Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XLII, pp. 715-725
A. Caggiano, G. Etse, P. Folino, M. Goldschmit, M. Pucheta, M. Storti (Eds.)
A. Cardona, F. Cavalieri, M. Pucheta (Issue eds.)
Buenos Aires, November 11-14, 2025

SOBRE SISTEMAS LAGRANGIANOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO SOBRE GRUPOS DE LIE E INTEGRADORES VARIACIONALES

ON TIME-DEPENDENT LAGRANGIAN SYSTEMS OVER LIE GROUPS AND VARIATIONAL INTEGRATORS

Leonardo Colombo[a], María Emma Eyrea Irazú[c], David Martín de Diego[b], María Daniela Sanchez[c] y Marcela Zuccalli[c]

[a]*Centro de Automática y Robótica, CSIC-UPM. Madrid, España, leonardo.colombo@csic.es, https://www.car.upm-csic.es/*

[b]*Instituto de Ciencias Matemáticas, CSIC-UAM-UC3M-UCM. Madrid, España, maemma@mate.unlp.edu.ar, https://www.icmat.es/es/*

[c]*Departamento de Matemática, Centro de Matemática (CMaLP), Facultad de Ciencias Exactas, UNLP. Buenos Aires, Argentina, maemma@mate.unlp.edu.ar, dsanchez@mate.unlp.edu.ar, marce@mate.unlp.edu.ar https://cmalp.mate.unlp.edu.ar/*

Palabras clave: Sistemas Lagrangianos, Grupos de Lie, Sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo, Integradores variacionales.

Resumen. Los sistemas Lagrangianos mecánicos dependientes del tiempo son de gran interés en diversas ramas de la ingeniería y la física. En particular, en robótica, se consideran numerosos sistemas no autónomos, es decir, dependientes del tiempo. En este trabajo presentamos la dinámica de tales sistemas en grupos de Lie, considerando tanto variables temporales continuas como discretas. En este marco, abordamos el problema de integrar sus ecuaciones de movimiento mediante técnicas variacionales discretas. Ilustramos el enfoque con ejemplos sencillos cuyo espacio de configuración es el grupo euclidiano y proponemos sus versiones discretas. Asimismo, estudiamos un ejemplo en el grupo de rotaciones espaciales y, finalmente, discutimos posibles líneas de investigación futura orientadas al desarrollo de integradores variacionales para sistemas más generales.
Keywords: Lagrangian systems, Lie groups, Time-dependent Lagrangian systems, Variational integrators.

Abstract. Time-dependent Lagrangian mechanical systems are of great interest in various branches of engineering and physics. In particular, in robotics, many non-autonomous, that is time-dependent Lagrangian systems, are considered. In this work, we present the dynamics of such systems on Lie groups, considering both continuous and discrete time variables. Within this framework, we address the problem of integrating their equations of motion using discrete variational techniques. We illustrate the approach with simple examples whose configuration space is the Euclidean group, and propose their discrete counterparts. We also study an example on the group of spatial rotations, and finally discuss future research directions aimed at developing variational integrators for more general systems.

ISSN: 2591-3522 DOI: 10.70567/mc.v42.ocsid8576

1. INTRODUCCIÓN

La formulación Lagrangiana de la mecánica constituye una de las herramientas fundamentales para el estudio de sistemas físicos y de ingeniería, ya que permite describir su dinámica a partir de principios variacionales con un fuerte trasfondo geométrico. En particular, los sistemas no autónomos, es decir, aquellos cuyo comportamiento depende del tiempo, aparecen de manera natural en numerosos contextos.

La versión Lagrangiana de la mecánica clásica se realiza considerando el fibrado tangente de una variedad diferenciable y una función diferenciable sobre él, llamada función Lagrangiana o Lagrangiano que usualmente está dada por la energía cinética menos la energía potencial.

Sean Q una variedad diferenciable de dimensión n y TQ su fibrado tangente. Un sistema Lagrangiano está dado por el par (Q, L) donde Q describe sus configuraciones y $L : TQ \to \mathbb{R}$ es una función suave. Su dinámica queda determinada por el bien conocido Principio de acción crítica de Hamilton usando el funcional acción del sistema que está definido como

$$\mathcal{A}(q) := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t))dt,$$

donde $q : [0, T] \to Q$ es una curva suave en Q y $\dot{q} : [0, T] \to TQ$ es su curva velocidad de manera tal que $\dot{q}(t) \in T_{q(t)}Q \ \ \forall t \in [0, T]$. Una variación infinitesimal de q es una curva suave $\delta q : [0, T] \to TQ$ tal que $\delta q(t) \in T_{q(t)}Q \ \ \forall t \in [0, T]$ y se dice que δq es a extremos fijos si $\delta q(0) = 0$ y $\delta q(T) = 0$. El principio variacional de Hamilton establece que las trayectorias del sistema están dadas por los puntos críticos del funcional $\mathcal{A}(q)$. Tomando variaciones a extremos fijos se tiene que los puntos críticos de $\mathcal{A}$ son las soluciones de las llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L) dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})\right) = 0.$$

Considerando $(q^i)_{i=1}^n$ en Q un sistema local de coordenadas, esta ecuación determina un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad i = 1, ..., n. \tag{1}$$

Bajo condiciones de regularidad, (1) se resuelve de manera explícita y se encuentra la aceleración de la trayectoria. Esta condición consiste en que $\mathcal{F}L : TQ \to T^*Q$, la transformada de Legendre, dada por $\mathcal{F}L(q, \dot{q}) := \left(q, p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$ sea un difeomorfismo local. En este caso se dice que L es regular y si, además, es un difeomorfismo global se dice que L es hiperregular. Así la matriz $\mathrm{Hess}(L) := \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)$ es no singular en cualquier punto y la solución de (1) está dada por

$$\ddot{q}^j = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j\right).$$

Ahora bien, la variación de la acción $d\mathcal{A}(q).\delta_q$ puede interpretarse como

$$d\mathcal{A}(q(t)) \cdot \delta q(t) = \int_0^T \mathcal{E}L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)).\delta q(t)dt + (\theta_L(q(t), \dot{q}(t)).\delta q(t))\Big|_0^T$$

donde θ_L es la 1-forma sobre TQ dada por $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i$, y $\mathcal{E}L : \ddot{Q} \to T^*Q$ es el llamado operador de E-L definido por

$$\mathcal{E}L(q,\dot{q},\ddot{q}) := \sum_{l=0}^{1} (-1)^l \frac{d^l}{dt^l}\left(\frac{\partial L}{\partial q^l}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j$$

siendo T^*Q el fibrado cotangente de la variedad Q, $\pi_{TQ} : T(TQ) \to TQ$ y $\pi_Q : TQ \to Q$ las proyecciones canónicas y $\ddot{Q} = \{w \in T(TQ) \,/\, T\pi_Q(w) = \pi_{TQ}(w)\} \subset T(TQ)$ la subvariedad de segundo orden.

Consideremos ahora un sistema Lagrangiano dependiente del tiempo. Esto es, un par (Q, L) donde la variedad diferenciable Q describe las configuraciones del sistema y el Lagrangiano L depende explícitamente del tiempo. Es decir, $L : \mathbb{R} \times TQ \to \mathbb{R}$. En este caso, la transformada de Legendre asociada $\mathcal{F}L : \mathbb{R} \times TQ \to \mathbb{R} \times T^*Q$ está dada por $\mathcal{F}L(t, q, \dot{q}) := (t, q, p := \partial L/\partial \dot{q})$. Como en el caso autónomo, decimos que L es hiperregular si $\mathcal{F}L$ es un difeomorfismo global y si las trayectorias del sistema verifican el principio de acción crítica de Hamilton que en este caso da lugar a las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

y, por lo tanto, el operador de E-L queda dado por

$$\mathcal{E}L(q,\dot{q},\ddot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t}.$$

Si L is hiperregular estas ecuaciones definen explícitamente las aceleraciones en términos de las posiciones y las velocidades de la siguiente manera

$$\ddot{q}^j = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t}\right).$$

Ahora bien, es claro que estas las ecuaciones de movimiento pueden no tener soluciones analíticas y por lo tanto se debe recurrir a integradores que permitan aproximar de manera satisfactoria las trayectorias del sistema. Lo mismo ocurre cuando el sistema presenta algún tipo de vínculos o está sometido a distintos tipos de fuerzas. Existen muchos trabajos que se ocupan de proponer distintos métodos de integración y de estudiar sus propiedades. En particular, cuando el espacio de configuraciones Q es un grupo de Lie G, explotando la riqueza de esta variedad y su fibrado tangente, en Arnold et al. (2016) y Brüls et al. (2012) los autores proponen integradores y analizan su convergencia tratando el caso particularmente interesante de sistemas multicuerpo. Como dijimos, en este trabajo, proponemos definir integradores a partir de un principio variacional discreto (integradores variacionales) que dan lugar a ecuaciones algebraicas cuyas soluciones aproximan a la solución del sistema en lugar de discretizar ecuaciones.

Finalmente, la organización del trabajo es la siguiente. En la Sección 2 introducimos estos sistemas sobre grupos de Lie, destacando las herramientas geométricas necesarias y mostrando ejemplos representativos. En la Sección 3 abordamos la versión discreta, definiendo los sistemas Lagrangianos no autónomos en el marco variacional. En la Sección 4 presentamos la construcción de integradores variacionales dependientes del tiempo y discutimos su relación con el caso continuo. Finalmente, en la Sección 5 exponemos las conclusiones y trabajo futuro.

2. SISTEMAS LAGRANGIANOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO SOBRE GRUPOS DE LIE

Modelar estos sistemas en espacios de configuración con estructura algebraica adicional, como los grupos de Lie, introduce nuevas posibilidades. Por un lado, la estructura facilita la descripción intrínseca de movimientos complejos, como rotaciones o traslaciones, evitando recurrir a coordenadas locales. Obliga a adaptar las técnicas clásicas para incorporar adecuadamente las simetrías y restricciones geométricas del grupo. En esta sección presentamos las ecuaciones de movimiento de sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo sobre grupos de Lie adaptando las técnicas variacionales usuales que describimos en la Introducción.

Consideremos un sistema Lagrangiano dependiente del tiempo (G, L), donde el espacio de configuraciones es un grupo de Lie G y Lagrangiano $L : \mathbb{R} \times TG \to \mathbb{R}$. Como es usual, denotamos el álgebra de Lie del grupo G como $\mathfrak{g}$ y el difeomorfimo dado por la multiplicación a izquierda de G sobre sí mismo como $l_g : G \to G$ para todo $g \in G$. Es bien sabido que el fibrado tangente TG se puede identificar con el producto cartesiano $G \times \mathfrak{g}$ mediante la llamada trivialización a izquierda $TG \to G\times\mathfrak{g}$ dada por $(g, \dot{g}) \mapsto (g, \xi := T_g l_{g^{-1}}(\dot{g}))$ donde $T_g l_{g^{-1}} : T_g G \to \mathfrak{g}$ es la aplicación tangente en g de la multiplicación a izquierda $l_{g^{-1}}$. Vía esta identificación consideramos que el Lagrangiano del sistema dependientes del tiempo (G, L) está definido como una función $L : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ y el funcional acción $\mathcal{A}$ está dado por

$$\mathcal{A}(t, g, \xi) := \int_0^T L(t, g, \xi)dt.$$

Sea $g(t)$ una curva suave en G definida para $t \in [0, T]$. Para considerar variaciones infinitesimales $\delta g(t)$ de esta curva consideremos variaciones del tipo $g^\epsilon(t) : [0, T] \to G$ con $\epsilon \in (-c, c)$ y $c > 0$ tales que $g^0(t) = g(t), \forall t \in [0, T]$, $g^\epsilon(0) = g(0)$ y $g^\epsilon(T) = g(T)$. Estas variaciones pueden expresarse usando la aplicación exponencial $e : \mathfrak{g} \to G$ de manera tal que $g^\epsilon(t) = g(t)e^{\epsilon\eta(t)}$ para una curva suave $\eta(t)$ en $\mathfrak{g}$ satisfaciendo que $\eta(0) = \eta(T) = 0$ y por lo tanto sus variaciones infinitesimales asociadas están dadas por (ver Colombo et al. (2025) para más detalles)

$$\delta g(t) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} g^\epsilon(t) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} g(t)e^{\epsilon\eta(t)} = g(t)e^{\epsilon\eta(t)}\eta(t)\bigg|_{\epsilon=0} = g(t)\eta(t) \in T_{g(t)}G.$$

Se puede calcular la variación infinitesimal de la curva $\xi(t) := T_g l_{g^{-1}}(\dot{g})$ que está dada por

$$\delta\xi(t) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \left((g^\epsilon)^{-1}\frac{gd^\epsilon}{dt}\right) = \dot{\eta}(t) + [\xi, \eta] = \dot{\eta}(t) + ad_{\xi(t)}\eta(t)$$

donde, como es usual, ad denota la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre sí misma definida por $ad_{\xi(t)}\eta(t) := [\xi, \eta]$ y ad^* denota la acción co-adjunta de $\mathfrak{g}^*$ sobre sí misma definida por $(ad^*_\xi\eta)\beta := \eta(ad_\xi\eta)$.

Para calcular la variación de la acción $\mathcal{A}$ veamos primero cómo se expresa la variación del Lagrangiano. Como en el caso autónomo,

$$\delta L(t, g, \xi) = \frac{\partial L}{\partial g}(t, g, \xi)\delta g + \frac{\partial L}{\partial \xi}(t, g, \xi)\delta\xi$$

donde $\dfrac{\partial L}{\partial g} \in T^*G$ está dado por $\dfrac{\partial L}{\partial g}(t, g, \xi)\delta g = L(t, g^\epsilon, \xi)\bigg|_{\epsilon=0}$. Entonces, puede verse que

$$\delta L(t, g, \xi) = \left\langle T_e^* l_g \frac{\partial L}{\partial g}(t, g, \xi) + ad^*_\xi \frac{\partial L}{\partial \xi}(t, g, \xi), \eta \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \xi}(t, g, \xi), \dot{\eta} \right\rangle.$$

Como $\delta\mathcal{A}(t,g,\xi) = \displaystyle\int_0^T \delta L(t,g,\xi)dt$, aplicando técnicas usuales del cálculo de variaciones se obtiene que $\delta\mathcal{A}(t,g,\xi) = \int_0^T \left\langle T_e^* l_g \frac{\partial L}{\partial g}(t,g,\xi) + ad_\xi^* \frac{\partial L}{\partial \xi}(t,g,\xi) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \xi}(t,g,\xi), \eta \right\rangle dt$. Como el principio de Hamilton establece que $\delta\mathcal{A} = 0$ para toda $\eta \in \mathfrak{g}$ con extremos fijos, las ecuaciones de E-L para un Lagrangiano $L : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ están dadas por

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \xi}(t,g,\xi) - ad_\xi^* \frac{\partial L}{\partial \xi}(t,g,\xi) - T_e^* l_g \frac{\partial L}{\partial g}(t,g,\xi) = 0, \quad \dot{g} = g\xi. \tag{2}$$

Calculando la derivada temporal, (2) se escribe como

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \xi \partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi \partial g}\dot{g} + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi \partial t} - ad_\xi^* \frac{\partial L}{\partial \xi}(t,g,\xi) - T_e^* l_g \frac{\partial L}{\partial g}(t,g,\xi) = 0, \quad \dot{g} = g\xi.$$

Consideremos algunos ejemplos de sistemas Lagrangianos no autónomos sobre grupos de Lie. Cuando el grupo de Lie G es un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ no necesitamos trivializar su fibrado tangente sino que identificamos TG con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Para ilustrar las ideas desarrolladas presentamos algunos ejemplos representativos. Estos muestran cómo la dependencia del tiempo y la estructura geométrica del espacio de configuraciones influyen en las ecuaciones de movimiento. Primero, consideramos un Lagrangiano con decaimiento exponencial definido en un espacio euclídeo, que sirve como caso base. El mismo es un ejemplo físico que está dado por una disipación lineal en las velocidades del sistema.

Ejemplo 1: *Consideremos un Lagrangiano dependiente del tiempo dado por el decaimiento exponencial con tasa constante $k > 0$ para un Lagrangiano mecánico (esto es, energía cinética menos energía potencial) sobre el grupo de Lie $G = \mathbb{R}^n$. Esto es,*

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\; \textit{dado por} \quad L(t,q,\dot{q}) = e^{-kt}\left(\frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2 - V(q)\right)$$

donde $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) \in \mathbb{R}^n$ y $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función potencial. Como $\dfrac{\partial L}{\partial q} = -e^{-kt}\nabla_{q_i} V$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{-kt}\dot{q}$ y $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = e^{-kt}\ddot{q} - ke^{-kt}\dot{q}$ las ecuaciones de E-L del sistema se escriben como

$$e^{-kt}\ddot{q} - ke^{-kt}\dot{q} + e^{-kt}\nabla_{q_i} V = 0$$

donde ∇_{q_i} representa la derivada parcial de L con respecto a q_i. Equivalentemente, eliminando el factor e^{-kt} se tiene $\ddot{q} = k\dot{q} - \nabla_{q_i} V$.

Para el segundo ejemplo analizamos un sistema con interacción magnética en $\mathbb{R}^3$, que introduce efectos adicionales derivados de un potencial vectorial. El mismo es un ejemplo físico de partículas magnéticas en el espacio.

Ejemplo 2: *Consideremos el sistema dado por una partícula en $G = \mathbb{R}^3$ con un campo magnético cuyo Lagrangiano se descuenta con tasa constante $k > 0$. Este está dado por*

$$L_A(q,\dot{q}) = e^{-\kappa t}\left(A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^2\right).$$

Dado que $\dfrac{\partial L}{\partial q} = e^{-\kappa t}(\nabla_q A\dot{q})$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{-\kappa t}(A(q) + \dot{q})$ y $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = -\kappa e^{-\kappa t}(A(q) + \dot{q}) + e^{-\kappa t}\ddot{q} + e^{-\kappa t}\nabla_q A\dot{q}$, las ecuaciones de E-L son $e^{-\kappa t}\left(-\kappa(A(q) + \dot{q}) + \ddot{q} + \nabla_q A\dot{q} - \nabla_q A\dot{q}\right) = 0$. Dividiendo por $e^{-\kappa t}$ obtenemos que $\ddot{q} = \kappa(A(q) + \dot{q})$.

Finalmente, estudiamos el caso de un cuerpo rígido con pivote fijo en el grupo $SO(3)$, ejemplo que pone de manifiesto la riqueza de trabajar en un grupo de Lie no euclídeo. El mismo es un ejemplo relacionado con la robótica que representa la dinámica de un satélite.

Ejemplo 3: *Consideremos el sistema dado por un cuerpo rígido con un pivote fijo que evoluciona sobre $G = SO(3)$. El Lagrangiano $L : \mathbb{R} \times TSO(3) \to \mathbb{R}$ está dado por*

$$L(t, R, \dot{R}) = \frac{e^{-\kappa t}}{2} \langle\langle \dot{R}, \dot{R} \rangle\rangle,$$

donde $\kappa \in \mathbb{R}^+$ y $\langle\langle \dot{R}, \dot{R} \rangle\rangle = \int_B \rho(X) \|\dot{R}X\|^2 \, d^3X$ siendo ρ la distribuión de masa del cuerpo.

La acción de G sobre si mismo es la multiplicación de matrices $l_{R_1} : SO(3) \to SO(3)$; esto es, $l_{R_1}(R) = R_1 R$ y $T_R l_{R_1}(Y) = R_1 Y$ para $Y \in T_R SO(3)$. El álgebra de Lie del grupo $SO(3)$, denotada como $\mathfrak{so}(3)$, consiste en las matrices anti-simétricas de dimensiones 3×3 y puede identificarse con $\mathbb{R}^3$ vía un isomorfismo. La acción adjunta está dada por el conmutador de las matrices. Esto es, $ad_\xi \eta = \xi\eta - \eta\xi$ con $\xi, \eta \in \mathfrak{so}(3)$.

Identificando TG con $G \times \mathfrak{g}$ el Lagrangiano $L : \mathbb{R} \times SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}$ se escribe como

$$L(t, R, \xi) = \frac{e^{-\kappa t}}{2} \langle \xi, \xi \rangle = \frac{1}{2} tr\, (\xi^T \mathbb{I} \xi)$$

siendo $\mathbb{I}$ el tensor de inercia del cuerpo rígido. Considerando todas estas identificaciones se llega a que las ecuaciones de E-L están dadas por $\mathbb{I}\dot{\xi} - \xi \times \mathbb{I}\xi - \kappa \mathbb{I}\xi = 0$. Estas ecuaciones describen el caso equilibrado de los sistemas de actitud de cuerpo rígido. Estos sistemas se definieron en Shen et al. (2003) como una abstracción para el banco de pruebas de control de actitud triaxial presentado en Bernstein et al. (2001). Es decir, un cuerpo rígido, soportado por un punto de pivote fijo, que puede rotar libremente en tres dimensiones. En el caso equilibrado, las ecuaciones de E-L describen la dinámica de un cuerpo rígido libre, incluyendo los efectos de disipación lineal. La dinámica de este sistema se ha estudiado desde el punto de vista de la reducción por simetrías en la geometría de contacto en Anahory et al. (2024).

3. SISTEMAS LAGRANGIANOS DISCRETOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

Una idea básica de la formulación estándar de la mecánica discreta consiste en reemplazar el fibrado tangente TQ por $Q \times Q$. Es decir, si se considera un sistema mecánico con espacio de configuración Q, en el contexto continuo el espacio de velocidades es TQ y el Lagrangiano es una aplicación $L : TQ \to \mathbb{R}$. En el contexto discreto se reemplaza TQ por $Q \times Q$ considerando que dos puntos cercanos en Q son el análogo discreto de un vector velocidad y el Lagrangiano discreto es una aplicación $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$. Un sistema mecánico discreto se define, entonces, como un par (Q, L_d). La evolución de estos sistemas está determinada por un principio variacional discreto que da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas en recurrencia; a diferencia de lo que ocurre en el contexto continuo, donde la trayectoria del sistema se obtiene a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales (ver por ejemplo Marsden y West (2001)).

La idea es construir una sucesión de tiempos discreta $\{t_k = k : k = 0, \ldots, N\} \subset \mathbb{R}$, definir el espacio de curvas discretas como $C_d(Q) := \{q_d : \{t_k\}_{k=0}^N \to Q\}$ e identificar las curvas discretas $q_d \in C_d(Q)$ con su imagen en Q, es decir, una curva discreta está dada por $q_d = \{q_k : k = 0, \ldots, N\}$ donde $q_k := q_d(t_k)$. Asociada al Lagrangiano discreto L_d se define la acción discreta $\mathcal{A}_d : C_d(Q) \to \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{A}_d(q_d) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}).$$

Así que este espacio de curvas discretas resulta, como en el caso continuo, una variedad diferenciable de dimensión infinita y el espacio tangente $T_{q_d}(C_d(Q))$ a $C_d(Q)$ es el conjunto de aplicaciones $v_{q_d} : \{t_k : k = 0, \ldots, N\} \to TQ$ tales que $\pi_{TQ} \circ v_{q_d} = q_d$ y que se denotan por $v_{q_d} = \{(q_k, v_k) : k = 0, \ldots, N\}$.

El principio de E-L discreto establece que las trayectorias del sistema discreto son puntos críticos de esta acción considerando curvas discretas con extremos fijos q_0, q_N. Es decir, q_d es una trayectoria del sistema mecánico discreto (Q, L_d) si $d\mathcal{A}_d(q_d) \cdot \delta q_d = 0$ para toda variación $\delta q_d = \{\delta q_k\}_{k=0}^N$ tal que $\delta q_0 = \delta q_N = 0$.

El cálculo de la derivada de la acción discreta da lugar a las ecuaciones de E-L discretas:

$$d\mathcal{A}_d(q_d) \cdot \delta q_d = \sum_{k=1}^{N-1} D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k)$$

donde D_1 y D_2 representan las derivadas parciales de L_d respecto de la primera y segunda variable, respectivamente. Entonces, las ecuaciones de E-L discretas están dadas por

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) = 0 \quad \text{para } k = 1, \ldots, N-1.$$

Como en el caso de variable temporal continua, bajo las condiciones de regularidad sobre el Lagrangiano discreto L_d, estas ecuaciones se resuelven de manera explícita y se encuentra el valor de q_{k+2} en función de q_k y q_{k+1}. Cuando la variable temporal es discreta se definen dos transformaciones de Legrende discretas

$$\mathcal{F}^- L_d : Q \times Q \to T^*Q \quad \text{dada por } \mathcal{F}^- L_d(q_0, q_1) = (q_0, -D_1 L_d(q_0, q_1)),$$

$$\mathcal{F}^+ L_d : Q \times Q \to T^*Q \quad \text{dada por } \mathcal{F}^+ L_d(q_0, q_1) = (q_1, D_2 L_d(q_0, q_1)).$$

Si ambas transformadas discretas son isomorfismos locales se dice que L_d es regular y si son isomorfimos globales se dice que L_d es hiperregular y en este caso L_d determina el flujo discreto que define la evolución del sistema (Q, L_d) como $\psi_d := (\mathcal{F}^+ L_d)^{-1} \circ \mathcal{F}^+ L_d : Q \times Q \to Q \times Q$ dada por $\psi(q_k, q_{k+1}) = (q_{k+1}, q_{k+2})$ donde $q_{k+2} = q_{k+2}(q_k, q_{k+1})$ está definido por las ecuaciones de E-L discretas.

Consideremos ahora un sistema Lagrangiano discreto dependientes del tiempo. Entonces, consideramos un sistema con espacio de configuraciones descrito por una variedad diferenciable Q y una familia de Lagrangianos discretos $L_d^k : Q \times Q \to \mathbb{R}$ para $k = 0, \ldots, N-1$.

Considerando el espacio de curvas discretas como en el caso autónomo se define la acción discreta asociada a esta familia de Lagrangianos discretos como

$$\mathcal{A}_d(q_d) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d^k(q_k, q_{k+1}).$$

El cálculo de la derivada de la acción discreta da lugar a las ecuaciones de E-L discretas:

$$d\mathcal{A}_d(q_d) \cdot \delta q_d = \sum_{k=1}^{N-1} dL_d^k(q_k, q_{k+1}(\delta q_k, \delta q_{k+1}))$$

y con las técnicas usuales se llega a que las ecuaciones de E-L discretas para este caso:

$$D_1 L_d^{k+1}(q_{k+1}, q_{k+2}) + D_2 L_d^k(q_k, q_{k+1}) = 0 \ \text{ con } k = 0, \ldots, N-2.$$

Así como en el caso de sistemas Lagrangianos con variable temporal continua tanto autónomos como no autónomos, pudimos ver que las ecuaciones de E-L discretas correspondientes a un sistema Lagrangiano discreto dependiente del tiempo pueden escribirse a partir de un operador asociado a la siguiente función Lagrangiana de segundo orden $\hat{L}_d : \ddot{Q}_d \to \mathbb{R}$ dada por

$$\hat{L}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) = L_d^k(q_k, q_{k+1}) + L_d^{k+1}(q_{k+1}, q_{k+2})$$

donde $\ddot{Q} := \{w_d \in (Q\times Q)\times(Q\times Q)/\pi_1\circ\sigma(w_d) = \pi_2\circ\pi(w_d)\}$ siendo π y σ las proyecciones de $(Q \times Q) \times (Q \times Q)$ sobre $Q \times Q$ en el primer y segundo factor respectivamente y, como es usual, π_1 y π_2 las proyecciones en el primer y segundo factor de $Q\times Q$ en Q. Luego, el operador de E-L de $\hat{L}_d$ estará definido tal que $\mathcal{E}\hat{L}_d : \ddot{Q}_d \to T^*Q$ como

$$\mathcal{E}\hat{L}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) := D_1L_d^{k+1}(q_{k+1}, q_{k+2}) + D_2L_d^k(q_k, q_{k+1})$$

pertenece a $T^*_{q_{k+1}}Q$. Definiendo esto de esta manera, las ecuaciones de E-L discretas dependientes del tiempo son exactamente aquellas que cumplen que $\mathcal{E}\hat{L}_d = 0$.

Notemos que al considerar un sistema Lagrangiano discreto dependientes del tiempo sobre un grupo de Lie G no aparece el fibrado TG y por lo tanto no es necesario utilizar ninguna trivialización sino que solamente se trabaja en la variedad diferencial producto $G \times G$ como en cualquier variedad producto. Al considerar las variaciones infinitesimales con extremos fijos de una curva $g(t) \subset G$ se tiene, como es usual, que

$$\delta g(t) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} g^\epsilon(t) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} g(t)e^{\epsilon\eta(t)} = g(t)e^{\epsilon\eta(t)}\eta(t)\bigg|_{\epsilon=0} = g(t)\eta(t) \in T_{g(t)}G$$

donde $\eta(t)$ es una curva en $\mathfrak{g}$ tal que satisface que $\eta(0) = \eta(T) = 0$ y se obtienen las ecuaciones de E-L discretas sobre G

$$D_1L_d^{k+1}(g_{k+1}, g_{k+2}) + D_2L_d^k(g_k, g_{k+1}) = 0, \quad \text{con} \quad k = 0, \ldots, N-2.$$

Cabe señalar que en el caso discreto cuando el espacio de configuraciones es una variedad diferenciable general, el fibrado tangente se reemplaza por el producto $Q \times Q$. Sin embargo, al trabajar con grupos de Lie, la estructura algebraica adicional permite utilizar herramientas específicas como la multiplicación a izquierda y la aplicación exponencial, que resultan útiles para definir variaciones y discretizaciones sin abandonar la geometría del grupo. En particular, en los ejemplos que analizamos más adelante, donde es necesario emplear retracciones debido a que no se trata de grupos euclídeos, estas construcciones facilitan el tratamiento discreto de los sistemas, igual que ya se había hecho en el marco de la variable temporal continua.

4. INTEGRADORES VARIACIONALES DEPENDIENTES DEL TIEMPO

Como es bien sabido, muchas veces ciertos sistemas mecánicos discretos aproximan a sistemas mecánicos continuos. Una manera de hacer esto es considerar un sistema mecánico con Lagrangiano $L : TQ \to \mathbb{R}$ y un difeomorfismo $\psi : TQ \to Q \times Q$ que permita identificar los vectores del espacio tangente TQ con elementos del espacio producto $Q \times Q$. Esta aplicación ψ es conocida como discretización y es por medio de su inversa que se define un Lagrangiano discreto $L_d := L \circ \psi^{-1}$ a partir de un Lagrangiano L que usualmente llamamos Lagrangiano discretizado y se llama sistema discretizado a un sistema discreto definido a partir de una discretización de un sistema continuo.

Muchas veces es conveniente discretizar un sistema continuo para encontrar un integrador de sus ecuaciones de movimiento. Esta idea consiste en definir integradores de un sistema Lagrangiano continuo a partir de un principio variacional discreto y por eso se suele llamar integradores variacionales a estos integradores. Es bien sabido que ellos gozan de buenas propiedades geométricas tales como la conservación del momento y la simplecticidad, y presentan un buen comportamiento de la energía (ver Marsden y West (2001); Hairer et al. (2006)).

Para analizar la relación entre un sistema Lagrangiano con variable temporal continua y un sistema Lagrangiano discreto y, en particular, entre un sistema Lagrangiano y alguna versión discreta de él, se debe introducir la noción de Lagrangiano discreto exacto.

Dado un Lagrangiano hiperregular $L : TQ \to \mathbb{R}$ consideremos la función llamada Lagrangiana discreta exacta $L_d^E : \mathbb{R} \times Q \times Q \to \mathbb{R}$ dada por

$$L_d^E(h, q_0, q_1) := \int_0^h L(q_{0,h}(t), \dot{q}_{0,h}(t))\, dt,$$

donde $q_{0,h}(t)$ es la única solución de las ecuaciones de E-L para L con las condiciones de borde $q(0) = q_0$, $q(h) = q_1$. Se puede demostrar que a partir de dos posiciones iniciales el flujo asociado a este Lagrangiano discreto exacto determina una curva discreta que coincide con la evaluación de la curva solución del sistema continuo en los puntos correspondientes.

La idea es definir Lagrangianos discretos que aproximen al Lagrangiano discreto exacto y así determinen un integrador de las ecuaciones de E-L. Es decir, $L_d(h, q_0, q_1) \sim L_d^E(h, q_0, q_1)$.

Para construir integradores variacionales para sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo sobre grupos de Lie se deben definir Lagrangianos discretizados $L_d^k : G \times G \to \mathbb{R}$ con $k = 0, ..., N-1$ a partir del Lagrangiano $L : \mathbb{R} \times TG \to \mathbb{R}$ del sistema. Siguiendo lo desarrollado en Colombo et al. (2023) para un espacio arbitrario, contruimos integradores variacionales para casos particulares que son de interés tanto en el área de la robótica como en tantas otras.

Cada una de las aplicaciones $L_d^k : G \times G \to \mathbb{R}$ con $k = 0, ..., N-1$ es suave y se puede usar el Teorema de la función implícita y despejar g_{k+2} en función de g_k y g_{k+1} de la siguiente manera: dados (g_k, g_{k+1}, g_{k+2}) solución de las ecuaciones de E-L discretas dependientes del tiempo, es decir que hay una curva solución y además $D_2D_1L_d^k(g_k, g_{k+1})$ es invertible, se tiene que existen un entorno $V_k \subset G \times G$ de (g_k, g_{k+1}), un entorno $U_k \subset G \times G$ de (g_{k+1}, g_{k+2}) y una aplicación $\psi_k : U_k \to V_k$ tal que $\psi_k(g_k, g_{k+1}) = (g_{k+1}, g_{k+2})$ y $\forall (g, \tilde{g}) \in U_k$ se tiene que

$$D_1L_d^k(\tilde{g}, \psi_k(g, \tilde{g})) + D_2L_d^{k-1}(g, \tilde{g}) = 0.$$

Se puede observar que ésto vale para cada terna de puntos solución de las ecuaciones de E-L, necesitando además que $U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$. Así, las ecuaciones de E-L discretas definen implícitamente una familia de flujos discretos $\{\psi_d^{k,k+1}\}_{k=0}^{N-2}$ como $\psi_d^{k,k+1} : G \times G \to G \times G$ dada por $\psi(g_k, g_{k+1}) = (g_{k+1}, g_{k+2})$, donde $g_{k+2} = g_{k+2}(g_k, g_{k+1})$ y está localmente definido por las ecuaciones de E-L.

Ahora bien, esta construcción de un integrador para aproximar la solución de un sistema contínuo implica la definición y el uso de una discretización de TG. En el caso general de un grupo de Lie G cualquiera se pueden considerar retracciones para identificar TG on $G \times \mathfrak{g}$ (ver Vivek et al. (2025)). Nosotros, por simplicidad, vamos a considerar el caso de un grupo abeliano Euclídeo para integrar las ecuaciones del sistema (ver Colombo et al. (2023)).

Ejemplo 4: *Analicemos ahora la discretización del* ***Ejemplo 1****, siendo el Lagrangiano discreto* $L_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dado por la discretización trapezoidal. Tomando* $\dot{q}_i = \dfrac{q_{k+1}^i - q_k^i}{h}$ *con*

$t \in [t_k, t_{k+1}]$, el Lagrangiano discreto dependientes del tiempo está dado por

$$L^k_{d,h}(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} L\left(kh, q_k, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) + \frac{h}{2} L\left((k+1)h, q_{k+1}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right).$$

Entonces las ecuaciones de E-L discretas dependientes del tiempo son

$$e^{-\kappa(kh)}\left(q_{k+1} - q_k\right) - e^{-\kappa(k+2)h}\left(q_{k+2} - q_{k+1}\right) - e^{-\kappa(k+1)h}\left(2h^2 \nabla_{q_{k+1}} V(q_{k+1}) - 2q_{k+1} + q_k + q_{k+2}\right) = 0$$

***Ejemplo 5:** Consideramos ahora la discretización del **Ejemplo 2**, siendo el Lagrangiano discreto $L_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por la discretización trapezoidal. Tomando $\dot{q}_i = \dfrac{q^i_{k+1} - q^i_k}{h}$ con $t \in [t_k, t_{k+1}]$, el Lagrangiano discreto dependientes del tiempo está dado por*

$$L^k_{d,h}(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} L\left(kh, q_k, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) + \frac{h}{2} L\left((k+1)h, q_{k+1}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right)$$

Entonces las ecuaciones de E-L discretas dependientes del tiempo son

$$\begin{aligned} &e^{-\kappa(kh)}\left(A(q_k) + \frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) - e^{-\kappa(k+2)h}\left(A(q_{k+2}) + \frac{q_{k+2} - q_{k+1}}{h}\right) \\ &+ e^{-\kappa(k+1)h}\left(\nabla_{q_{k+1}} A(q_{k+1})(q_{k+2} - q_k) + \left(\frac{2q_{k+1} - q_k - q_{k+2}}{h}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo consideramos la dinámica de sistemas mecánicos Lagrangianos dependientes del tiempo sobre grupos de Lie tanto para el caso de variable temporal continua como discreta. En el marco de variable temporal continua, consideramos ejemplos en grupos de Lie euclídeos y no euclídeos y para el primero de estos casos consideramos su versión discreta para definir integradores variacionales de las ecuaciones de E-L. En particular se construyen integradores variacionales para abordar el problema de aproximar las trayectorias de este tipo de sistemas. Si bien en este trabajo no hacemos ningún análisis de error de los integradores variacionales propuestos, sería muy interesante hacerlo y poder comparar con los integradores presentados en Arnold et al. (2016) y Brüls et al. (2012).

Estamos trabajando sobre la construcción de integradores variacionales sobre grupos de Lie para sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo para un grupo arbitrario G. Esto es, nos proponemos generalizar lo obtenido en Vivek et al. (2025). También, motivados por sus diversas aplicaciones que involucran sistemas formados por vehículos aéreos no tripulados realizando tareas de manera conjunta, estamos considerando sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo sobre fibrados principales triviales; esto es, sistemas cuyo espacio de configuraciones está dado por el producto cartesiano $M \times G$ de una variedad suave arbitraria M y un grupo de Lie G.

REFERENCIAS

Anahory A., Colombo L.J., de Leon M., Marrero J.C., de Diego D.M., y Padrón E. Reduction by symmetries of contact mechanical systems on lie groups. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 8(4):821–845, 2024. http://doi.org/10.1137/23M1616935.

Arnold M., Cardona A., y Brüls O. *A Lie Algebra Approach to Lie Group Time Integration of Constrained Systems*, páginas 91–158. Springer International Publishing, Cham, 2016. ISBN 978-3-319-31879-0. http://doi.org/10.1007/978-3-319-31879-0$_3$.

Bernstein D., McClamroch N., y Bloch A. Development of air spindle and triaxial air bearing testbeds for spacecraft dynamics and control experiments. En *Proceedings of the 2001 American Control Conference. (Cat. No.01CH37148)*, volumen 5, páginas 3967–3972 vol.5. 2001. http://doi.org/10.1109/ACC.2001.946287.

Brüls O., Cardona A., y Arnold M. Lie group generalized-α time integration of constrained flexible multibody systems. *Mechanism and Machine Theory*, 48:121–137, 2012. ISSN 0094-114X. http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2011.07.017.

Colombo L., Eyrea Irazú M.E., Sánchez M.D., y Zuccalli M. Time-dependent lagrangian systems on lie groups. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 10:238–241, 2025.

Colombo L., Fernández M.G., y Martín de Diego D. Variational integrators for non-autonomous lagrangian systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 424:114966, 2023. ISSN 0377-0427. http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114966.

Hairer E., Lubich C., y Wanner G. *Geometric Numerical Integration*, volumen 31 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edición, 2006. ISBN 3-540-30663-3; 978-3-540-30663-4. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations.

Marsden J.E. y West M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 10:357–514, 2001. http://doi.org/10.1017/S096249290100006X.

Shen J., Sanyal A., y McClamroch N. Asymptotic stability of rigid body attitude systems. En *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475)*, volumen 1, páginas 544–549 Vol.1. 2003. http://doi.org/10.1109/CDC.2003.1272620.

Vivek V., Martin de Diego D., y Banavar R. Numerical integrators for mechanical systems on lie groups. *ArXiv*, 2025. http://doi.org/https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.12103.