performance in directions of lower intrinsic strength. However, failure modelling in such materials remains a relevant challenge. This study employs the Extended Lumped Damage Mechanics (XLDM) approach to describe the physically nonlinear behaviour of fibre reinforced anisotropic materials. The method has proven robust in analysing structural degradation. An embedding technique is used to account for reinforcement effects without adding degrees of freedom. The formulation has been implemented in a computational code based on the finite element method with a position-based structure, allowing the consideration of geometric nonlinearity in damage evolution.

1 INTRODUÇÃO

A crescente demanda por soluções estruturais sustentáveis tem impulsionado o uso de materiais com menor impacto ambiental, como a madeira e materiais compósitos reforçados. Esse cenário tem renovado o interesse na modelagem computacional da falha em materiais anisotrópicos, os quais frequentemente apresentam comportamento não linear complexo, associado à degradação direcional de suas propriedades mecânicas.

As teorias clássicas de plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano contínuo (CDM) fornecem os fundamentos para a modelagem de não linearidades físicas em estruturas. A plasticidade é amplamente utilizada para representar deformações permanentes (Simo e Hughes, 2006; Souza Neto et al., 2008), enquanto a CDM introduz variáveis internas de dano para representar a degradação progressiva de rigidez, usualmente no contexto de processos termodinamicamente irreversíveis (Chaboche, 1981; Sun, 2018). Já a mecânica da fratura, em especial os modelos coesivos (Hillerborg et al., 1976; Santos e Sousa, 2020) e os modelos de campo de fase (de Borst e Chen, 2024), permite representar a propagação de trincas de forma explícita ou difusa. Apesar de seus avanços, modelos baseados em CDM e campos de fase podem apresentar dependência de malha ou exigir discretizações altamente refinadas (de Borst, 2002; Peerlings et al., 1996; Proserpio et al., 2020), salvo quando regularizados por técnicas não-locais ou de gradiente (Lenz e Mahnken, 2023; Xue et al., 2024).

Como alternativa eficiente, a Mecânica do Dano Concentrado (LDM), proposta originalmente por Flórez-López (1993), concentra a degradação material em regiões discretas da estrutura e vem sendo empregada com sucesso em análises não lineares de estruturas reticuladas (Kaewkulchai e Williamson, 2004; Amorim et al., 2014; Bazán et al., 2019; Coelho et al., 2022). Essa abordagem foi posteriormente estendida para domínios bidimensionais contínuos através da Mecânica do Dano Concentrado Estendida (XLDM), utilizando extensômetros numéricos embutidos em elementos finitos (Amorim et al., 2018; Picón et al., 2021). A XLDM tem mostrado resultados promissores na simulação de falhas em materiais quase-frágeis com leis de dano exponenciais (Teles et al., 2023), no estudo de domínios reforçados com fibras (Cunha et al., 2024) e em formulações isogeométricas (Nardi e Leonel, 2024). Além disso, estudos comparativos com modelos coesivos demonstram sua objetividade de malha, uma vez que a degradação é tratada de forma intra-elementar (Amorim et al., 2024).

Recentemente, Teles et al. (2025) propuseram uma generalização da XLDM ao formulá-la no contexto do Método dos Elementos Finitos baseado em Posição (Bonet et al., 2000; Coda e Greco, 2004). Essa abordagem permite análises geometricamente exatas, com consideração intrínseca de grandes deslocamentos e rotações, resultando em uma formulação não corrotacional de implementação compacta. A precisão do método tem sido validada em diversas aplicações não lineares (Coda et al., 2022; Carvalho et al., 2023; Avancini et al., 2024). Tal estratégia é adotada aqui como base computacional para os avanços explorados.

Com base nesse arcabouço, propõe-se uma reformulação da XLDM sem o uso de extensômetros numéricos, o que contribui para a redução do custo computacional e para a simplificação da implementação. A abordagem também é estendida a materiais anisotrópicos, permitindo a análise de estruturas com propriedades direcionais, e aplicada a domínios reforçados com fibras embutidas, modeladas elasticamente conforme a técnica proposta por Vanalli et al. (2008) e adaptada ao MEF posicional por Sampaio et al. (2013). As análises numéricas incluem a flexão de três pontos em viga de madeira colada e a tração de uma chapa ortotrópica com furo central e reforços, possibilitando avaliar o desempenho da formulação em diferentes contextos estruturais.

2 XLDM SEM NUMEXES NA ABORDAGEM POSICIONAL DO MEF

O presente trabalho dá continuidade a desenvolvimentos prévios da XLDM, formulada no contexto da abordagem posicional do MEF. Detalhes adicionais sobre a formulação original e os algoritmos de correção global e local podem ser encontrados em [Teles et al. \(2025\)](#). Neste estudo, o foco recai sobre as contribuições relacionadas à reformulação da XLDM sem o uso de extensômetros numéricos (numexes) e à sua aplicação em materiais anisotrópicos na presença de reforços.

Na XLDM, as bandas de localização, responsáveis por concentrar os efeitos da danificação material, são posicionadas nas faces dos elementos finitos, com crescimento orientado na direção perpendicular a essas faces, conforme ilustrado na Figura 1(a). A evolução dessas bandas é regida por uma lei de evolução da danificação, sendo adotada neste trabalho a lei exponencial proposta em [Teles et al. \(2023\)](#), cujo comportamento está representado na Figura 1(b) e cuja forma matemática é dada por:

$$g(\sigma, e) = \sigma - h(e) \leq 0 \quad ; \quad h(e) = \sigma_{cr} \exp(qe) \quad (1)$$

em que e representa o valor da banda de localização e σ a componente de tensão associada. Como o crescimento das bandas ocorre perpendicularmente às faces dos elementos, representando a abertura de fissuras, a equação da lei de danificação (Eq. 1) deve ser avaliada em cada nó de cada banda de localização:

$$g_i^{ij}(\sigma_i^{ij}, e_i^{ij}) = \sigma_i^{ij} - h_i^{ij}(e_i^{ij}) \leq 0 \quad ; \quad g_j^{ij}(\sigma_j^{ij}, e_j^{ij}) = \sigma_j^{ij} - h_j^{ij}(e_j^{ij}) \leq 0 \quad (2)$$

sendo g_i^{ij} e g_j^{ij} as funções de evolução do dano, e h_i^{ij} e h_j^{ij} as correspondentes funções de amolecimento associadas aos nós i e j da banda ij ; σ_i^{ij} e σ_j^{ij} representam as tensões de Cauchy projetadas; e e_i^{ij} e e_j^{ij} os respectivos valores de banda de localização. O parâmetro q controla o grau de amolecimento e pode ser relacionado às propriedades do material conforme:

$$q = -\frac{\sigma_{cr}}{G_f} \quad (3)$$

em que σ_{cr} é a resistência à tração do material e G_f a energia de fratura.

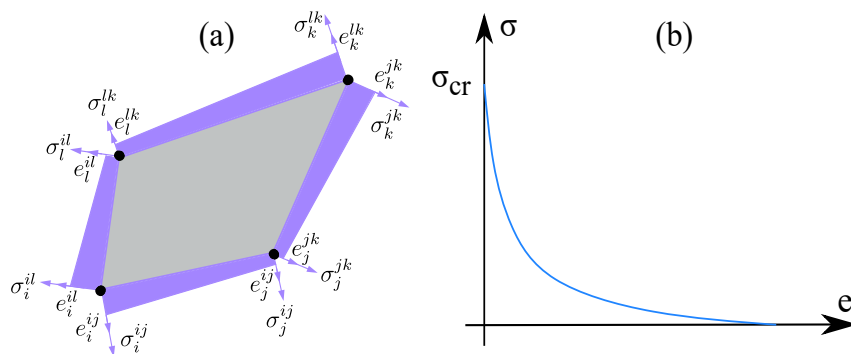


Figura 1: Representação das bandas de localização na XLDM e comportamento da lei de dano.

A determinação dos valores das bandas de localização em cada passo de carga é realizada por meio de um esquema preditor-corretor que emprega as leis constitutiva e de dano adotadas. Mais detalhes sobre a implementação deste procedimento encontram-se em [Teles et al. \(2025\)](#).

Uma vez conhecidos os valores das bandas de um dado elemento, calcula-se o deslocamento associado à danificação por meio da seguinte relação:

$$\vec{u}^d = \begin{Bmatrix} s_{ij}e_i^{ij} - s_{il}e_i^{il} \\ -c_{ij}e_i^{ij} + c_{il}e_i^{il} \\ s_{ij}e_j^{ij} + s_{jk}e_j^{jk} \\ -c_{ij}e_j^{ij} - c_{jk}e_j^{jk} \\ -s_{lk}e_k^{lk} + s_{jk}e_k^{jk} \\ c_{lk}e_k^{lk} - c_{jk}e_k^{jk} \\ -s_{il}e_l^{il} - s_{lk}^y e_l^{lk} \\ c_{il}e_l^{il} + c_{lk}e_l^{lk} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Conforme discutido anteriormente, este trabalho emprega a abordagem posicional do MEF (Bonet et al., 2000; Coda e Greco, 2004), na qual o campo de deformações é obtido diretamente a partir das posições nodais do elemento. Além disso, utiliza-se o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK), que relaciona os tensores de Green-Lagrange e de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Definindo \vec{X}^d como o vetor de posições do sólido na configuração imediatamente anterior ao início da danificação, e somando-o ao deslocamento induzido pela degradação (Eq. 4), obtém-se o vetor de posições na configuração danificada:

$$\vec{Y}^d = \vec{X}^d + \vec{u}^d \quad (5)$$

Na formulação clássica da XLDM, os valores das bandas são usados para calcular os alongamentos dos extensômetros numéricos. Contudo, neste estudo, os vetores \vec{X}^d e \vec{Y}^d são utilizados diretamente para calcular o tensor de deformações de Green-Lagrange devido à danificação:

$$\mathbf{E}^d = \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}^d)^T \cdot \mathbf{A}^d - \mathbf{I} \right) \quad (6)$$

em que \mathbf{A}^d é o gradiente da função de mapeamento deformado, calculado conforme a abordagem posicional, mas com base nos vetores \vec{X}^d e \vec{Y}^d . A partir disso, determina-se o campo de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie com o modelo SVK:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^d) \quad (7)$$

em que \mathbb{C} é o tensor constitutivo do material e \mathbf{E} o tensor de deformações totais.

3 ANISOTROPIA EM XLDM

A XLDM tem sido empregada com sucesso na modelagem de comportamentos fisicamente não lineares em problemas de engenharia. No entanto, este trabalho representa, até onde sabem os autores, o primeiro esforço em aplicar a XLDM a problemas envolvendo materiais anisotrópicos.

No modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, adota-se o mesmo tensor de elasticidade utilizado na lei de Hooke. Considerando estados planos, o tensor constitutivo e sua inversa são definidos por:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{16} \\ \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{26} \\ \mathbb{C}_{16} & \mathbb{C}_{26} & \mathbb{C}_{66} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbb{D} = \mathbb{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{11} & \mathbb{D}_{12} & \mathbb{D}_{16} \\ \mathbb{D}_{12} & \mathbb{D}_{22} & \mathbb{D}_{26} \\ \mathbb{D}_{16} & \mathbb{D}_{26} & \mathbb{D}_{66} \end{bmatrix} \quad (8)$$

em que \mathbb{C}_{ij} e \mathbb{D}_{ij} são os componentes do tensor de elasticidade e de sua inversa, respectivamente, já considerando as condições de simetria tensorial. As componentes da inversa do tensor de elasticidade são dadas por:

$$\mathbb{D}_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad \mathbb{D}_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \mathbb{D}_{16} = \frac{\eta_{12,1}}{2E_1}, \quad \mathbb{D}_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad \mathbb{D}_{26} = -\frac{\eta_{12,2}}{2E_2}, \quad \mathbb{D}_{66} = \frac{1}{2G_{12}} \quad (9)$$

em que E_1 e E_2 são os módulos de elasticidade nas direções 1 e 2, ν_{12} é o coeficiente de Poisson, G_{12} é o módulo de elasticidade transversal, e $\eta_{12,1}$ e $\eta_{12,2}$ são os coeficientes de influência mútua nas respectivas direções. Esses dois últimos coeficientes são nulos para materiais ortotrópicos e isotrópicos.

Para incorporar o comportamento anisotrópico na formulação XLDM, além da adoção do tensor constitutivo apresentado, são considerados valores distintos para os parâmetros da lei de dano em cada direção do material. Assim, tanto a resistência à tração σ_{cr} quanto o parâmetro q (Eq. 3) são definidos separadamente por direção, permitindo representar a diferença de resistência e ductilidade ao longo das direções principais da anisotropia.

4 RESULTADOS

Para validar a formulação proposta da XLDM sem a utilização de numexes em meios anisotrópicos, foram realizadas duas aplicações numéricas. A tolerância adotada, tanto para o equilíbrio global quanto para o processo de correção local, foi de 10^{-8} . Todas as simulações foram conduzidas em um computador pessoal com processador AMD Ryzen™ 9 7950X 16-Core @ 4.50 GHz e 64 GB de memória RAM.

4.1 Flexão em 3 pontos em viga de madeira

O primeiro exemplo visa verificar a formulação proposta em uma viga de madeira da espécie *Norway spruce* (*Picea abies*), submetida à flexão em três pontos. O corpo de prova é composto por três peças coladas com resina epóxi ARALDITE® AW106/953U, conforme ilustrado na Figura 2. Assume-se adesão perfeita nas interfaces coladas. A orientação das peças foi escolhida de modo a evitar a propagação indesejada de fissuras devido à concentração de tensões nos apoios. Detalhes adicionais a respeito do experimento realizado podem ser encontrados em [Dourado et al. \(2008\)](#).

As propriedades experimentais reportadas para o material são: módulo de elasticidade nas direções 1 e 2, respectivamente, $E_1 = 9900$ MPa e $E_2 = 410$ MPa; coeficiente de Poisson $\nu_{12} = 0,018$; módulo de elasticidade transversal $G_{12} = 610$ MPa; resistência à tração $\sigma_{cr} = 1,66$ MPa; e energia de fratura $G_f = 0,14481$ N/mm. No entanto, nas simulações realizadas no presente trabalho foi adotado $E_2 = 270$ MPa. Esta redução é justificada em [Dourado et al. \(2015\)](#), que sugerem a utilização de um módulo de elasticidade equivalente para levar em consideração

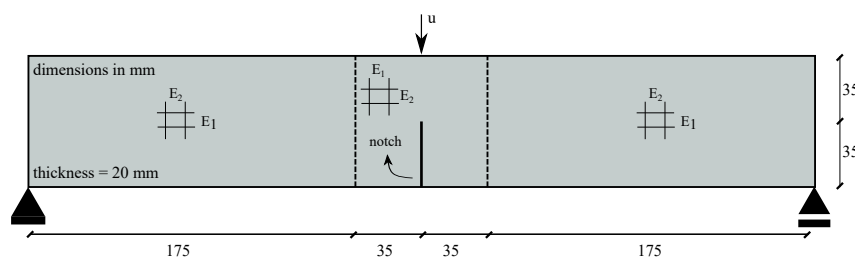


Figura 2: Geometry and boundary conditions of the three-point bending test.

efeitos de cisalhamento. Além disso, foi adotada uma lei de dano exponencial, com σ_{cr} igual à resistência à tração reportada. Substituindo-se os valores de σ_{cr} e G_f na Eq. 3, obtém-se o parâmetro $q = -11,46 \text{ mm}^{-1}$.

O domínio foi discretizado com quatro malhas diferentes, considerando estado plano de tensões. A região central da viga foi refinada, pois é onde se espera a concentração e evolução da danificação (Fig. 3a). O entalhe central do corpo de prova foi representado por duplicação dos nós centrais ao longo de sua altura.

A Figura 3(b) mostra a evolução das bandas de localização apenas na região central da viga, dado que não há danificação nas regiões laterais. Observa-se que as bandas se desenvolvem justamente na região onde se espera a fissuração para as condições de contorno adotadas.

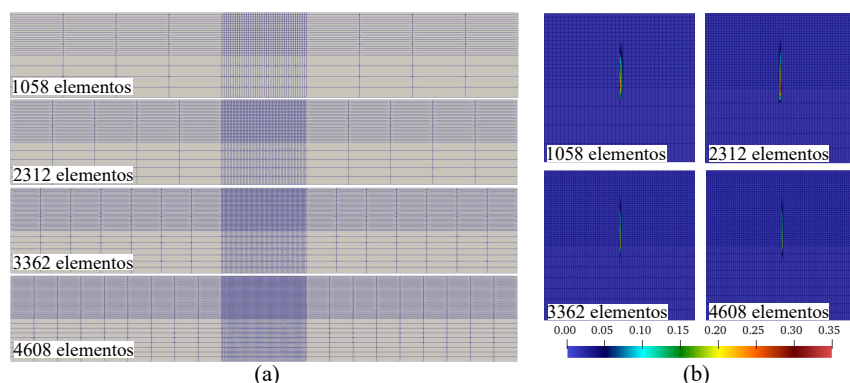


Figura 3: Malhas utilizadas (a) e evolução das bandas de localização (b).

A Figura 4(a) apresenta os resultados numéricos obtidos com as quatro malhas testadas, juntamente com os dados experimentais reportados em [Dourado et al. \(2008\)](#). Já a Figura 4(b) mostra a comparação entre as malhas mais refinadas. Observa-se boa concordância ao longo de toda a curva, bem como a convergência dos resultados com o refinamento da malha.

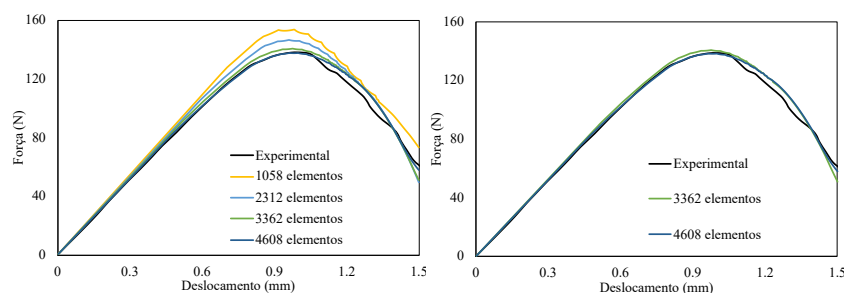


Figura 4: Resultados numéricos para todas as malhas testadas (a) e para as duas mais refinadas (b).

4.2 Chapa anisotrópica com furo e reforços

O segundo exemplo trata de uma chapa ortotrópica com furo central submetida à tração, conforme ilustrado na Figura 5(a). A chapa é reforçada com fibras distribuídas aleatoriamente em seu domínio, em uma fração volumétrica de 1%, com diferentes valores de módulo de elasticidade. O objetivo é avaliar a influência da rigidez dos reforços na evolução da danificação e na rigidez global da estrutura.

As propriedades adotadas para o material da matriz são: $E_1 = 300 \text{ MPa}$, $E_2 = 3000 \text{ MPa}$, $\nu_{12} = 0,01$ e $G_{12} = 30 \text{ MPa}$. Adota-se novamente a lei de dano exponencial, com $\sigma_{cr} = 3,0$

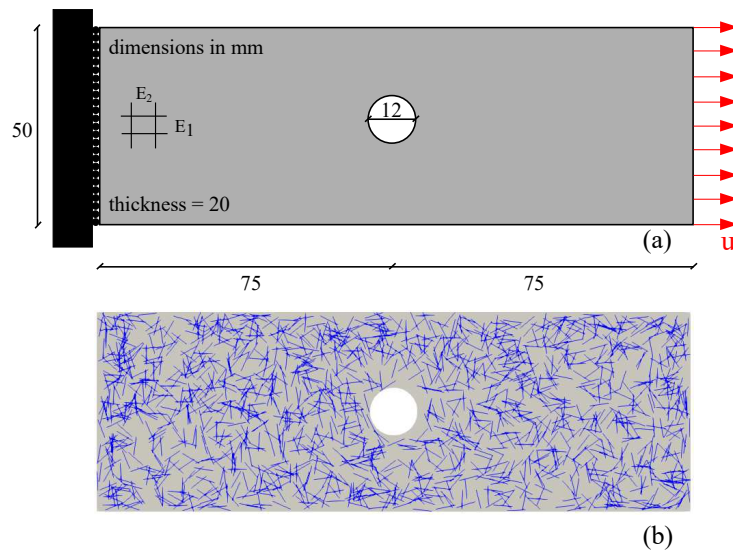


Figura 5: Geometria e condições de contorno (a); malha dos reforços (b).

MPa e $q = -0,1 \text{ mm}^{-1}$. As fibras de reforço apresentam comportamento elástico, com diâmetro de 0,5 mm, comprimento de 5 mm e módulo de elasticidade variável conforme indicado nas legendas dos resultados. O domínio foi discretizado com 7755 elementos em estado plano de tensões e as fibras foram representadas por 1528 segmentos, resultando na fração volumétrica desejada. A Figura 5(b) apresenta a distribuição das fibras no domínio.

A Figura 6 mostra os resultados numéricos para diferentes valores de módulo de elasticidade das fibras. Como esperado, o aumento do módulo da rigidez dos reforços promove o aumento da rigidez global da chapa. Além disso, observa-se que chapas com fibras mais rígidas apresentam comportamento mais frágil após o início da danificação, com um trecho de endurecimento seguido de falha. Em contraste, chapas com reforços menos rígidos exibem um comportamento dúctil, com um trecho maior de amolecimento.

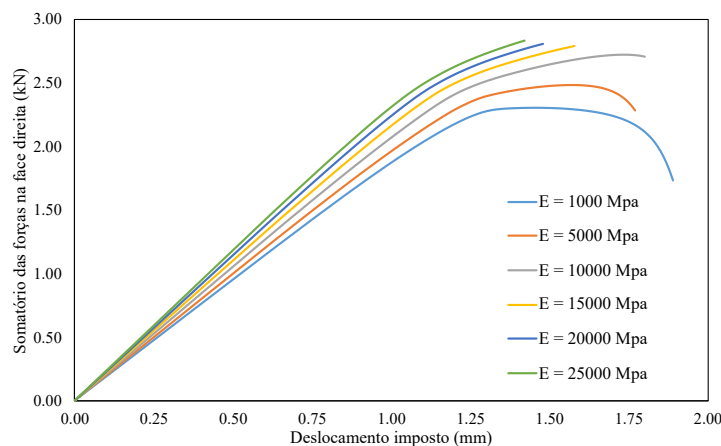


Figura 6: Malha de fibras e resultados numéricos.

A Figura 7 ilustra a evolução das bandas de localização. Observa-se que a danificação ocorre, como esperado, na região do furo — onde há concentração de tensões. Nota-se ainda que o aumento da rigidez dos reforços promove uma distribuição mais ampla e homogênea das bandas, com menor intensidade de danificação. Esse comportamento reforça o papel estrutural dos reforços na redistribuição de tensões e no atraso da propagação da danificação.

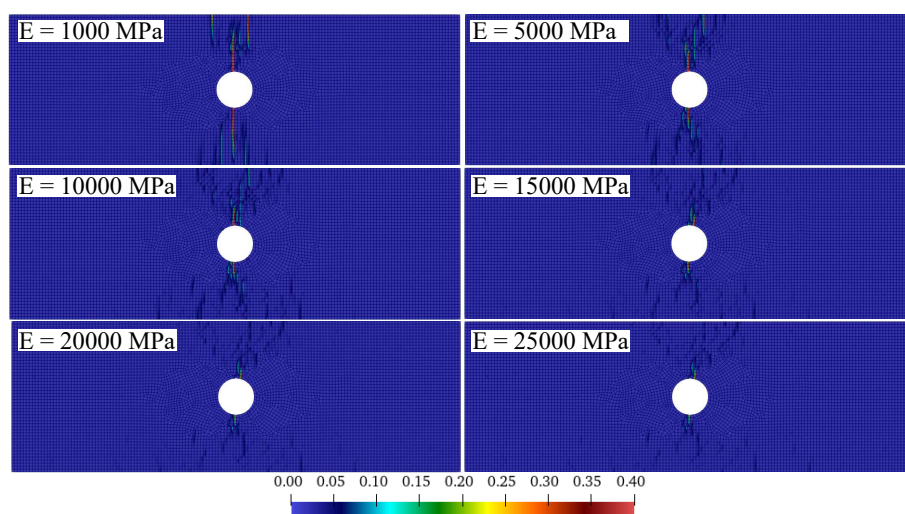


Figura 7: Evolução das bandas de localização.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi empregada a abordagem da XLDM sem o uso de extensômetros numéricos para modelar o comportamento fisicamente não linear de materiais anisotrópicos com reforços embutidos. A formulação proposta foi implementada em um código computacional baseado no método dos elementos finitos com estrutura posicional, permitindo a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica na evolução do dano.

A anisotropia material foi incorporada por meio da modificação do tensor constitutivo elástico e da adoção de parâmetros distintos na lei de dano para cada direção do material. Além disso, a técnica de embutimento utilizada para representar os reforços não introduziu novos graus de liberdade no sistema, contribuindo para a eficiência computacional da abordagem.

Os resultados numéricos obtidos em dois casos distintos demonstraram a robustez, consistência e aplicabilidade da formulação proposta, evidenciando seu potencial para análise de materiais com comportamento anisotrópico e reforços internos.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro durante seu curso de doutorado.

REFERÊNCIAS

- Amorim D.L.N.F., Picón R., Vieira C.S., e Flórez-López J. Intra-element versus inter-element crack propagation: the numerical extensometer approach. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 46:360, 2024. <http://doi.org/10.1007/s40430-024-04951-6>.
- Amorim D.L.N.F., Piedade Neto D., Proença S.P.B., e Flórez-López J. The extended lumped damage mechanics: A new formulation for the analysis of softening with fe size-independence. *Mechanics Research Communications*, 91:13–18, 2018. <http://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2018.05.001>.
- Amorim D.L.N.F., Proença S.P.B., e Flórez-López J. Simplified modeling of cracking in concrete: Application in tunnel linings. *Engineering Structures*, 70:23–35, 2014. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.03.031>.

- Avancini G., Franci A., Idelsohn S., e Sanches R.A.K. A particle-position-based finite element formulation for free-surface flows with topological changes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 429:117118, 2024. <http://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117118>.
- Bazán J.A.V., Beck A.T., e Flórez-López J. Random fatigue of plane frames via lumped damage mechanics. *Engineering Structures*, 182:301–315, 2019. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.12.008>.
- Bonet J., Wood R.D., Mahaney J., e Heywood P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:579–595, 2000. [http://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00428-4](http://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00428-4).
- Carvalho P.R.P., Coda H.B., e Sanches R.A.K. A large strain thermodynamically-based viscoelastic–viscoplastic model with application to finite element analysis of polytetrafluoroethylene (ptfe). *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 97:104850, 2023. <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104850>.
- Chaboche J.L. Continuous damage mechanics — a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nuclear Engineering and Design*, 64:233–247, 1981. [http://doi.org/10.1016/0029-5493\(81\)90007-8](http://doi.org/10.1016/0029-5493(81)90007-8).
- Coda H.B., Bernardo C.C.L.C.G., e Paccola R.R. A fem formulation for the analysis of laminated and functionally graded hyperelastic beams with continuous transverse shear stresses. *Composite Structures*, 292:115606, 2022. <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115606>.
- Coda H.B. e Greco M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:3541–3557, 2004. <http://doi.org/10.1016/J.CMA.2004.01.005>.
- Coelho K.O., Leonel E.D., e Flórez-López J. A methodology to evaluate corroded RC structures using a probabilistic damage approach. *Computers and Concrete*, 29:1–14, 2022. <http://doi.org/10.12989/cac.2022.29.1.001>.
- Cunha R.N., Amorim D.L.N.F., Proença S.P.B., e Flórez-López J. Modeling the initiation and propagation of complex networks of cracks in reinforced concrete plates. *Engineering Structures*, 308:117993, 2024. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.117993>.
- de Borst R. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:95–112, 2002. [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00082-0](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00082-0).
- de Borst R. e Chen L. Phase-field modelling of cohesive interface failure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 125:1–18, 2024. <http://doi.org/10.1002/nme.7412>.
- Dourado N., Morel S., Moura M.F.S.F., Valentin G., e Morais J. Comparison of fracture properties of two wood species through cohesive crack simulations. *Composites: Part A*, 39:415–427, 2008. <http://doi.org/10.1016/j.compositesa.2007.08.025>.
- Dourado N., Moura M.F.S.F., Morel S., e Morais J. Wood fracture characterization under mode I loading using the three-point-bending test. experimental investigation of picea abies I. *International Journal of Fracture*, 194:1–9, 2015. <http://doi.org/10.1007/s10704-015-0029-y>.
- Flórez-López J. Modelos de daño concentrados para la simulación numérica del colapso de pórticos planos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 9:123–139, 1993.
- Hillerborg A., Modéer M., e Petersson P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–781, 1976. [http://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](http://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7).
- Kaewkulchai G. e Williamson E.B. Beam element formulation and solution procedure

- for dynamic progressive collapse analysis. *Computers & Structures*, 82:639–651, 2004. <http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2003.12.001>.
- Lenz P. e Mahnken R. Non-local integral-type damage combined to mean-field homogenization methods for composites and its parallel implementation. *Composite Structures*, 314:116911, 2023. <http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2023.116911>.
- Nardi D.C. e Leonel E.D. An extended lumped damage mechanics igabem formulation for quasi-brittle material failure. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 169:105955, 2024. <http://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105955>.
- Peerlings R.H.J., de Borst R., Brekelmans W.A.M., e de Vree J.H.P. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3391–3403, 1996.
- Picón R.A., Santos D.M., Teles D.V., Amorim D.L.N.F., Zhou X., Bai Y., Proença S.P.B., e Flórez-López J. Modeling of localization using nash variational formulations: The extended damage mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 258:108083, 2021. <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.108083>.
- Proserpio D., Ambati M., Lorenzis L.D., e Kiendl J. A framework for efficient isogeometric computations of phase-field brittle fracture in multipatch shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 372:113363, 2020. <http://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113363>.
- Sampaio M.S., Paccola R.R., e Coda H.B. Fully adherent fiber–matrix fem formulation for geometrically nonlinear 2d solid analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 66:12–25, 2013. <http://doi.org/10.1016/J.FINEL.2012.10.003>.
- Santos F.L.G. e Sousa J.L.A.O. A viscous-cohesive model for concrete fracture in quasi-static loading rate. *Engineering Fracture Mechanics*, 228:106893, 2020. <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106893>.
- Simo J.C. e Hughes T.J. *Computational inelasticity*. Springer Science & Business Media, 2006.
- Souza Neto E.A., Peric D., e Owen D.R.J. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2008.
- Sun B. A continuum model for damage evolution simulation of the high strength bridge wires due to corrosion fatigue. *Journal of Constructional Steel Research*, 146:76–83, 2018. <http://doi.org/10.1016/j.jcsr.2018.03.031>.
- Teles D.V.C., Amorim D.L.N.F., e Leonel E.D. The failure prediction of reinforced composite quasi-brittle structures by an improved version of the extended lumped damage approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 126(3):e70006, 2025. <http://doi.org/10.1002/nme.70006>.
- Teles D.V.C., Cunha R.N., Picón R.A., Amorim D.L., Bai Y., Proença S.P., e Flórez-López J. A new formulation of cracking in concrete structures based on lumped damage mechanics. *Structural Engineering and Mechanics*, 88:451–462, 2023. <http://doi.org/10.12989/sem.2023.88.5.451>.
- Vanalli L., Paccola R.R., e Coda H.B. A simple way to introduce fibers into fem models. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24:585–603, 2008. <http://doi.org/10.1002/cnm.983>.
- Xue L., Ren X., e Freddi F. Analytical solution of a gradient-enhanced damage model for quasi-brittle failure. *Applied Mathematical Modelling*, 132:342–365, 2024. <http://doi.org/10.1016/j.apm.2024.04.053>.