

MAGNETOSTÁTICA POR VOLUMENES FINITOS EN MALLAS NO-ORTOGONALES

FINITE VOLUME MAGNETOSTATICS ON NON-ORTOGONAL GRIDS

Riedinger Augusto^a, Saravia Martin^a, Ramírez Jose^a y Osinaga Santiago^b

^aCONICET-Universidad Tecnológica Nacional, Centro de Investigación en Mecánica Teórica y Aplicada. Bahía Blanca, Argentina.

^bCONICET-Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Laboratorio de Mecánica de Fluidos. Comodoro Rivadavia, Argentina.

Palabras clave: OpenFOAM, Método de Volúmenes Finitos, Magnetostática, Métodos numéricos.

Resumen. Se presenta un desarrollo según el Método de Volúmenes Finitos para resolver problemas magnetostáticos en mallas no ortogonales. El esquema conserva de forma el flujo magnético en interfaces, alcanza segundo orden de precisión en mallas distorsionadas y asegura convergencia estable en medios de alta permeabilidad. Las comparaciones con elementos finitos muestran similar exactitud con menor costo computacional. Estudios de convergencia y pruebas con soluciones manufacturadas confirman la robustez del enfoque, que se plantea como una alternativa a los métodos clásicos en aplicaciones industriales.

Keywords: OpenFOAM, Finite Volume Method, Magnetostatics, Numerical Methods.

Abstract. We present a Finite Volume Method for solving magnetostatic problems on non-orthogonal meshes. The scheme conserves magnetic flux across interfaces, achieves second-order accuracy on distorted grids, and ensures stable convergence in high-permeability regions. Comparisons with Finite Element solutions show similar accuracy at lower computational cost. Mesh convergence studies and manufactured solution tests confirm the robustness of the approach, positioning it as a scalable alternative to classical methods in industrial applications.

1. INTRODUCCIÓN

La predicción de campos magnéticos en medios permeables y magnetizados es esencial en tecnologías como motores eléctricos (Gangl et al., 2015), sistemas de resonancia magnética (Giovannetti et al., 2007) o aceleradores de partículas (Jorge et al., 2007). El método de Elementos Finitos (FEM) ha sido la herramienta dominante en este campo (Ciarlet y Raviart, 1972; Sevilla et al., 2011), aunque presenta limitaciones: la continuidad de flujo se impone de forma débil, aparecen pérdidas en interfaces y los costos crecen rápidamente en dominios grandes y multi-región (Sabbagh-Yazdi et al., 2012; Haber y Ruthotto, 2014).

El Método de Volúmenes Finitos (FVM), en contraste, se apoya en leyes locales de conservación y se adapta de manera natural a problemas con discontinuidades (Moukalled et al., 2016). Su eficacia ya se ha mostrado en fluidos y magnetohidrodinámica (Shekaramiz et al., 2021; Toghraie, 2020), pero su aplicación en magnetostática sigue siendo incipiente. Avances recientes han explorado esquemas multi-región y conservación de flujo (Saravia et al., 2017; Saravia, 2019, 2020, 2021), aunque con restricciones a mallas ortogonales (Riedinger y Saravia, 2023).

En este trabajo se propone un esquema de FVM centrado en celdas que combina: (i) correcciones para mallas no ortogonales, (ii) acoplamiento conservativo en interfaces y (iii) estabilización en materiales de alta permeabilidad. Con ello se plantea una alternativa robusta y escalable al FEM para aplicaciones industriales.

2. FORMULACIÓN MAGNETOSTÁTICA

Sea $\Omega \subset \mathbb{E}$ un dominio abierto y conexo en un espacio euclídeo tridimensional, con espacio vectorial asociado \mathcal{V} . En Ω distinguimos un subdominio de aire \mathbb{A} , donde los campos cumplen la relación constitutiva lineal

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{h}_a(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{A},$$

con $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ h/m}$. Además, en todo Ω rige la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

El análisis magnetostático en medios permeables, magnetizados y conductores de corriente se establece a partir de las leyes de equilibrio y de las condiciones de borde e interfaz que gobiernan la evolución de \mathbf{B} .

2.1. LEY DE AMPERE

Consideramos tres regiones: aire \mathbb{A} , un dominio permeable con corriente \mathbb{P} y un medio magnetizado permanente \mathbb{M} , de modo que $\Omega = \mathbb{A} \cup \mathbb{P} \cup \mathbb{M}$. Estas regiones se conectan a través de interfaces comunes, mientras que \mathbb{P} y \mathbb{M} son disjuntas.

2.1.1. MEDIOS PERMEABLES CON CORRIENTE LIBRE

En \mathbb{P} , la ley de Ampère se expresa como

$$\nabla \times \mathbf{B}_p = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_i), \quad (2)$$

donde \mathbf{J}_f es la densidad de corriente libre y $\mathbf{J}_i = \nabla \times \mathbf{M}_i$ la corriente inducida asociada a la magnetización \mathbf{M}_i .

Definiendo

$$\mathbf{h}_p = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_p - \mathbf{M}_i, \quad (3)$$

se obtiene la forma clásica

$$\nabla \times \mathbf{h}_p = \mathbf{J}_f. \quad (4)$$

Bajo la ley constitutiva lineal, la magnetización puede expresarse en términos de la susceptibilidad magnética normalizada χ :

$$\mathbf{M}_i = \chi \mathbf{B}_p, \quad \chi = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r \mu_0}, \quad (5)$$

con $\mu_r = \mu/\mu_0$.

2.1.2. MEDIOS PERMANENTEMENTE MAGNETIZADOS

En el dominio \mathbb{M} , donde existe una magnetización permanente \mathbf{M} , se cumple

$$\nabla \times \mathbf{B}_m = \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}. \quad (6)$$

2.1.3. FORMA GLOBAL

Combinando las tres regiones se obtiene una expresión unificada de la ley de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{J}_f + \nabla \times (\chi \mathbf{B}) + \nabla \times \mathbf{M} \right]. \quad (7)$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, introducimos el potencial vector magnético \mathbf{A} tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (8)$$

Reescribiendo (7) en términos de \mathbf{A} se obtiene la ecuación gobernante:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \left[\mathbf{J}_f - \nabla \cdot (\chi \nabla \tilde{\mathbf{A}}) + \nabla \times \mathbf{M} \right], \quad (9)$$

donde $\nabla \tilde{\mathbf{A}} = \nabla \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}^T$ garantiza una formulación conservativa (Saravia, 2021).

2.2. CONDICIONES DE INTERFAZ

Además de las condiciones en el contorno externo $\partial\Omega$, es necesario imponer condiciones de continuidad en las interfaces $\partial\mathbb{A} \cap \partial\mathbb{P}$ y $\partial\mathbb{A} \cap \partial\mathbb{M}$. En estas superficies se cumple:

$$[[\mathbf{A}]] = 0, \quad (10)$$

$$[[\mathbf{B}]] \cdot \mathbf{e}_n = 0, \quad (11)$$

asegurando continuidad del potencial vector y de la componente normal del campo magnético.

En cambio, la componente tangencial de \mathbf{B} puede presentar un salto debido a corrientes superficiales:

$$[[\mathbf{B}]] = \mu_0 \mathbf{K} \times \mathbf{e}_n, \quad (12)$$

con

$$\mathbf{K} = -\mathbf{K}_f + [[\chi \mathbf{B} + \mathbf{M}]] \times \mathbf{e}_n. \quad (13)$$

Esto conduce a la condición

$$\left[\left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right] \right] = -\mu_0 \mathbf{K}, \quad (14)$$

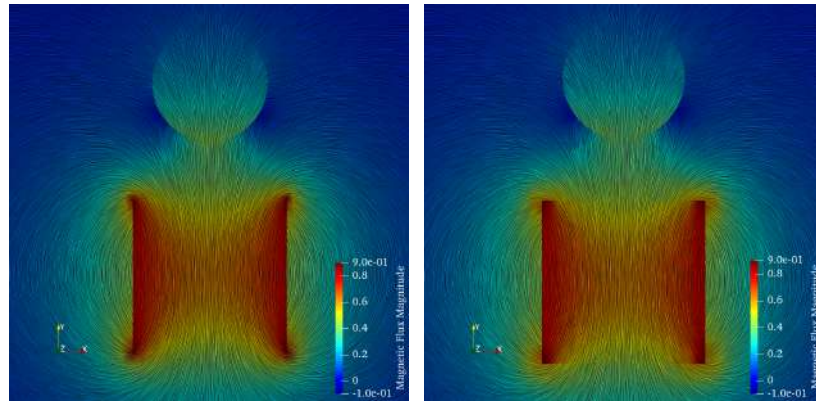
que establece la relación entre discontinuidades de \mathbf{A} y corrientes en la interfaz.

3. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

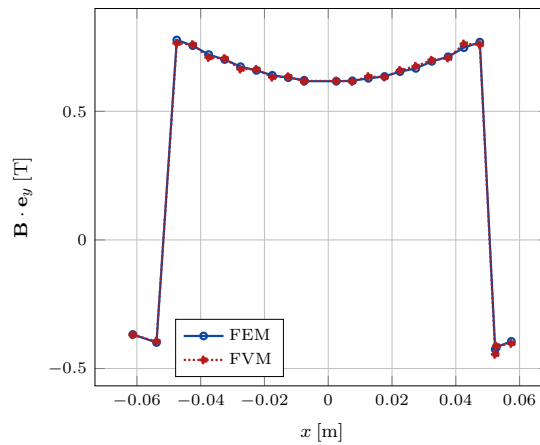
En esta sección se presenta una evaluación del método propuesto. Primero, se analiza su capacidad para reproducir distribuciones discontinuas de campo magnético en configuraciones con materiales permeables y magnetizados permanentes, comparando los resultados con los obtenidos mediante el Método de Elementos Finitos (FEM). Luego, se estudia la convergencia del esquema a través del índice de convergencia de malla (GCI) y se observa la influencia de la densidad de malla en las predicciones. Finalmente, se examina el efecto del factor de relajación en la estabilidad del procedimiento iterativo. Siguiendo lo discutido en (Riedinger y Saravia, 2023), se emplean casos pseudo-2D —equivalentes a los 3D pero más eficientes—, con mallas triangulares no estructuradas generadas en hypermesh.

3.1. CASO 1 - COMPARACIÓN CON FEM

Este primer caso estudia la interacción entre un bloque magnetizado y un cilindro permeable, ambos contenidos en aire. El material permeable \mathbb{P} tiene diámetro $\phi = 0,075$ m y permeabilidad relativa $\mu_r = 30$, mientras que el imán \mathbb{M} es un cubo de $0,1$ m de lado con magnetización permanente $\mathbf{M} = 9,75 \times 10^5 \text{ A m}^{-1} \mathbf{e}_y$. El dominio de aire \mathbb{A} mide 1 m en cada dirección y se imponen condiciones de contorno homogéneas $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ en $\partial\Omega$. La malla es más fina cerca de los materiales (5×10^{-3} m) y más gruesa en el borde (10^{-2} m).



(a) Campo magnético con FEM. (b) Campo magnético con FVM.



(c) Componente y del campo magnético.

Figura 1: Comparación entre FEM y FVM en el Caso 1.

La misma malla se exportó a COMSOL (FEM) y a OpenFOAM (FVM), garantizando comparación punto a punto. Las Figuras 1a y 1b muestran el campo magnético mediante SLIC para ambas formulaciones, observándose un acuerdo visual muy estrecho.

El perfil del componente y de \mathbf{B} a lo largo de una línea transversal en \mathbb{M} (Figura 1c) confirma que el FVM reproduce correctamente las discontinuidades esperadas.

En términos de desempeño, la simulación FEM tomó 2132 s y 36,2 GB de memoria física, mientras que la versión FVM finalizó en 1759 s con 26,4 GB, logrando reducciones del 17,5 % en tiempo y del 27,1 % en memoria.

3.2. CASO 2 - ESTUDIO DE CONVERGENCIA CON GCI

Se aplicó la metodología de (Eça y Hoekstra, 2014) sobre cuatro mallas jerárquicas con razón de refinamiento $r = 2$ (Figura 2). El dominio incluye aire, un cilindro permeable y otro magnetizado, y se evaluaron cuatro puntos característicos $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ (centro y borde de \mathbb{M} y \mathbb{P}).

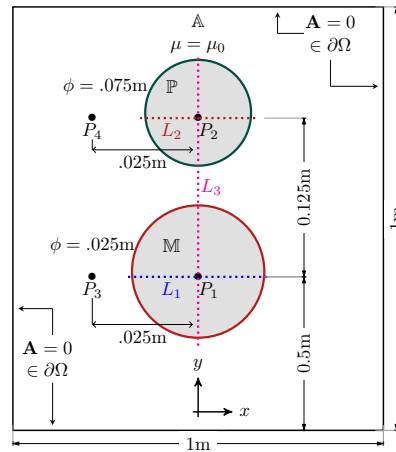


Figura 2: Configuración geométrica del Caso 2.

Los valores de \mathbf{B} y la cantidad de elementos se resumen en la Tabla 1a, y los resultados del GCI en la Tabla 1b.

n_i	P_1	P_2	P_3	P_4
19882	0.6109	0.1859	-0.2620	0.0741
38284	0.6087	0.1884	-0.2753	0.0747
79218	0.6093	0.1883	-0.2836	0.0746
159792	0.6083	0.1895	-0.2889	0.0747

(a) Datos de \mathbf{B} en P_i .

Punto	ϕ_0	ϕ_1	U_ϕ	p
P_1	0.607	0.611	1.3 %	1.00
P_2	0.190	0.186	5.3 %	1.99
P_3	-0.296	-0.262	14.7 %	1.52
P_4	0.0751	0.0741	2.7 %	1.00

(b) Resumen GCI.

Tabla 1: Entradas y resultados del análisis GCI en una misma figura.

En P_2 se observa convergencia casi ideal de segundo orden, mientras que en P_1 y P_4 aparecen oscilaciones, clasificadas como casos anómalos. El punto P_3 refleja un comportamiento mixto ($p \approx 1,5$) debido a las discontinuidades en interfaces.

El refinamiento suaviza los perfiles en regiones con gradientes pronunciados, confirmando la validez del esquema en zonas regulares, aunque con sensibilidad aumentada cerca de aristas.

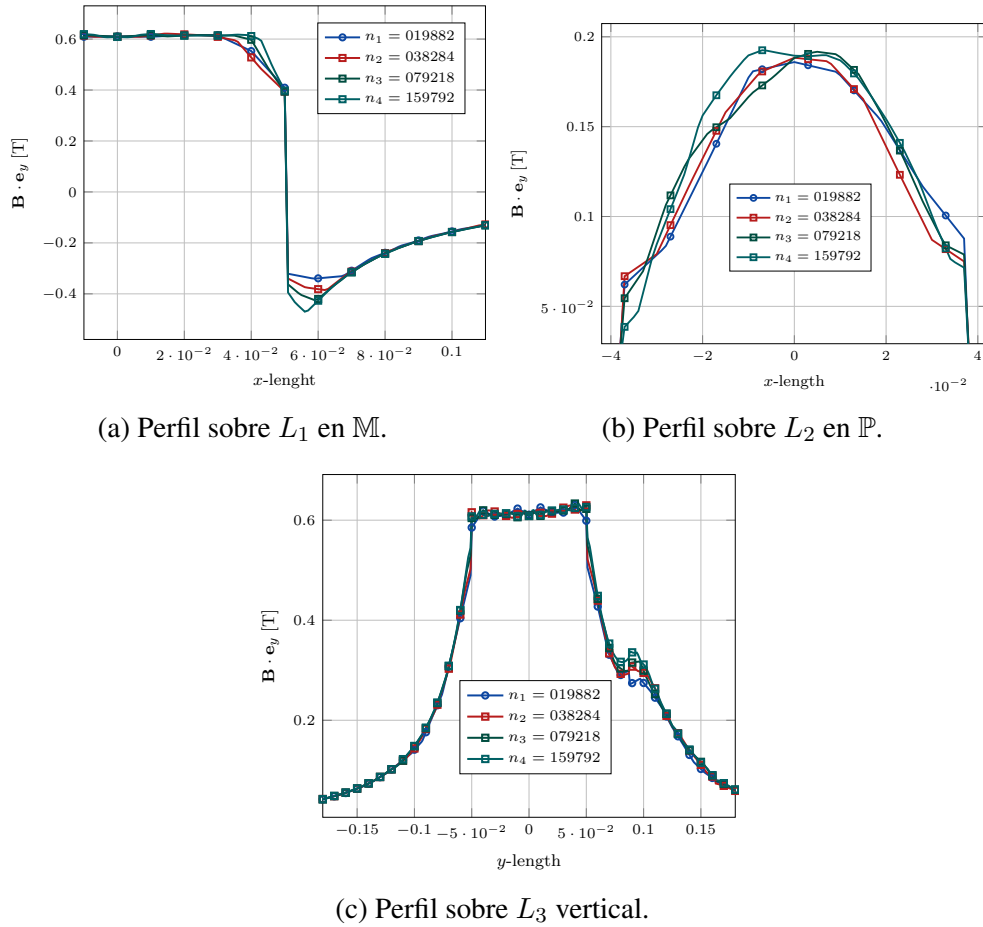


Figura 3: Componentes de \mathbf{B}_y con distinto refinamiento de malla.

3.3. Caso 3 – Verificación de convergencia mediante el Método de Soluciones Manufacturadas (MMS)

Debido al comportamiento oscilatorio observado en los puntos P_1 y P_4 durante el análisis de GCI, recurrimos al *Método de Soluciones Manufacturadas* (MMS) (Roache, 2002; Marchand y Davidson, 2011) con el objetivo de verificar rigurosamente el orden de convergencia del esquema propuesto. Para este fin, consideramos la configuración donde el dominio $\Omega = \mathbb{A} \cup \mathbb{M}$ se compone de una región cuadrada de aire \mathbb{A} de lado $R \in \mathbb{R}^+$ y un dominio circular magnetizado \mathbb{M} , de radio $S \ll R$, centrado en (x_0, y_0) . Para construir la solución manufacturada, imponemos las siguientes condiciones de contorno e interfaz:

1. El potencial vectorial toma la forma $\mathbf{A}^i = (0, 0, A_z^i(x, y))$ con $i \in \{\mathbb{A}, \mathbb{M}\}$.
2. Se cumple la continuidad de A_z en la interfaz, es decir:

$$[[A_z^i]]_{\partial\mathbb{A} \cap \partial\mathbb{M}} = 0.$$

3. En el borde externo $\partial\Omega$, se prescribe una condición de Dirichlet: $A_z^i(x, y) = g(x, y)$ con $g \in C^1(\partial\Omega)$.
4. Las condiciones de interfaz derivadas de la ecuación (14) deben cumplirse en $\partial\mathbb{A} \cap \partial\mathbb{M}$.

Particularmente, si adoptamos coordenadas polares (r, θ) y consideramos una magnetización $\mathbf{M} = M_x \mathbf{e}_x$ en \mathbb{M} , la condición de salto se reduce a

$$\left[\frac{\partial A_z}{\partial r} \right]_{\partial \mathbb{A} \cap \partial \mathbb{M}} = -\mu_0 M_x \sin \theta. \quad (15)$$

Bajo estas restricciones, proponemos la siguiente solución analítica manufacturada:

$$A_z^{\mathbb{M}}(r, \theta) = C_1 r \sin \theta, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{M}, \quad (16)$$

$$A_z^{\mathbb{A}}(r, \theta) = \left[C_1 S + S (C_1 - \mu_0 M_x) \log\left(\frac{r}{S}\right) \right] \sin \theta, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{A}, \quad (17)$$

donde $C_1 := -\frac{\mu_0 M_x}{2}$. Se puede demostrar que (16)–(17) satisfacen las condiciones gobernantes.

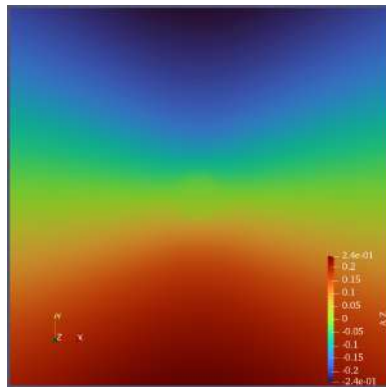
Con el fin de implementar el esquema numérico, definimos un residual que corresponde a la sustitución de la solución manufacturada en la ecuación balance (9):

$$\Gamma(r, \theta) := \begin{cases} 0, & (x, y) \in \mathbb{M}, \\ -\frac{C_1 S + S(C_1 - \mu_0 M_x) \log(r/S)}{r^2} \sin \theta, & (x, y) \in \mathbb{A}. \end{cases} \quad (18)$$

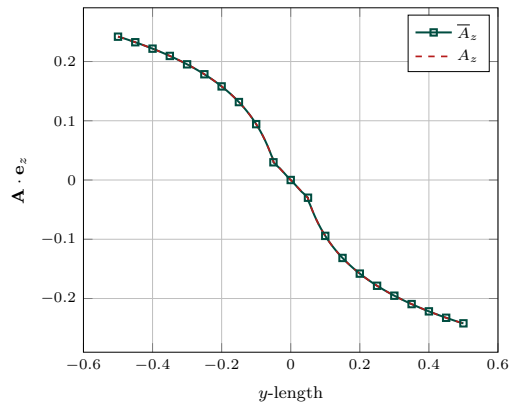
Se prescribe además en $\partial\Omega$ la condición de contorno

$$g(r, \theta) := A_z^{\mathbb{A}}(r, \theta)|_{\partial\Omega}.$$

En nuestro estudio adoptamos $S = 0,05$ m, $R = 1$ m y $M_x = 9,75 \times 10^5$ A/m. Se ensayaron tres mallas con $n \in \{3548, 14432, 57184\}$ elementos. Denotamos la solución numérica obtenida como \bar{A}_z y mantenemos A_z para la analítica. La Figura 4 muestra (a) el campo \bar{A}_z como mapa de contornos, y (b) la comparación puntual entre A_z y \bar{A}_z a lo largo de la recta vertical $x = 0$, $y \in [-0,5, 0,5]$.



(a) Contorno de \bar{A}_z .



(b) Comparación A_z vs. \bar{A}_z en $x = 0$.

Figura 4: Resultados numéricos para el Caso 3 (MMS).

Para evaluar cualitativamente la precisión, definimos el error de contorno en cada celda c_i de volumen V_i como:

$$\text{CE}(c_i) = \frac{V_i \left[(A_z(c_i))^2 - (\bar{A}_z(c_i))^2 \right]}{\sum_{c_i} V_i (A_z(c_i))^2}. \quad (19)$$

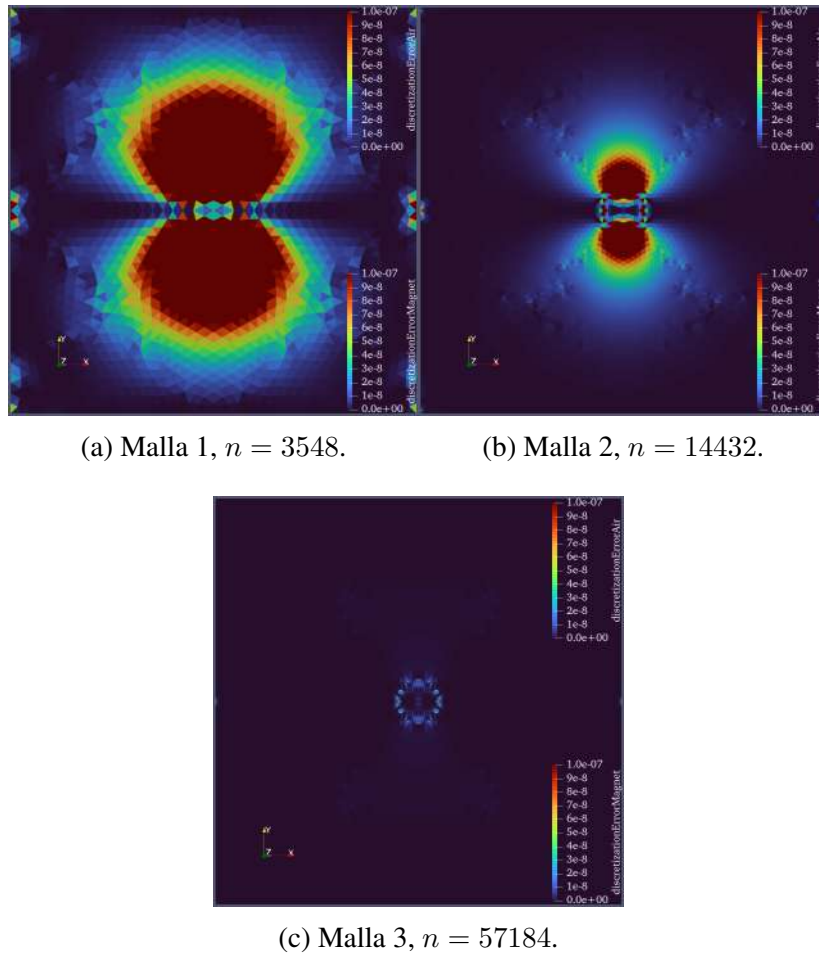


Figura 5: Distribución espacial del error de contorno $CE(c_i)$ para mallas progresivamente refinadas.

Los resultados de la Figura 5 confirman que el error se concentra en la interfaz $\partial\mathbb{A} \cap \partial\mathbb{M}$, donde los gradientes de A_z son más intensos. Al refinar la malla, la magnitud y extensión del error disminuyen drásticamente, mostrando clara convergencia hacia la solución analítica.

Para cuantificar este comportamiento definimos el error de discretización en cada subdominio:

$$DE|_{\mathbb{A},\mathbb{M}} := \frac{\sqrt{\sum_{c_i} V_i [(A_z(c_i))^2 - (\bar{A}_z(c_i))^2]}}{\sqrt{\sum_{c_i} V_i (A_z(c_i))^2}}. \quad (20)$$

n_i	$DE _{\mathbb{A}}$	$DE _{\mathbb{M}}$
3548	0.00190755	0.0448756
14432	0.00055701	0.0211728
57184	7.00×10^{-5}	0.00305001

Tabla 2: Errores de discretización en aire y material magnetizado.

Finalmente, estimamos el orden de convergencia ajustando en escala log-log el modelo $DE \sim Ch^p$ (Eça y Hoekstra, 2014). La regresión lineal arroja $p \approx 2,38$ en la región de ai-

re y $p \approx 1,93$ en la región magnetizada. Estos valores confirman una convergencia cercana a segundo orden en todo el dominio, validando tanto la formulación como su implementación numérica.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló un esquema de volúmenes finitos para resolver problemas magnetostáticos en medios con propiedades discontinuas y mallas no ortogonales. La formulación incorpora técnicas avanzadas tomadas de la dinámica de fluidos computacional, tales como un esquema híbrido de reconstrucción de gradientes (Green–Gauss/least-squares) para mejorar la precisión en celdas distorsionadas y correcciones explícitas de no-ortogonalidad que permiten mantener segundo orden de exactitud en geometrías arbitrarias. Asimismo, se implementó un algoritmo particionado de tipo Block Gauss–Seidel con acoplamiento entre regiones, lo que garantiza la correcta continuidad del flujo magnético normal y de la componente tangencial del campo en interfaces de materiales, evitando las pérdidas de flujo y los suavizados numéricos característicos de formulaciones FEM convencionales.

Las verificaciones numéricas y comparaciones con un solver comercial de elementos finitos demostraron la capacidad del método para reproducir con fidelidad las distribuciones de campo, obteniendo resultados de similar precisión pero con menores tiempos de cómputo (reducción cercana al 17 %) y menor consumo de memoria (aproximadamente 27 %). El análisis de convergencia mediante el Índice de Convergencia de Malla confirmó un comportamiento de orden de diseño en la mayor parte del dominio, con desviaciones puntuales en regiones próximas a interfaces de materiales. Además, la validación a través del Método de Soluciones Manufacturadas mostró tasas de convergencia globales cercanas al segundo orden ($p \simeq 2,38$ en subdominios no magnetizados y $p \simeq 1,93$ en regiones magnetizadas), lo que verifica la exactitud formal del esquema y explica las anomalías observadas en los puntos de prueba individuales del GCI.

En conjunto, los resultados obtenidos demuestran que el marco propuesto de volúmenes finitos constituye una alternativa robusta y escalable frente a enfoques tradicionales basados en elementos finitos. El método combina, en una sola formulación, soporte para mallas no ortogonales, acoplamiento conservativo multi-región y estabilidad en medios de alta permeabilidad, ofreciendo un camino sólido para extender el uso de volúmenes finitos en electromagnetismo computacional y en el diseño magnetostático de gran escala.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y de la Universidad Tecnológica Nacional a través del proyecto PID ENUTIB B0007877TC, así como de la Agencia FONCYT mediante el PICT-2020-SERIEA-02273.

REFERENCIAS

- Ciarlet P.G. y Raviart P.A. Interpolation theory over curved elements, with applications to finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1(2):217–249, 1972.
- Eça L. y Hoekstra M. A procedure for the estimation of the numerical uncertainty of cfd calculations based on grid refinement studies. *Journal of computational physics*, 262:104–130, 2014.
- Gangl P., Langer U., Laurain A., Meftahi H., y Sturm K. Shape optimization of an electric motor

- subject to nonlinear magnetostatics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(6):B1002–B1025, 2015.
- Giovannetti G., Viti V., Positano V., Santarelli M.F., Landini L., y Benassi A. Magnetostatic simulation for accurate design of low field mri phased-array coils. *Concepts in Magnetic Resonance Part B: Magnetic Resonance Engineering: An Educational Journal*, 31(3):140–146, 2007.
- Haber E. y Ruthotto L. A multiscale finite volume method for maxwell’s equations at low frequencies. *Geophysical Journal International*, 199(2):1268–1277, 2014.
- Jorge C.A.F., Jospin R.J., y Furlanetto J.A. Particle trajectory tracing and computational electromagnetics for accelerator and related technologies. *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications (JMoe)*, 6(1):278–294, 2007.
- Marchand R. y Davidson D.B. The method of manufactured solutions for the verification of computational electromagnetics. En *2011 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*, páginas 487–490. IEEE, 2011.
- Moukalled F., Mangani L., Darwish M., Moukalled F., Mangani L., y Darwish M. *The finite volume method*. Springer, 2016.
- Riedinger A. y Saravia M. A single–region finite volume framework for modeling discontinuous magnetic field distributions. *Computers & Structures*, 277:106960, 2023.
- Roache P.J. Code verification by the method of manufactured solutions. *J. Fluids Eng.*, 124(1):4–10, 2002.
- Sabbagh-Yazdi S., Ali-Mohammadi S., y Pipelzadeh M. Unstructured finite volume method for matrix free explicit solution of stress–strain fields in two dimensional problems with curved boundaries in equilibrium condition. *Applied Mathematical Modelling*, 36(5):2224–2236, 2012.
- Saravia C.M. A formulation for modeling levitation based vibration energy harvesters undergoing finite motion. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 117:862–878, 2019.
- Saravia C.M. On the electromechanical coupling in electromagnetic vibration energy harvesters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 136:106027, 2020.
- Saravia C.M., Ramírez J.M., y Gatti C.D. A hybrid numerical-analytical approach for modeling levitation based vibration energy harvesters. *Sensors and Actuators A: Physical*, 257:20–29, 2017.
- Saravia M. A finite volume formulation for magnetostatics of discontinuous media within a multi-region openfoam framework. *Journal of Computational Physics*, 433:110089, 2021.
- Sevilla R., Fernández-Méndez S., y Huerta A. Comparison of high-order curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(8):719–734, 2011.
- Shekaramiz M., Fathi S., Ataabadi H.A., Kazemi-Varnamkhasti H., y Toghraie D. Mhd nanofluid free convection inside the wavy triangular cavity considering periodic temperature boundary condition and velocity slip mechanisms. *International Journal of Thermal Sciences*, 170:107179, 2021.
- Toghraie D. Numerical simulation on mhd mixed convection of cu-water nanofluid in a trapezoidal lid-driven cavity. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 62(4):683–710, 2020.