

FORMULACION DEL PROBLEMA DE CONDUCCIÓN DEL CALOR EN MATERIALES FUNCIONALMENTE GRADUADOS (FGM) Y SUS APLICACIONES

FORMULATION OF THE HEAT CONDUCTION PROBLEM IN FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM) AND ITS APPLICATIONS

Juan C. Barreto y Mario A. Meza

*Universidad Nacional de Formosa, Laboratorio de Modelización y Simulación Numérica,
Micromecánica de Materiales Complejos. Av. Gutnisky 3200, Formosa, Formosa, Argentina*

Palabras clave: Materiales Funcionalmente Graduados, Modelos generalizados de conducción del calor.

Resumen. Los materiales funcionalmente graduados (FGM) son materiales compuestos no homogéneos en los que la composición del material y/o la microestructura cambian gradualmente a lo largo de una o más direcciones, lo que conduce a una variación continua en las propiedades mecánicas, eléctricas y térmicas del material. Este cambio gradual en las propiedades, tales como las características termo-mecánicas, o termo-eléctricas, se diseñan en términos de lograr un mayor rendimiento del material en aplicaciones específicas. En el presente trabajo se modela la conducción del calor en materiales funcionalmente graduados teniendo en cuenta las propiedades anteriormente enunciadas, y se proponen generalizaciones de los clásicos sistemas de G. Chen y G. Lebon (G. Lebon et al., *Proc R Soc A*, 467(2135):3241–3256, (2011); G. Chen, *J. Heat Transfer*, 124(2):320–328, (2001)) Se formulan los problemas no locales de Cauchy de condiciones de borde, obteniéndose luego soluciones semi-analíticas generalizadas.

Keywords: Functionally Graded Materials, Generalized Heat Conduction Models

Abstract. Functionally graded materials (FGMs) are non-homogeneous composite materials in which the material composition and/or microstructure gradually change along one or more directions, leading to continuous variation in the mechanical, electrical, and thermal properties of the material. This gradual change in properties, such as thermo-mechanical, or thermo-electrical, characteristics are designed in terms of achieving higher material performance in specific applications. In the present work, heat conduction in functionally graded materials is modeled taking into account the properties mentioned above, and generalizations of the classic systems of G. Chen and G. Lebon (G. Lebon et al., *Proc R Soc A*, 467(2135):3241–3256, (2011); G. Chen, *J. Heat Transfer*, 124(2):320–328, (2001)) Cauchy's non-local problems of edge conditions are formulated, and generalized semi-analytical solutions are then obtained.

1. INTRODUCCIÓN

Los materiales funcionalmente graduados (FGMs), constituyen un tipo de material compuesto, en los cuales los gradientes de composición, porosidad, y los inducidos por la microestructura, se distribuyen de manera monótona continua, respecto de la variedad geométrica que ocupen, de modo que, es posible generar esta respuesta, diseñando un arreglo material que puede ser cuasi-continuo o discreto. El primer caso se refiere a mezclas continuas de sólidos, por ejemplo, mezclas de óxidos metálicos, los cuales serán débilmente inhomogéneas, la fabricación aditiva (AM) es un método experimental, con el cual se logran los propósitos enunciados anteriormente, la segunda situación se refiere a materiales multicapa o materiales compuestos (Composites). Se espera que, la combinación de materiales avanzados (FGMs) y métodos de fabricación avanzados, facilite el desarrollo de estos materiales de gran importancia en ingeniería estructural.

Los materiales homogéneos funcionalmente graduados, se obtienen utilizando un sustrato material denominado de relleno (polvo o alambre) y ajustando los parámetros del proceso o del diseño estructural, durante el proceso llamado de Fabricación Aditiva (AM), como resultado se obtiene un material de fase única con una distribución gradiente de características microestructurales, que se puede dividir en cuatro tipos: mejora de solución sólida, tamaño de grano, orientación de grano y estructura de red. Los FGMs de mejora de solución sólida (Figura 3a) tienen la misma fase básica de sustancia, y la distribución gradiente de gases de solución sólida se crea mediante el ajuste de la composición del gas de protección durante el proceso de AM. Los FGMs de tamaño de grano y orientación de grano (Figura 2b, c) se obtienen ajustando los parámetros del proceso durante el AM, como la del flujo de calor.

En todos los otros casos, los materiales obtenidos siempre muestran el mismo comportamiento, el cual consiste en extinguir el estímulo que lo atraviesa, de modo que siempre pueden distinguirse por lo menos dos regímenes de comportamiento, uno inicial rápido y una fase lenta de apagado, quenching o extinción, se trata de un fenómeno de auto-organización y posterior emergencia de orden, los estados intermedios, metaestables, pueden extenderse desde el orden de los 500 milisegundos hasta varios minutos, dependiendo del diseño micro-estructural y de la naturaleza de los sólidos

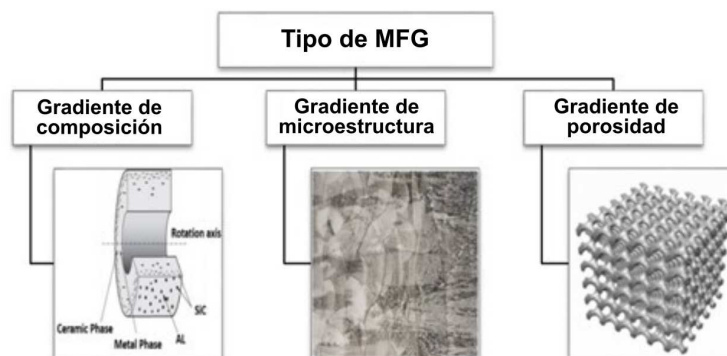


Figura 1:

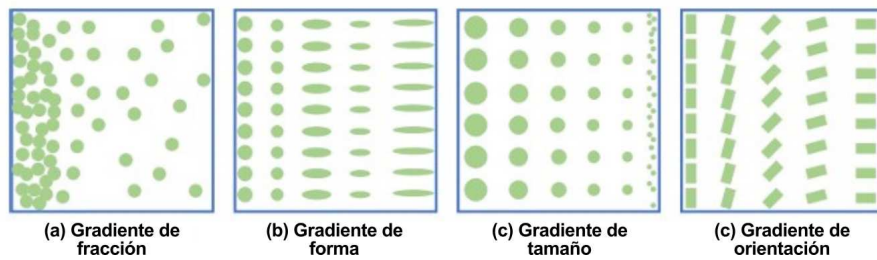


Figura 2:

2. HIPÓTESIS Y MODELADO

La primera cuestión que debe observarse, es la que se vincula con la distribución de microestructuras, las cuales definen una geometría específica, para los MFG, esta a su vez, establece el patrón general de respuesta del material a distintos estímulos, por ejemplo, un gradiente de temperaturas, en segundo lugar, se considera un material levemente in-homogéneo como en la figura 3a. El efecto de extinción del estímulo, puede asociarse con el fenómeno de Quenching, o apagado, como se observa en las figuras 3c, y 3 f

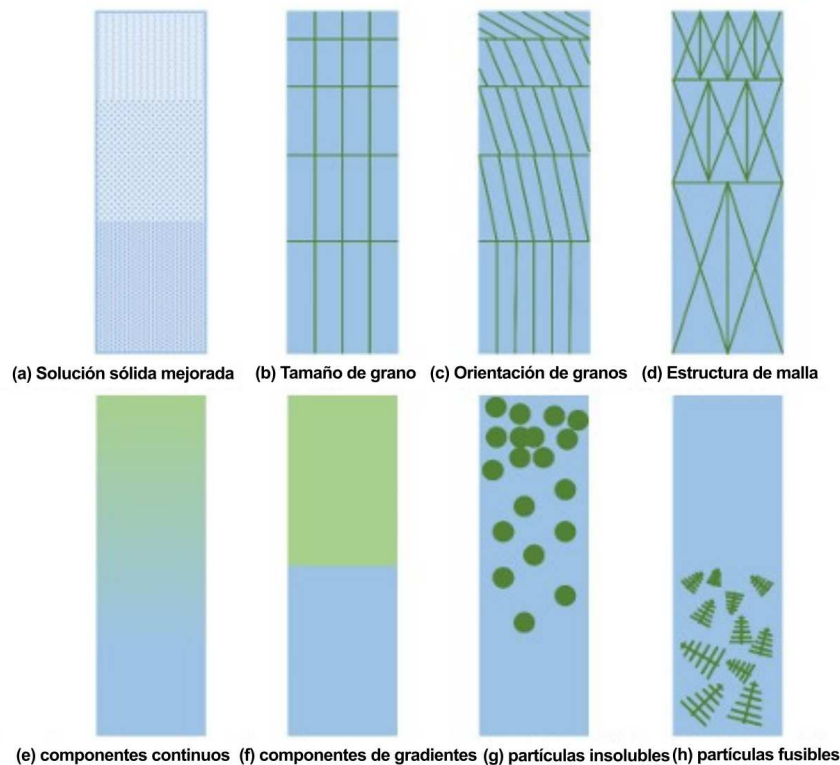


Figura 3:

Si interesara solo la amplitud temporal del campo de temperaturas es posible proponer una ecuación diferencial estocástica, que se construye sobre dos métricas ambas de naturaleza estocástica, aunque de diferente estructura formal una es de tipo no diferenciable (Procesos Wiener) y la otra estrictamente continua (proceso de Markov continuo), se introducen dos amplitudes promediadas según el formalismo de Matsubara, indicando la prevalencia en la escala micro y nano, de correcciones cuánticas, el proceso, se asume que es inducido por un browniano geo-

métrico.

$$\begin{aligned} \varepsilon dT(t) = & a(t, \theta)T(t)dt + \sum_{j=1}^m [\sigma_j(t, \theta)T(t)]d\hat{W}_j^a(s) - \\ & - \sum_{j=1}^m [d\hat{W}_j^b(s)\sigma_j^{(1)}(t, \theta)\langle \mathcal{F}_1[t, T(s - \tau_j^a)] \rangle][T(t)]^{-\alpha} - \\ & - \sum_{j=1}^m [dp_j(t)\sigma_j^{(2)}(t, \theta)\langle \mathcal{F}_2[t, T(t - \tau_j^b)] \rangle][T(t)]^{-\beta} \text{ en } \mathfrak{R}_k \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(0) = T_0/T_0 \in \mathfrak{R}_k; \quad a, \sigma_j, \sigma_j^{(1)}, \sigma_j^{(2)} \in L^2(R_k) \quad \forall j \in N; \quad \mathcal{F}_{1,2}\text{-lip}; \quad p_j\text{-Markov} \\ T(t) = T_1(t) \forall t \in \cup_j^m [[-\tau_j^a, 0) \cap [-\tau_j^a, 0)] / T_1 \in C^1(\mathfrak{R}_{\cup_j^m [[-\tau_j^a, 0) \cap [-\tau_j^a, 0)]}); \quad \tau_j^a, \tau_j^a \in \mathfrak{R}_0^+ \\ \hat{W}_j^a, \hat{W}_j^b\text{-Wiener}; \quad \text{cov}[\hat{W}_j^b(t), \hat{W}_j^b(t')] = \text{cov}[\hat{W}_j^a(t), \hat{W}_j^a(t')] = \text{cov}[\hat{W}_j^a(t), \hat{W}_j^b(t')] = 0 \end{aligned}$$

en lo anterior $\alpha \gg \beta > 1$; $\theta \in R_0^+$; $\varepsilon \in (0, 1)$. Representación integral de la solución:

$$\begin{aligned} T(t) = & \left\{ g(t-0)[T(0)]^{1+\alpha} - \xi_1 \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^m d\hat{W}_j^b(s)\sigma_j^{(1)}(s, \theta)g(t-s)\langle \mathcal{F}_1[s, T(s - \tau_j^a)] \rangle \right\} - \right. \\ & \left. - \xi_1 \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^t dp_j(s)\sigma_j^{(2)}(s, \theta)g(t-s)\mathcal{F}_2[s, T(s - \tau_j^b)][u(s)]^{-\beta-\alpha} \right\} \right\}^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (2) \end{aligned}$$

Función de Green

$$g(t-s) = \exp \left\{ -\xi_1 \int_s^t ds' \left\{ a(s', \theta) - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m \sigma_j^2(s') \right\} \right\} + \xi_1 \sum_{j=1}^m \left\{ \int_s^t d\hat{W}_j^a(s')\sigma_j(s') \right\} \right\} \quad (3)$$

$$\xi_1 = \frac{1+\alpha}{\varepsilon}$$

La condición de extinción o quenching (respuesta medible del MFG) es:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m q_{1j} \left\{ \int_0^t d\hat{W}_j^b(s)\sigma_j^{(1)}(s, \theta)g(t-s)\langle \mathcal{F}_1[s, T(s - \tau_j^a)] \rangle \right\} + \\ + \sum_{j=1}^m \bar{q}_{2j} \left\{ \int_0^t dp_j(s)\sigma_j^{(2)}(s, \theta)g(t-s)\mathcal{F}_2[s, T(s - \tau_j^a)][u(s)]^{-\beta-\alpha} \right\} = \\ = \frac{g(t-0)[T(0)]^{1+\alpha}}{\xi_1} \quad (4) \end{aligned}$$

$\langle \mathcal{F}_{1,2}[t, T(t - \tau_j^b)] \rangle$ – Operadores de Matsubara

Esta última condición, permitirá calcular numéricamente, los sucesivos tiempos de extinción del estímulo.

2.1. Modelo balístico-difusivo con termino potencial singular

A escalas micro y nanoscópica, y para rangos de tiempo del mismo orden, en los MFG, se propone la existencia de dos tipos de fonones responsables del transporte de calor en la red

crystalina, unos de tipo balístico y otro de tipo difusivo, así entonces, se tienen dos regímenes, los fonones difusivos siguen una ley tipo Cattaneo-Vernotte, y los balísticos obedecen al modelo tipo Guyer Krumhansl (Lebon et al., 2011)

$$\begin{aligned}
 &\tau_d \partial_t^2 u_d(\vec{x}, t) - a_d^2 \hat{\nabla}^2 u_d(\vec{x}, t) + \partial_t u_d(\vec{x}, t) = \mathbb{F}[u_b, \partial_t u_b] \\
 &\tau_b \partial_t^2 u_b(\vec{x}, t) - a_b^2 \hat{\nabla}^2 u_b(\vec{x}, t) - a_{1b}^2 \hat{\nabla}^2 [\partial_t u_b(\vec{x}, t)] + 2 \partial_t u_b(\vec{x}, t) + \xi(t) [u_b(\vec{x}, t)]^{-\alpha} = 0 \\
 &u_d(\vec{x}, 0) = u_d^0 / u_d^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_d(\vec{x}, 0) = w_d^0 / w_d^0 \in L^2(D_k) \\
 &u_b(\vec{x}, 0) = u_b^0 / u_b^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_b(\vec{x}, 0) = w_b^0 / w_b^0 \in L^2(D_k) \\
 &u_d(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = u_b(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \\
 &- a_d^2 \partial_{\hat{n}} u_d(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = [-a_d^2 \partial_{\hat{n}} u_b(\vec{x}, t) - a_{1b}^2 \partial_{\hat{n}} \dot{u}_b(\vec{x}, t)] \Big|_{\partial\Gamma_2} = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

Condiciones sobre las constantes y otras funciones

$$\begin{aligned}
 &\tau_d, \tau_b, \lambda_d, \lambda_b, a_b, a_d \in \mathfrak{R}_0^+ ; \mathbb{F}[u_b, \partial_t u_b] = (\tau_d / \tau_b) \partial_t u_b(\vec{x}, t) + (1 / \tau_b) u_b(\vec{x}, t) \\
 &a_d^2 = (\lambda_d / c_d) ; a_b^2 = (\lambda_b / c_b) + (3 l_b^2 / \tau_b) ; \lambda_d = (1/3) c v_d^2 \tau_d ; \lambda_b = (1/3) c v_b^2 \tau_b \\
 &v_d = l_d / \tau_d ; v_b = l_b / \tau_b ; \alpha \geq -1 ; a_{1b}^2 = 3 l_b^2 ; l_b, l_a, c \in \mathfrak{R}_0^+ ; \xi \in L^2(\mathfrak{R}_k^+)
 \end{aligned}$$

Representación integral de las soluciones

$$\begin{aligned}
 u_d(\vec{x}, t) = &\int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3 x' g_d(x - x', t - s) \mathbb{F}[u_b, \partial_t u_b] \right\} + \\
 &+ \iiint_{R^3} d^3 x' \{ g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_d(\vec{x}', 0) - u_d(\vec{x}', 0) \partial_t g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} \tag{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_b(\vec{x}, t) = &\int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3 x' g_b(x - x', t - s) \xi(s) [u_b(\vec{x}', s)]^{-\alpha} \right\} + \\
 &+ \iiint_{R^3} d^3 x' \{ g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_b(\vec{x}', 0) - u_b(\vec{x}', 0) \partial_t g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} \tag{7}
 \end{aligned}$$

Una posible generalización del modelo anterior podrá escribirse en la forma:

2.2. Modelo balístico difusivo con términos viscoso-disipativos no lineales

$$\begin{aligned}
 &\tau_d \partial_t^2 u_d(\vec{x}, t) - a_d^2 \hat{\nabla}^2 u_d(\vec{x}, t) + \lambda_d [\partial_t u_d(\vec{x}, t)]^{-\beta} = \mathbb{F}[u_b, \partial_t u_b] \\
 &\tau_b \partial_t^2 u_b(\vec{x}, t) - a_b^2 \hat{\nabla}^2 u_b(\vec{x}, t) - a_{1b}^2 \hat{\nabla}^2 [[\partial_t u_b(\vec{x}, t)]^{-\beta}] + \lambda_b \partial_t u_d(\vec{x}, t) + \\
 &+ \xi(t) [u_d(\vec{x}, t)]^{-\alpha} = 0 \\
 &u_d(\vec{x}, 0) = u_d^0 / u_d^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_d(\vec{x}, 0) = w_d^0 / w_d^0 \in L^2(D_k) \\
 &u_b(\vec{x}, 0) = u_b^0 / u_b^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_b(\vec{x}, 0) = w_b^0 / w_b^0 \in L^2(D_k) \\
 &u_d(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = u_b(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \\
 &- a_d^2 \partial_{\hat{n}} u_d(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = [-a_d^2 \partial_{\hat{n}} u_b(\vec{x}, t) - a_{1b}^2 \partial_{\hat{n}} [\partial_t u_b(\vec{x}, t)]^{-\beta}] \Big|_{\partial\Gamma_2} = 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

Condiciones sobre las constantes y otras funciones

$$\begin{aligned} \tau_d, \tau_b, \lambda_d, \lambda_b, a_b, a_d &\in \mathfrak{R}_0^+; \mathbb{F}[u_b, \partial_t u_b] = (\tau_d/\tau_b)\partial_t u_b(\vec{x}, t) + (1/\tau_b)u_b(\vec{x}, t) \\ a_d^2 &= (\lambda_d/c_d); a_b^2 = (\lambda_b/c_b) + (3l_b^2/\tau_b); \lambda_d = (1/3)cv_d^2\tau_d; \lambda_b = (1/3)cv_b^2\tau_b \\ v_d &= l_d/\tau_d; v_b = l_b/\tau_b; \alpha \geq -1; a_{1b}^2 = 3l_b^2; l_b, l_d, c \in \mathfrak{R}_0^+; \xi \in L^2(\mathfrak{R}_k^+) \end{aligned}$$

Representación integral de las soluciones

$$\begin{aligned} u_d(\vec{x}, t) &= \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3x' g_d(x - x, t - s) \mathbb{F}[u_b, \partial_t u_b] \right\} - \\ &\quad - \lambda_d \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3x' g_d(x - x, t - s) [\partial_t u_d(\vec{x}', s - \tau)]^{-\beta} \right\} + \\ &\quad + \iiint_{R^3} d^3x' \{ g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_d(\vec{x}', 0) - u_d(\vec{x}', 0) \partial_t g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_b(\vec{x}, t) &= \\ &= \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3x' g_b(x - x, t - s) \{ -\xi(s)[u_b(\vec{x}', s)]^{-\alpha} + a_b^2 \hat{\nabla}'^2 [[\partial_s u_b(\vec{x}', s)]^{-\beta}] \} \right\} + \\ &\quad + \iiint_{R^3} d^3x' \{ g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_b(\vec{x}', 0) - u_b(\vec{x}', 0) \partial_t g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} \quad (10) \end{aligned}$$

Los aproximantes de Picard serán:

$$\begin{aligned} u_d^{(j+1)}(\vec{x}, t) &\cong K_d^0[\partial_t u_d(\vec{x}, 0), u_d(\vec{x}, 0)] + \\ &\quad + \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3x' g_d(x - x, t - s) \mathbb{F}[u_b^{(j)}, \partial_t u_b^{(j)}] \right\} - \\ &\quad - \lambda_d \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3x' g_d(x - x, t - s) [\partial_t u_d^{(j)}(\vec{x}', s - \tau)]^{-\beta} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_d^0[\partial_t u_d(\vec{x}, 0), u_d(\vec{x}, 0)] &= \\ &= \iiint_{R^3} d^3x' \{ g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_d(\vec{x}', 0) - u_d(\vec{x}', 0) \partial_t g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} \\ u_b^{(j+1)}(\vec{x}, t) &\cong K_b^0[\partial_t u_b(\vec{x}, 0), u_b(\vec{x}, 0)] + \\ &\quad + \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3x' g_b(x - x, t - s) \{ -\xi(s)[u_b^{(j)}(\vec{x}', s)]^{-\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + a_b^2 \hat{\nabla}'^2 [[\partial_s u_b^{(j)}(\vec{x}', s)]^{-\beta}] \} \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_b^0[\partial_t u_b(\vec{x}, 0), u_b(\vec{x}, 0)] &= \\ &= \iiint_{R^3} d^3x' \{ g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_b(\vec{x}', 0) - u_b(\vec{x}', 0) \partial_t g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} \end{aligned}$$

Generalizando el modelo de Nika (2023), en el sentido de considerar una extensión del modelo de Cattaneo-Vernotte de segundo gradiente, es decir introduciendo la influencia de la microestructura tendríamos:

2.3. Modelo balístico difusivo en la formulación de segundo gradiente

$$\begin{aligned}
 & \tau_d \partial_t^2 u_d(\vec{x}, t) - \tau_d^2 l_1^2 \hat{\nabla}^2 [\partial_t^2 u_d(\vec{x}, t)] - a_d^2 (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 u_d(\vec{x}, t) + \\
 & + \lambda_d (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t u_d(\vec{x}, t) = [1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2] \mathbb{F}[u_b, \partial_t u_b] \\
 & \tau_b \partial_t^2 u_b(\vec{x}, t) - \tau_b^2 l_2^2 \hat{\nabla}^2 [\partial_t^2 u_b(\vec{x}, t)] - a_b^2 (1 - l_2^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 u_b(\vec{x}, t) - \\
 & - a_b^2 (1 - l_2^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 [\partial_t u_b(\vec{x}, t)] + \\
 & + \lambda_b (1 - l_2^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t u_b(\vec{x}, t) + \xi(t) (1 - l_2^2 \hat{\nabla}^2) [u_d(\vec{x}, t)]^{-\alpha} = 0 \\
 & u_d(\vec{x}, 0) = u_d^0 / u_d^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_d(\vec{x}, 0) = w_d^0 / w_d^0 \in L^2(D_k) \\
 & u_b(\vec{x}, 0) = u_b^0 / u_b^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_b(\vec{x}, 0) = w_b^0 / w_b^0 \in L^2(D_k) \\
 & u_d(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial D_k} = u_d^0 \Big|_{\partial D_k} / u_d^0 \Big|_{\partial D_k} \in H_0^1(\partial D_k) ; \hat{n} \cdot \hat{\nabla}(\partial_t u_d(x, z, 0)) \Big|_{\partial D_k} = w_d^0 \Big|_{\partial D_k} \\
 & u_b(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial D_k} = u_b^0 \Big|_{\partial D_k} / u_b^0 \Big|_{\partial D_k} \in H_0^1(\partial D_k) ; \hat{n} \cdot \hat{\nabla}(\partial_t u_b(x, z, 0)) \Big|_{\partial D_k} = w_b^0 \Big|_{\partial D_k} \\
 & w_d^0 \Big|_{\partial D_k} \in L^2(\partial D_k) ; w_b^0 \Big|_{\partial D_k} \in L^2(\partial D_k) ; u_d(\vec{x}, t) \Big|_{\partial \Gamma_1} = u_b(\vec{x}, t) \Big|_{\partial \Gamma_1} = 0 \\
 & - a_d^2 \partial_{\hat{n}} u_d(\vec{x}, t) \Big|_{\partial \Gamma_2} = [-a_d^2 \partial_{\hat{n}} u_b(\vec{x}, t) - a_{1b}^2 \partial_{\hat{n}} [\partial_t u_b(\vec{x}, t)]^{-\beta}] \Big|_{\partial \Gamma_2} = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

Condiciones sobre las constantes y otras funciones

$$\begin{aligned}
 & \tau_d, \tau_b, \lambda_d, \lambda_b, a_b, a_d \in \mathfrak{R}_0^+ ; \mathbb{F}[u_b, \partial_t u_b] = (\tau_d / \tau_b) \partial_t u_b(\vec{x}, t) + (1 / \tau_b) u_b(\vec{x}, t) \\
 & a_d^2 = (\lambda_d / c_d) ; a_b^2 = (\lambda_b / c_b) + (3 l_b^2 / \tau_b) ; \lambda_d = (1/3) c v_d^2 \tau_d ; \lambda_b = (1/3) c v_b^2 \tau_b \\
 & v_d = l_d / \tau_d ; v_b = l_b / \tau_b ; \alpha \geq -1 ; a_{1b}^2 = 3 l_b^2 ; l_b, l_d, l_1, c \in \mathfrak{R}_0^+ ; \xi \in L^2(\mathfrak{R}_k^+)
 \end{aligned}$$

Representación integral de las soluciones

$$\begin{aligned}
 u_d(\vec{x}, t) = & \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3 x' g_d(x - x', t - s) \mathbb{F}[u_b, \partial_t u_b] \right\} - \\
 & - \lambda_d \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3 x' g_d(x - x', t - s) [\partial_t u_d(\vec{x}', s - \tau)]^{-\beta} \right\} + \\
 & + \iiint_{R^3} d^3 x' \{ g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_d(\vec{x}', 0) - u_d(\vec{x}', 0) \partial_t g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} + \\
 & + \oint_{\partial V_k} da \{ [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) u_d(\vec{x}', 0) - [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t u_d(\vec{x}', 0) g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} \tag{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_b(\vec{x}, t) = & \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3 x' g_b(x - x', t - s) \{ -\xi(s) [u_b(\vec{x}', s)]^{-\alpha} + a_b^2 \hat{\nabla}'^2 [[\partial_s u_b(\vec{x}', s)]^{-\beta}] \} \right\} + \\
& + \iiint_{R^3} d^3 x' \{ g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_b(\vec{x}', 0) - u_b(\vec{x}', 0) \partial_t g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} + \\
& + \oint_{\partial V_k} da \{ g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_d(\vec{x}', 0) - u_d(\vec{x}', 0) \partial_t g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} + \\
& + \oint_{\partial V_k} da \{ [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) u_b(\vec{x}', 0) - [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t u_b(\vec{x}', 0) g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} \quad (15)
\end{aligned}$$

Los aproximantes de Picard son:

$$\begin{aligned}
u_d^{(j+1)}(\vec{x}, t) \cong & K_0(\partial_t u_d(\vec{x}, 0), u_d(\vec{x}, 0), u_d(\vec{x}, 0)|_{\partial V_k}, [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t u_d(\vec{x}, 0)|_{\partial V_k}) + \\
& + \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3 x' g_d(x - x', t - s) \mathbb{F}[u_b^{(j)}, \partial_t u_b^{(j)}] \right\} - \\
& - \lambda_d \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3 x' g_d(x - x', t - s) [\partial_t u_d^{(j)}(\vec{x}', s - \tau)]^{-\beta} \right\} \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_0(\partial_t u_d(\vec{x}, 0), u_d(\vec{x}, 0), u_d(\vec{x}, 0)|_{\partial V_k}, [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t u_d(\vec{x}, 0)|_{\partial V_k}) = \\
& = \iiint_{R^3} d^3 x' \{ g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_d(\vec{x}', 0) - u_d(\vec{x}', 0) \partial_t g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} + \\
& + \oint_{\partial V_k} da \left\{ [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) u_d(\vec{x}', 0) \Big|_{\partial V_k} - \right. \\
& \left. - [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t u_d(\vec{x}', 0) \Big|_{\partial V_k} g_d(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_b^{(j+1)}(\vec{x}, t) \cong & \bar{K}_0(\partial_t u_b(\vec{x}, 0), u_b(\vec{x}, 0), u_b(\vec{x}, 0)|_{\partial V_k}, [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t u_b(\vec{x}, 0)|_{\partial V_k}) + \\
& + \int_0^t ds \left\{ \iiint_{R^3} d^3 x' g_b(x - x', t - s) \{ -\xi(s) [u_b^{(j)}(\vec{x}', s)]^{-\alpha} + a_b^2 \hat{\nabla}'^2 [[\partial_s u_b^{(j)}(\vec{x}', s)]^{-\beta}] \} \right\} \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{K}_0(\partial_t u_b(\vec{x}, 0), u_b(\vec{x}, 0), u_b(\vec{x}, 0)|_{\partial V_k}, [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t u_b(\vec{x}, 0)|_{\partial V_k}) = \\
& = \iiint_{R^3} d^3 x' \{ g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \partial_t u_b(\vec{x}', 0) - u_b(\vec{x}', 0) \partial_t g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \} + \\
& + \oint_{\partial V_k} da \{ [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) u_b(\vec{x}', 0) - [n_k \cdot \hat{\nabla}] \partial_t u_b(\vec{x}', 0) g_b(\vec{x} - \vec{x}', t - 0) \}
\end{aligned}$$

Distribución de temperaturas en una aleación Ti-Zr, utilizando el modelo Primer Modelo balístico difusivo con términos viscoso-disipativos no lineales

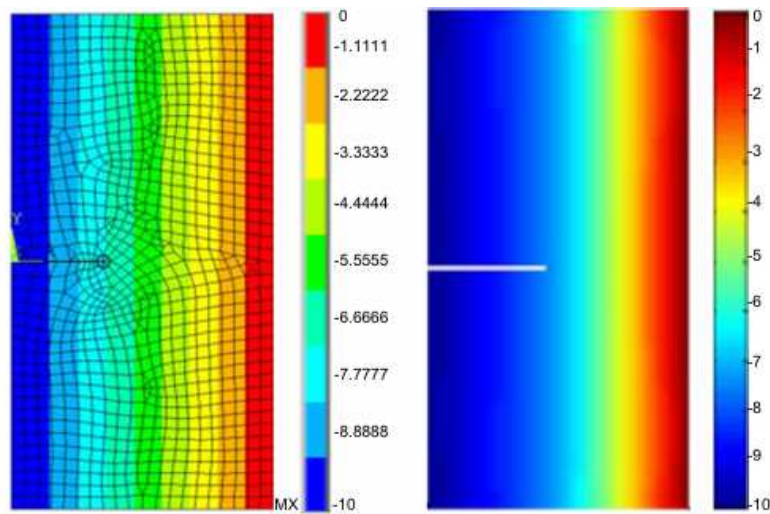


Figura 4:

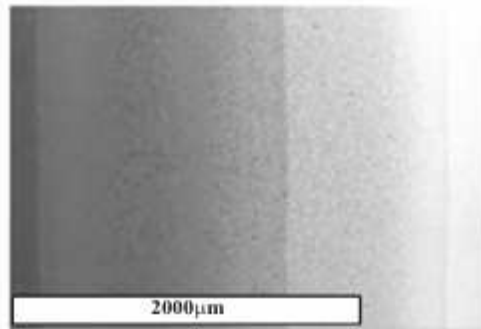


Figura 5: Dimensiones del espécimen

3. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se formularon y resolvieron semi-analíticamente tres modelos de conducción del calor en materiales funcionalmente graduados, en todos ellos se asume la hipótesis de la relación entre el fenómeno de extinción o quenching y la respuesta de este tipo de materiales, ante el estímulo de un pulso de calor, la distribución suave de temperaturas obedece a la presencia de microestructuras distribuidas de manera homogénea en el material, suponemos la mezcla continua de dos sólidos, en general metales de transición, sobre todo los de los grupos 6, 7 y 8, periodos 4, 5 y 6.

REFERENCIAS

- Ait Ferhat Y., Chorfi H., Abacha I., Benchikh L., Kebaili M., Blaoui M.M., y Boulenouar A. Evaluation of stress intensity factors in functionally graded plate under mechanical and thermal loadings. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 17(5):2745–2753, 2023. <http://doi.org/10.1007/s12008-023-01212-z>.
- Bui T.Q., Lich L.V., Yu T., y Singh I.V., editores. *Advances in Mechanical Problems of Functionally Graded Materials and Structures*. MDPI - Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2019. ISBN 9783039216598. <http://doi.org/10.3390/books978-3-03921-659-8>.
- Chen G. Ballistic-Diffusive Equations for Transient Heat Conduction From Nano to Macroscales. *Journal of Heat Transfer*, 124(2):320–328, 2001. ISSN 0022-1481.

- <http://doi.org/10.1115/1.1447938>.
- Dell’Oro F. y Pata V. A hierarchy of heat conduction laws. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, 16(10):2636–2648, 2023. ISSN 1937-1632. <http://doi.org/10.3934/dcdss.2022190>.
- El-Galy I.M., Saleh B.I., y Ahmed M.H. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, 1(11):1378, 2019. <http://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>.
- Lebon G., Machrafi H., Grmela M., y Dubois C. An extended thermodynamic model of transient heat conduction at sub-continuum scales. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 467(2135):3241–3256, 2011. <http://doi.org/10.1098/rspa.2011.0087>.
- Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., y Ford R.G., editores. *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Materials Technology Series. Springer New York, United States, 1999. ISBN 9780412607608. <http://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>.
- Nika G. A gradient system for a higher-gradient generalization of Fourier’s law of heat conduction. *Modern Physics Letters B*, 37(11):2350011, 2023. <http://doi.org/10.1142/S0217984923500112>.
- Pasha A. y Rajaprakash B.M. Functionally graded materials (FGM) fabrication and its potential challenges & applications. *Materials Today: Proceedings*, 52:413–418, 2022. ISSN 2214-7853. <http://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.09.077>. International Conference on Smart and Sustainable Developments in Materials, Manufacturing and Energy Engineering.
- Sobczak J. y Drenchev L. *Metal Based Functionally Graded Materials*. Bentham e Books, 2009. ISBN 9781608050383. <http://doi.org/10.2174/97816080503831090101>.