

ANÁLISIS DEL CONTROL Y LA GENERACIÓN DE ENERGÍA DE UNA PLACA COMPUESTA VISCOELÁSTICA-PIEZOELÉCTRICA

ANALYSIS OF CONTROL AND ENERGY HARVESTING IN A VISCOELASTIC-PIEZOELECTRIC COMPOSITE PLATE

Aaron E. Gelves^a, Mariano Febbo^a, Paolo M. Cuevas^b y Carlos A. Bavastri^b

^a*Instituto de Física del Sur (IFISUR), Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur (UNS), Avda. Alem 1253, B8000CPB-Bahía Blanca, Argentina, mfebbo@uns.edu.ar, <https://www.uns.edu.ar>*

^b*Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Federal de Paraná (UFPR), Avda. Cel. Francisco H. dos Santos 100, Curitiba, Brasil, bavastri@ufpr.br, <https://www.ufpr.br>*

Palabras clave: Recolector-absorbedor, frecuencia, respuesta, material viscoelástico.

Resumen. Un absorbedor dinámico de vibraciones disipa la energía mecánica del sistema sobre el cual se adosa (sistema primario). Un recolector de energía convierte las vibraciones desarrolladas por dicho sistema en energía eléctrica. Un dispositivo recolector-absorbedor (DRA), cumple con el doble propósito de reducir la respuesta vibratoria del sistema primario y generar energía. En este trabajo se presenta un modelo continuo de un DRA formado por una placa de material piezoeléctrico bimorfo (modelo Q220-H4BR-2513YB), una lámina viscoelástica de goma butílica (modelo C1002-01PSA) y una lámina de acero inoxidable que actúa como capa restrictora. El modelo del compuesto conduce a obtener las ecuaciones de movimiento del DRA a partir del principio de Hamilton y utilizando un modelo de derivadas fraccionarias para el material viscoelástico. Aplicando una descomposición modal y en virtud del análisis de Fourier, es posible determinar la frecuencia natural del sistema, su desplazamiento y el voltaje generado, tanto en el dominio temporal como en el de la frecuencia. La validez de estos resultados se compara con un modelo de parámetros concentrados desarrollado previamente y una simulación por elementos finitos implementada en un programa comercial.

Keywords: Harvester-absorber, frequency, response, viscoelastic material.

Abstract. A dynamic vibration absorber dissipates the mechanical energy of the system to which it is attached (primary system). An energy harvester converts the vibrations generated by this system into electrical energy. A device called a dynamic vibration absorber-harvester (DVAH) serves the dual purpose of reducing the vibratory response of the primary system and generating energy. This work presents a continuous model of a DVAH composed of a bimorph piezoelectric plate (model Q220-H4BR-2513YB), a viscoelastic sheet made of butyl rubber (model C1002-01PSA), and a stainless-steel layer that acts as a constraining layer. The composite model leads to the derivation of the DVAH's equations of motion based on Hamilton's principle, employing a fractional derivative model for the viscoelastic material. By applying modal decomposition and using Fourier analysis, it is possible to determine the system's natural frequency, displacement, and generated voltage, both in the time and frequency domains. The validity of these results is compared with a previously developed lumped parameter model and a finite element simulation implemented in commercial software.

1. INTRODUCCIÓN

La absorción de energía vibratoria mediante absorbedores dinámicos tiene larga data. Desde los trabajos pioneros teóricos de [Den Hartog \(1956\)](#), a principios de la década del 50, hasta la actualidad ([Febbo \(2012\)](#)) esta técnica ha conformado el estándar del control pasivo de vibraciones y su estudio y su uso están ampliamente difundidos a nivel académico e industrial.

Un absorbedor dinámico de vibraciones es un sistema que consta, por lo general, de una masa, un elemento elástico y otro amortiguador que se coloca sobre una estructura denominada sistema primario cuyas vibraciones se quieren “absorber” o amortiguar. Los absorbedores pueden ser del tipo MK (masa-resorte) o MCK (masa-amortiguador-resorte) ([Rao \(2004\)](#)). El primero es utilizado para controlar vibraciones en banda estrecha y su frecuencia natural es igual a la frecuencia a la cual se excita el sistema primario. El segundo tipo puede realizar un control en banda ancha de frecuencias gracias a su capacidad de amortiguar la energía vibratoria sobre un amplio espectro. En este último caso, la frecuencia natural del absorbedor es ligeramente diferente a la de un modelo de sistema primario de un grado de libertad.

Por otra parte, un recolector de energía de vibraciones es un elemento transductor que convierte las vibraciones en energía eléctrica. Los hay de múltiples tipos: electrostáticos, electromagnéticos, triboeléctricos y piezoeléctricos. En este trabajo la atención estará centrada en recolectores de energía piezoeléctricos debido a su fácil implementación, gran densidad de potencia y buena durabilidad sin mantenimiento.

Los recolectores de energía piezoeléctricos han probado ser una alternativa económica y eficiente en la captación de energía del ambiente. En los últimos años, una gran cantidad de investigadores propusieron diferentes dispositivos variando la geometría, los grados de libertad, la no-linealidad y los esfuerzos mecánicos, entre varias alternativas ([Gatti et al. \(2018\)](#)). El material más utilizado como transductor piezoeléctrico es el PZT (basado en plomo, circonio y titanio), se encuentran comercialmente en forma de fibras (MFC), cerámicos (MIDE) o buzzers.

La propuesta de un recolector-absorbedor desarrollado a partir de un material compuesto piezoeléctrico-viscoelástico pretende satisfacer un doble objetivo, combinando las funciones de un recolector de energía y un absorbedor dinámico de vibraciones. Las bondades de esta doble función permiten, la recolección de energía y su uso, por ejemplo, en la alimentación de un sensor adosado al sistema primario y simultáneamente la absorción de energía del sistema primario evitando una vibración excesiva en un rango de frecuencias. Como ventaja adicional, el uso de material viscoelástico posibilita una extensión de la vida útil de la viga piezoeléctrica.

En este trabajo se modela y analiza un dispositivo recolector-absorbedor tipo placa compuesta piezoeléctrica-viscoelástica valiéndose de métodos analíticos y computacionales a partir de la teoría del continuo. Respecto a trabajos similares, [Gelves et al. \(2024\)](#) presentan un modelo de parámetros concentrados del sistema mencionado. [Park y Baz \(2001\)](#) consideran un sistema similar en el que la placa de restricción se cambia por un actuador piezoeléctrico y el comportamiento viscoelástico se modela con un polinomio. Posteriormente, el trabajo de [Khalfi y Ross \(2013\)](#) supone que el mismo sistema no tiene ninguna propiedad piezoeléctrica y modela al viscoelástico usando la serie de Prony. Algunos artículos como [Fogang \(2025\)](#) y [Hadjji et al. \(2024\)](#) analizan las vibraciones de sistemas formados por tres placas, y particularmente [Gao et al. \(2023\)](#) estudia el caso en el cual la lámina media es viscoelástica.

2. MODELO MATEMÁTICO

2.1. Composición del DRA y condiciones de borde

El DRA considerado consiste en una placa de material piezoeléctrico bimorfo (modelo Q220-H4BR-2513YB), el cual se compone de una lámina de latón entre dos láminas de PZT 5H, sobre el que se adhiere una lámina viscoelástica de goma butílica (modelo C1002-01PSA) y una lámina de acero inoxidable que actúa como capa restrictora. El sistema puede observarse en la Figura 1, donde se observan también las condiciones de borde: todos los bordes libres excepto por $x = 0$, que está elásticamente restringido contra rotación a través de resortes de constante k_r . Como en un caso genérico el viscoelástico no necesariamente debe cubrir toda la placa piezoeléctrica, se define la longitud a_v , que indica la distancia desde el contorno $x = 0$ hasta donde comienza la placa viscoelástica.

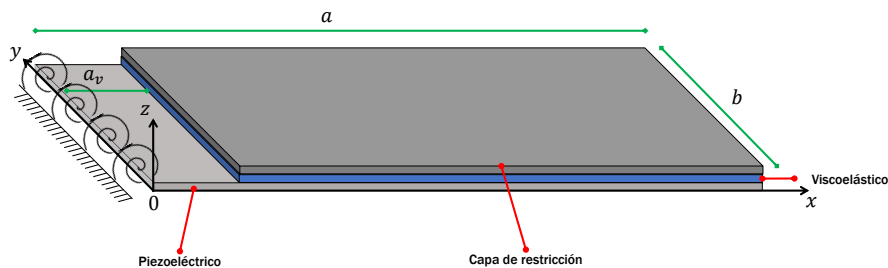


Figura 1: Dispositivo recolector-absorbedor (DRA).

2.2. Consideraciones del modelo del DRA

2.2.1. Aproximaciones

Para la deducción de las ecuaciones de movimiento se consideran las siguientes aproximaciones: las placas son delgadas, por lo que se aplica la teoría de Kirchhoff-Love; existe adherencia perfecta entre las distintas placas y continuidad del desplazamiento en las interfases, considerando en el caso del piezoeléctrico bimorfo una única placa equivalente formada por las láminas de PZT y el latón; las tres placas que conforman el DRA (piezoeléctrico equivalente, viscoelástica y restrictora) presentan el mismo desplazamiento transversal; la deformación por corte y la inercia rotacional en la placa piezoeléctrica equivalente y en la de restricción son despreciables; y la placa viscoelástica está sometida únicamente a deformación por corte sin tensiones normales. En adelante, los subíndices p , v y c se referirán a la lámina piezoeléctrica equivalente, la viscoelástica y la de restricción, respectivamente.

2.2.2. Geometría y desplazamientos

El desplazamiento transversal global se denota con w y los desplazamientos en x e y se denotan con u y v , correspondientemente. Con esto en cuenta, se consideran las siguientes definiciones:

- u_i es el desplazamiento dentro del plano y en la superficie media de la placa i .
- v_i es el desplazamiento dentro del plano y en la superficie media de la placa i .
- w es el desplazamiento común de los planos medios de cada placa.

- v es el voltaje generado por el piezoeléctrico.

En consecuencia se define al vector desplazamiento como $\vec{r}_i(x, y) = [u_i(x, y), v_i(x, y), w(x, y)]$, cuyos componentes son

$$u_i = u_j - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{y} \quad v_i = v_j - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1)$$

en donde $i = p, c$ representan el piezoeléctrico y la capa de restricción respectivamente, para los cuales se corresponden $j = 1, 3$, que denotan el desplazamiento en x del origen al plano medio de la placa piezoeléctrica equivalente y la viscoelástica.

Como la deformación del viscoelástico ocurre en los planos xz e yz , los desplazamientos longitudinales del mismo se calculan según (Gao y Shen (1999))

$$u_2 = \left(\frac{u_3 + u_1}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{h_p - h_c}{4} \right) \quad \text{y} \quad v_2 = \left(\frac{v_3 + v_1}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{h_p - h_c}{4} \right) \quad (2)$$

en donde los h_i son los espesores de las láminas. Análogas son las definiciones para v_1 y v_3 pero a lo largo de la coordenada y .

2.3. Modelo del viscoelástico

El modelo que será utilizado para la placa viscoelástica es un modelo de derivadas fraccionarias en el cual el módulo de cizallamiento depende de la temperatura y de la frecuencia de excitación (Bronkhorst et al. (2018)), que viene dado por

$$G_v(\Omega, T) = \frac{G_0 + G_\infty b_1 (i\Omega\alpha(T))^\beta}{1 + b_1 (i\Omega\alpha(T))^\beta}, \quad \text{con} \quad \log(\alpha(T)) = -\frac{\theta_1(T - T_0)}{\theta_2 + T - T_0} \quad (3)$$

donde G_0 y G_∞ son las asíntotas inferior y superior, respectivamente, β es el orden fraccionario de la derivada que aparece en la ecuación constitutiva del material viscoelástico y b_1 es la constante de tiempo del material. De ahora en adelante, la temperatura T (considerada fija) se omitirá en $G_v(\Omega, T)$ por simplicidad.

2.4. Relaciones constitutivas

Para las placas piezoeléctrica equivalente y restrictora, la ecuación constitutiva de la tensión σ como función de la deformación ε es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} & \frac{\nu_i E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ \frac{\nu_i E_i}{1-\nu_i^2} & \frac{E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} \frac{V_a \Lambda}{h_p} d_{31} \\ \frac{V_a \Lambda}{h_p} d_{32} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4)$$

en donde Λ es la distribución espacial del piezoeléctrico en la placa, V_a es el voltaje a través del espesor de la lámina piezoeléctrica y los d_{ij} son las constantes piezoeléctricas, E_i y ν_i son el módulo de Young y el coeficiente de Poisson respectivamente. Esta expresión considera que el material es piezoeléctrico, pero en caso de que no lo sea, como ocurre con $i = c$, entonces $d_{31} = d_{32} = 0$. Cabe mencionar que en la expresión anterior y en las siguientes se utiliza la notación de Voigt: $\sigma_1 = \sigma_{xx}$, $\sigma_2 = \sigma_{yy}$ y $\sigma_6 = \sigma_{xy}$.

En cuanto al viscoelástico se define a la deformación por corte como (Gao y Shen (1999))

$$[\gamma_{xz}]_v = \frac{d}{h_2} \left[\left(\frac{u_3 - u_1}{d} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad \text{y} \quad [\gamma_{yz}]_v = \frac{d}{h_2} \left[\left(\frac{v_3 - v_1}{d} \right) - \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (5)$$

en donde $d = h_v + \frac{h_p + h_c}{2}$. De este modo la ecuación constitutiva que relaciona la tensión de corte con la deformación por corte es lineal:

$$[\tau_{xz}]_v = G_v [\gamma_{xz}]_v \quad \text{y} \quad [\tau_{yz}]_v = G_v [\gamma_{yz}]_v$$

2.5. Energías

Llamando V al volumen de una lámina, entonces la energía potencial se calcula según

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \iiint_{V_i} \sum_{i=p,c} [\epsilon]_i^T [\sigma]_i dV_i + \iiint_{V_v} ([\gamma_{xz}]_v [\tau_{xz}]_v + [\gamma_{yz}]_v [\tau_{yz}]_v) dV_v \right\} \quad (6)$$

mientras que la energía cinética viene dada por

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{V_v} \rho_v \left[\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} \right)^2 \right] dV_v + \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \sum_{i=p,c} \rho_v |\dot{r}_i|^2 dV_i \quad (7)$$

con

$$\alpha_2 = \frac{u_3 - u_1}{h_v} - \frac{1}{2h_v} \left(h_c \frac{\partial w}{\partial x} + h_p \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{v_3 - v_1}{h_v} - \frac{1}{2h_v} \left(h_p \frac{\partial w}{\partial y} + h_c \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (8)$$

que contemplan la energía de rotación del viscoelástico. ρ_i son las densidades de las láminas.

2.6. Ecuaciones de movimiento

A partir de la aplicación del principio de Hamilton se obtienen las seis ecuaciones de movimiento para u_i , v_i , w y el voltaje $v = \Lambda V_a$:

$$\begin{aligned} (A_{11})_p \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + [(A_{12})_p + (A_{66})_p] \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + (A_{66})_p \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{G_v}{h_v} \left(u_3 - u_1 - d \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ = \rho_p h_p \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x} (C_{11} d_{31} + C_{12} d_{32}) + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} (C_{61} d_{31} + C_{62} d_{32}) \end{aligned} \quad (9a)$$

$$(A_{11})_p \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + [(A_{12})_p + (A_{66})_p] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + (A_{66})_c \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{G_v}{h_v} \left(v_3 - v_1 - d \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$= \rho_p h_p \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x} (C_{61} d_{31} + C_{62} d_{32}) + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} (C_{21} d_{31} + C_{22} d_{32}) \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} & (A_{11})_c \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + [(A_{12})_c + (A_{66})_c] \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + (A_{66})_p \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \frac{G_v}{h_v} \left(u_3 - u_1 - d \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & = \rho_c h_c \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} & (A_{11})_c \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + [(A_{12})_c + (A_{66})_c] \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} + (A_{66})_c \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} - \frac{G_v}{h_v} \left(v_3 - v_1 - d \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & = \rho_c h_c \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9d)$$

$$\begin{aligned} & [(D_{11})_p + (D_{11})_c] \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{G_v}{h_v} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. - d \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + (\rho_p h_p + \rho_v h_v + \rho_c h_c) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ & = - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} (H_{11} d_{31} + H_{12} d_{32}) - 2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} (H_{61} d_{31} + H_{62} d_{32}) - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} (H_{21} d_{31} + H_{22} d_{32}) + q(x, y, t) \end{aligned} \quad (9e)$$

$$\begin{aligned} \frac{v}{R_L} = & -C_p \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^a \int_0^b d_{31} \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dy dx \right. \\ & \left. + \int_0^a \int_0^b d_{32} \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dy dx \right\} \end{aligned} \quad (9f)$$

en donde $(A_{kl})_i$ y $(D_{kl})_i$ son los elementos (k, l) de las matrices de rigidez en el plano y flexural para la placa i , respectivamente. En el caso $i = p$, expresan el equivalente de las 3 láminas del piezoelectrico. Los valores de C_{kl} y H_{kl} se encuentran en la refs (Park y Baz (2001)).

Nótese que Ec. (9f) surge de la aplicación de la ley de las corrientes de Kirchhoff al equivalente eléctrico del piezoelectrico, considerando que lo que está entre llaves es la carga eléctrica q_e , R_L es la resistencia y C_p es la capacitancia.

2.7. Cálculo de las frecuencias naturales

Para obtener las frecuencias naturales del DRA a partir de las Ecs. (9), los desplazamientos se expresan utilizando una descomposición modal, que se compone del producto entre la coordenada generalizada dependiente del tiempo y las formas modales dependientes de las coordenadas espaciales, como sigue:

$$\begin{aligned}
u_i(x, y, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{imn} e^{i\omega t} X'_{im}(x) Y_{in}(y), & v_i(x, y, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_{imn} e^{i\omega t} X_{im}(x) Y'_{in}(y) \\
w(x, y, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn} e^{i\omega t} X_{1m}(x) Y_{1n}(y), & v(x, y, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} X_{1m}(x) Y_{1n}(y)
\end{aligned} \tag{10}$$

donde U_{imn} , V_{imn} , W_{mn} y V_{mn} son las amplitudes de las coordenadas modales ($i = 1$ denota piezoeléctrico, $i = 3$ la placa restrictora y m, n el modo). Las formas modales X_m e Y_m satisfacen las siguientes condiciones de borde: $X_{1m}(x)$ y $X_{3m}(x)$ son funciones viga en la dirección x (que satisfacen la condición de borde elástico contra rotación-libre) e $Y_{1m}(y) = Y_{3m}(y)$ son funciones viga en la dirección y (libre-libre) (Rao (2004)). Éstas resultan de resolver un problema de autovalores sin tener en cuenta el piezoeléctrico. Por razones de espacio, solo se considera el primer modo $(m, n) = (1, 0)$ del desplazamiento vertical w .

Las Ecs. (10) son reemplazadas en las Ecs. (9) y multiplicando a las ecuaciones de w y v por $X_{1m}(x)Y_{1n}(y)$, a u_1 por $X'_{1m}(x)Y_{1n}(y)$, a u_3 por $X'_{3m}(x)Y_{3n}(y)$, a v_1 por $X_{1m}(x)Y'_{1n}(y)$ y a v_3 por $X_{3m}(x)Y'_{3n}(y)$ e integrando en $x \in [0; a]$ (o en la longitud del viscoelástico, según corresponda) y en $y \in [0; b]$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [R]\{\dot{x}\} + ([K] - [P])\{x\} = \{Q(t)\} \tag{11}$$

Para obtener las frecuencias naturales, se resuelve la siguiente ecuación secular:

$$\det(-\omega^2[M] + [K] - [P] + i\omega[R]) = 0 \tag{12}$$

Es importante mencionar que la constante elástica contra rotación k_r en el borde $x = 0$ se determinó ajustando su valor haciendo coincidir la frecuencia natural de la placa piezoeléctrica sola con el valor reportado por Gelves et al. (2024) (76,45 Hz).

2.8. Cálculo de la respuesta en frecuencia

Para describir el comportamiento dinámico del sistema se calcula la función respuesta en frecuencia conocida como flexibilidad: $F_L = |\frac{\bar{W}_{(1,0)}(a/2, b/2)}{\bar{Q}}|$, con \bar{Q} la transformada de una fuerza impulsiva sobre el grado de libertad asociado al desplazamiento vertical: $\{Q(t)\}^T = \{0, 0, 0, 0, F_0\delta(t), 0\}$ en donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac y $F_0 = 1$ N. Siguiendo el procedimiento descrito por Khalfi y Ross (2013) se obtiene

$$[\overline{U_{1mn}} \quad \overline{V_{1mn}} \quad \overline{U_{3mn}} \quad \overline{V_{3mn}} \quad \overline{W_{mn}} \quad \overline{V_{mn}}] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{Q} \quad 0] (-\omega^2[M] + [K] - [P] + i\omega[R])^{-1} \tag{13}$$

que es la respuesta en frecuencia. La barra indica la transformada de Fourier de la variable asociada. Aplicando la transformada inversa de Fourier se obtienen las respuestas temporales de cada una de las variables. Con $v(t)$ puede calcularse la energía eléctrica disipada sobre la resistencia hasta el tiempo t_{lim} : $E_{\text{dis}} = \int_0^{t_{\text{lim}}} \frac{v(t)^2}{R_L} dt$

3. METODOLOGÍA

Se resolvió la Ec. (12) para dos configuraciones del DRA: completo e incompleto. La primera se basó en considerar el DRA con la placa piezoeléctrica equivalente, y el material viscoelástico

y capa restrictora ocupando todo el piezoeléctrico ($a_v = 0$). La segunda consistió en la placa piezoeléctrica equivalente sola. Los resultados obtenidos fueron comparados con los reportados por Gelves et al. (2024), que estudiaron el mismo sistema utilizando la aproximación de parámetros concentrados. Los valores de la geometría del DRA, son $a = 63,5$ mm y $b = 31,8$ mm. (ver Figura 1). Los demás parámetros eléctricos y mecánicos se presentan en la Tabla 1. El valor de la constante elástica contra rotación es $k_r = 2,212$ Nm/rad.

Asimismo, se resolvió la Ec. (13), con lo que se obtuvo la respuesta en frecuencia del sistema, así como también el desplazamiento vertical y el voltaje en función del tiempo. Con la expresión $E_{dis} = \int_0^{t_{lim}} \frac{v(t)^2}{R_L} dt$ se calculó la potencia disipada con $R_L = 326$ k Ω .

Para el estudio con el método de elementos finitos (MEF) se utilizó ANSYS 2017.2. Se emplearon elementos tetraédricos de orden cuadrático para mejorar la precisión del campo de desplazamientos y el acoplamiento electromecánico. La capa piezoeléctrica se modeló con elementos SOLID226 (con grados de libertad mecánicos y eléctricos) y el sustrato con elementos SOLID186. Se aplicaron condiciones de contorno que simulan la fijación con tornillos, y la malla fue refinada hasta lograr una variación menor al 1 % entre frecuencias naturales consecutivas. El modelo final contó con 21 274 elementos.

Parámetro	PZT-5H	Latón	Placa restrictora
ρ [kg/m ³]	7800	8300	7850
h [mm]	0,19	0,13	0,5
E [GPa]	50	100	210
ν	0,31	0,32	0,30
d_{31} [pC/N]	-320	—	—
d_{32} [pC/N]	-190	—	—
C_p [nF]	350	—	—

Parámetro	Viscoelástico
ρ [kg/m ³]	1087
h [mm]	0,254
ν	0,30
G_0 [kPa]	606
G_∞ [MPa]	970
β	0,5465
b [s]	0,00069
T [K]	293
T_0 [K]	293
θ_1 [K]	17,8052
θ_2 [K]	177,119

Tabla 1: Parámetros mecánicos y eléctricos de los materiales de las placas.

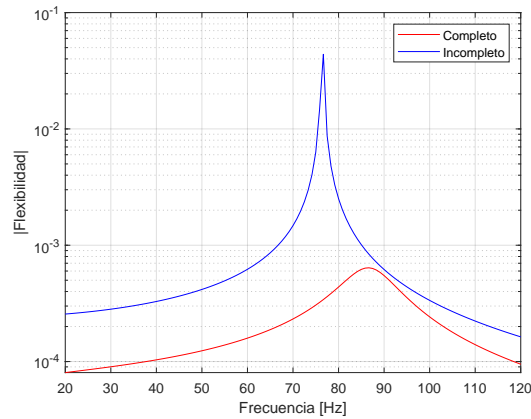
4. RESULTADOS

En la Tabla 2 se comparan las frecuencias de las configuraciones completa e incompleta obtenidas con el método propuesto y MEF junto con las reportadas por Gelves et al. (2024).

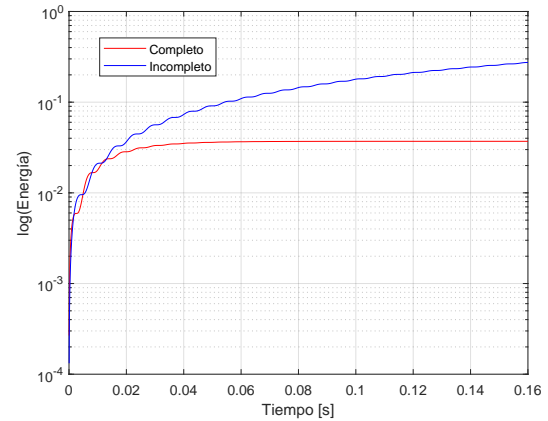
En la Figura 2a se aprecia la flexibilidad del DRA con un máximo en 86 Hz para el caso completo y 76 Hz para el incompleto. Estos valores corresponden a las frecuencias obtenidas mediante la resolución de la Ec. (12), como se observa en la Tabla 2. En la Figura 2b se muestra la potencia disipada en la resistencia R_L para los dos casos. Se puede apreciar la rápida disipación de la energía disponible para el caso con material viscoelástico y capa restrictora comparado con la ausencia de ellos. Por otro lado, en las Figuras 3a y 3b se muestra el desplazamiento vertical ($w(t)$) y el voltaje ($v(t)$) para los casos completo e incompleto respectivamente. Se observa el gran amortiguamiento causado por la placa viscoelástica en comparación con el caso en que no está.

DRA	Gelves et al. (2024)	MEF	Propuesta
Completo	85,4 [Hz]	83,16 [Hz]	86,36 [Hz]
Incompleto	76,45[Hz]	78,34 [Hz]	76,45 [Hz]

Tabla 2: Comparación entre las frecuencias naturales de las dos configuraciones mencionadas según tres métodos distintos: modelo de parámetros concentrados, numérico y modelo de continuo.

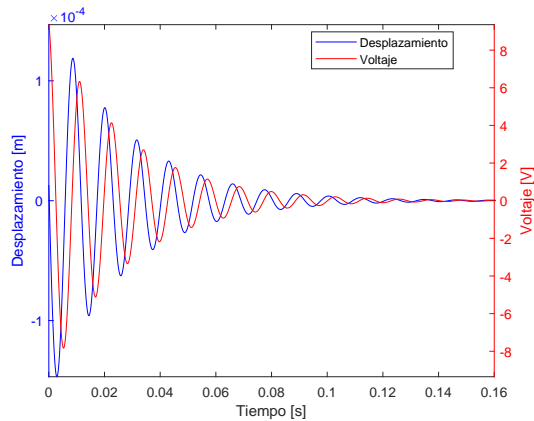


(a) Flexibilidad del DRA con configuración completa e incompleta.

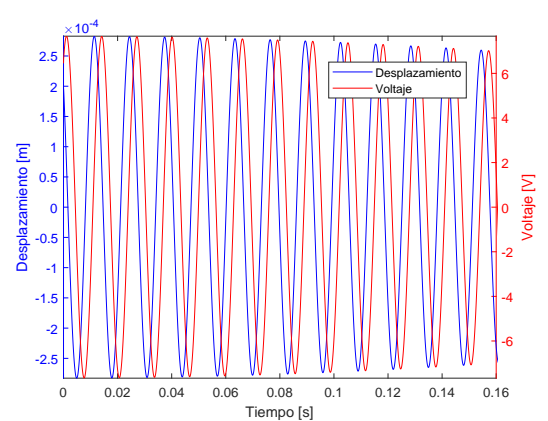


(b) Energía eléctrica disipada en R_L por el DRA completo e incompleto.

Figura 2: Flexibilidad y potencia disipada por el DRA.



(a) Completo.



(b) Incompleto.

Figura 3: Respuestas temporales del DRA.

5. CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelado analítico de un sistema compuesto por una placa piezoeléctrica equivalente, una lámina viscoelástica y una placa restrictora. Las ecuaciones de movimiento para los desplazamientos vertical, en el plano y el voltaje fueron obtenidas a partir del principio de Hamilton. De la resolución de la ecuación secular se obtuvieron las frecuencias naturales del sistema. A partir de la aplicación de un método basado en la transformada de Fourier se obtuvieron

las respuestas temporales y en frecuencia. Los resultados arrojan una muy buena comparación con estudios basados en elementos finitos y aproximaciones de parámetros concentrados. En cuanto a la disipación agregada por la inclusión del material viscoelástico, esta demuestra ser contundente a la hora de compararla con un piezoeléctrico sin material viscoelástico, afectando la generación de energía de la placa piezoeléctrica.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a CAPES y CNPq, Brasil y CONICET (PIP 11220210100051CO) y Universidad Nacional del Sur (PGI 24/F085), Argentina.

REFERENCIAS

- Bronkhorst K., Febbo M., Lopes E., y Bavastri C. Experimental implementation of an optimum viscoelastic vibration absorber for cubic nonlinear systems. *Engineering Structures*, 163:323–331, 2018. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.02.074>.
- Den Hartog J.P. *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill, New York, 1956.
- Febbo M. Optimal parameters and characteristics of a three degree of freedom dynamic vibration absorber. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(2):021010, 2012. ISSN 1048-9002. <http://doi.org/10.1115/1.4004667>.
- Fogang V. An analytical solution to isotropic rectangular cantilever kirchhoff plates using two single series and the boundary collocation method. 2025. <http://doi.org/10.20944/preprints202411.1009.v2>.
- Gao J. y Shen Y. Vibration and damping analysis of a composite plate with active and passive damping layer. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 20(10):1075–1086, 1999. <http://doi.org/10.1007/BF02460324>.
- Gao Y., Zhang S., Ma S., y Markert B. Vibration and damping analysis of cantilever sandwich plates with viscoelastic core using zig-zag theory. *PAMM*, 23(1):e202200322, 2023. <http://doi.org/https://doi.org/10.1002/pamm.202200322>.
- Gatti C.D., Ramirez J.M., Febbo M., y Machado S.P. Multimodal piezoelectric device for energy harvesting from engine vibration. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 13(1):17–34, 2018.
- Gelves A., Febbo M., y Bavastri C. A viscoelastic harvester-absorber for energy generation and vibration control. *Smart Materials and Structures*, 33(11):115020, 2024. <http://doi.org/10.1088/1361-665X/ad840c>.
- Hadji L., Plevris V., Madan R., y Ait Atmane H. Multi-directional functionally graded sandwich plates: Buckling and free vibration analysis with refined plate models under various boundary conditions. *Computation*, 12(4), 2024. ISSN 2079-3197. <http://doi.org/10.3390/computation12040065>.
- Khalfi B. y Ross A. Transient response of a plate with partial constrained viscoelastic layer damping. *International Journal of Mechanical Sciences*, 68:304–312, 2013. ISSN 0020-7403. <http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.01.032>.
- Park C. y Baz A. Newtonian and variational formulations of the vibrations of plates with active constrained layer damping. páginas 3079–3088. 2001. <http://doi.org/10.1115/DETC2001/VIB-21738>.
- Rao S. *Mechanical Vibrations*. Pearson Prentice Hall, 2004. ISBN 9780131207684.