

MODELO MATEMÁTICO SIMPLE DE UN SISTEMA OSCILATORIO PARA APLICACIONES MARINAS

A SIMPLE MATHEMATICAL MODEL OF AN OSCILLATORY SYSTEM FOR MARINE APPLICATIONS

Lisandro M. Rojas^{a,b}, Franco E. Dotti^{a,b}, Laura Battaglia^{c,d} y Mario A. Storti^c

^a*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), UTN Facultad Regional Bahía Blanca,
11 de Abril 461, Bahía Blanca, Argentina, gimap@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET, Argentina*

^c*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), CONICET-UNL,
<http://www.cimec.org.ar>*

^d*Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería (GIMNI), UTN Facultad Regional
Santa Fe, Lavaise 610, Santa Fe, Argentina*

Palabras clave: Modelo lagrangiano, sistema oscilatorio, aplicaciones marinas.

Resumen. Se presenta un modelo matemático simplificado formulado mediante el enfoque lagrangiano, destinado a describir el comportamiento de un sistema oscilatorio bidimensional sometido a forzamientos externos. El modelo busca reproducir ciertos patrones observados en mediciones de campo realizadas en el estuario de Bahía Blanca, adoptando una calibración cualitativa como criterio de ajuste. Se describen apropiadamente la teoría y las hipótesis del modelo, las cuales se basan en observaciones e información estadística del propio estuario. Se valida cualitativamente el modelo teórico frente a los resultados de las mediciones, en términos de espectros de potencia e historias temporales. Los resultados obtenidos representan un aporte a una línea de investigación sobre convertidores undimotrices desarrollada por los autores.

Keywords: Lagrangian modeling, oscillatory system, marine applications.

Abstract. A simplified mathematical model, formulated within the Lagrangian framework, is presented to describe the behavior of a two-dimensional oscillatory system subjected to external excitations. The model seeks to reproduce certain patterns observed in field measurements carried out in the Bahía Blanca estuary, adopting a qualitative calibration as the adjustment criterion. The underlying theory and assumptions of the model are described, based on observations and statistical information from the estuary itself. The theoretical model is validated against measurement results in terms of power spectra and time histories. The findings contribute to an ongoing research line on wave energy converters developed by the authors.

1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas flotantes anclados, como las boyas de señalización, monitoreo o soporte estructural, se emplean ampliamente en entornos marinos debido a su capacidad para permanecer en posición frente a la acción de corrientes y oleaje (Falnes, 2002; Cruz, 2008). El estudio de su dinámica resulta de interés no solo para mejorar la confiabilidad de su operación, sino también porque tales sistemas pueden servir como plataforma para aplicaciones energéticas en el marco del aprovechamiento de energías renovables marinas (Harnois et al., 2015).

El modelo aquí presentado surge de una necesidad práctica: el desarrollo de un prototipo a escala de un sistema de generación undimotriz, destinado a ser montado sobre una boya (Dotti y Virla, 2021; Rojas et al., 2024). En una primera aproximación, al modelar los convertidores undimotrices se asumió que el movimiento transmitido al dispositivo era puramente vertical. Si bien es conocido que la boya cuenta con su propia dinámica (Sarpkaya e Isaacson, 1981; Battaglia et al., 2024), esta hipótesis simplificadora partía de la idea de que la dinámica propia de la plataforma tendría una influencia menor sobre el forzamiento. Sin embargo, mediciones de campo confirmaron que la respuesta dinámica de la boya interactúa fuertemente con los efectos del oleaje y la corriente. En consecuencia, despreciar dicha interacción en la modelación de los convertidores conduciría a errores significativos, incluso bajo esquemas simplificados. Esto motivó la formulación de un modelo específico para caracterizar el movimiento de la plataforma y, por lo tanto, el forzamiento experimentado por el dispositivo undimotriz.

En este artículo se presenta un modelo teórico simplificado de un sistema oscilatorio bidimensional con anclaje flexible (en esencia una boya o plataforma) sometido a excitaciones externas representativas del entorno marino. El modelo se valida frente a mediciones tomadas en ambiente real en el estuario de Bahía Blanca, mostrando un excelente acuerdo, para valores de parámetros coherentes con mediciones y estimaciones estadísticas.

Este trabajo contribuye a la línea de investigación sobre la implementación de convertidores pendulares de energía undimotriz en el estuario de Bahía Blanca, que se desarrolla en conjunto entre el Centro de Investigación en Métodos Computacionales, el Consorcio de Gestión del Puerto de Bahía Blanca y el Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada.

2 MODELO MATEMÁTICO

La Figura 1 presenta un esquema de un sistema oscilatorio de anclaje flexible tipo boya flotante, contenido en el plano x - y . El centro de masas de la parte flotante o boya se ubica en el punto B, el cual puede desplazarse en dirección vertical, siendo $y(t)$ su función de posición. Se considera también que la boya puede rotar libremente un ángulo $\theta(t)$ sobre B. Se asume además, como hipótesis simplificativa, que la acción combinada de la corriente marina y la componente constante del viento mantiene al punto B en equilibrio estático en dirección x , ubicándolo en una coordenada x_B que permanece inalterada. Por su parte, la cadena o línea de amarre tiene su centro de masas en C y se conecta a la boya en el punto de suspensión S. De esta manera, las coordenadas de S se expresan como

$$x_S = x_B - l \sin \theta, \quad y_S = y(t) - l \cos \theta. \quad (1)$$

Por su parte, de manera simplificada, se asume para la cadena que $x_C = \frac{1}{2} x_S$, $y_C = \frac{1}{2} y_S$.

Así, la energía potencial total del sistema puede definirse como

$$V = (m + m_a) g y + m_c g y_c, \quad (2)$$

donde m es la masa de la boya, m_a la masa agregada debido a efectos hidrodinámicos y m_c la masa de la cadena. Por su parte, la energía cinética del sistema se define como

$$T = \frac{1}{2}(m + m_a)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_B\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2), \quad (3)$$

siendo I_B el momento de inercia de la boya respecto a su centro de gravedad B.

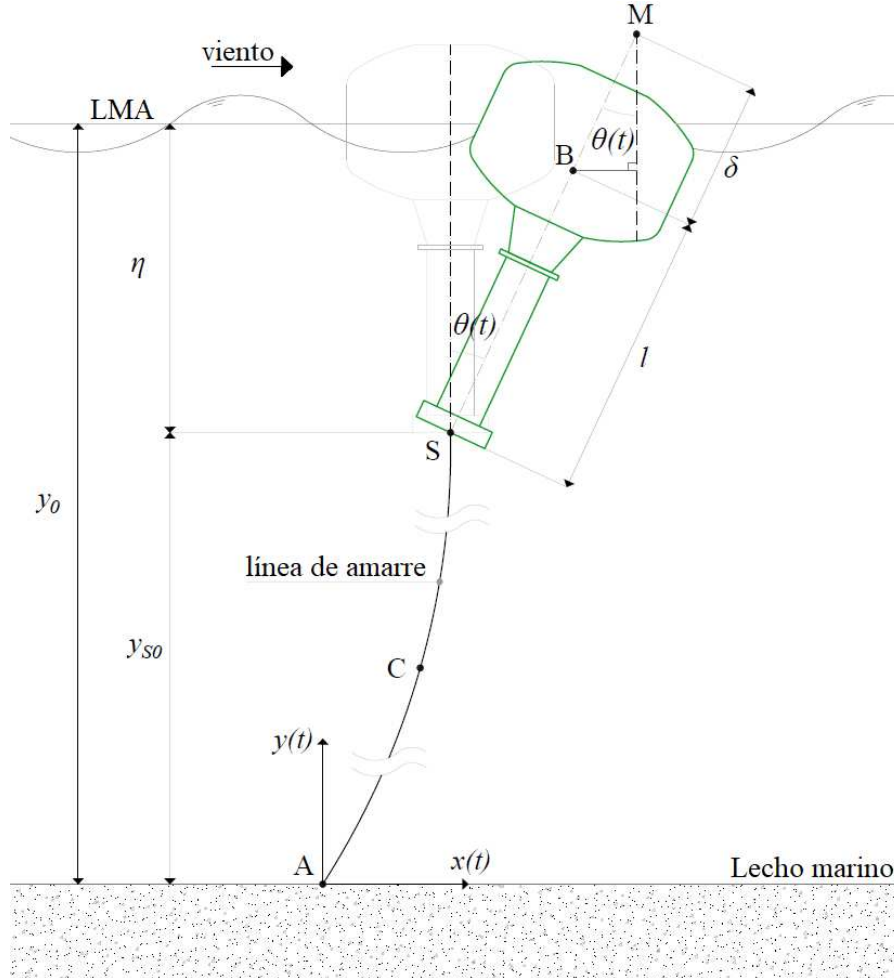


Figura 1: Esquema de un sistema oscilatorio de anclaje flexible, contenido en el plano x-y.

Se asume que el sistema cuenta con el siguiente esfuerzo de torque en dirección θ

$$Q_\theta = \tau_r + \tau_d + \tau_w, \quad (4)$$

donde el torque de restauración hidrostática se define como

$$\tau_r = mg\delta \sin \theta. \quad (5)$$

El torque disipativo, que contempla pérdidas por fricción, separación de flujo y otras, se asume puramente viscoso, con términos lineal y cuadrático de la velocidad angular

$$\tau_d = b\dot{\theta} + c\dot{\theta}^2 \operatorname{sgn} \dot{\theta}. \quad (6)$$

Por su parte, el torque generado por acción del viento se propone

$$\tau_w = \frac{1}{2}h_a\rho_a A_a C_a v_w^2 \operatorname{sgn} v_w, \quad (7)$$

donde h_a es la altura efectiva por encima de B del punto de aplicación del torque por viento, ρ_a es la densidad del aire a nivel del mar, A_a es el área frontal de la boya expuesta al viento, C_a es el coeficiente de arrastre aerodinámico y v_w es la velocidad del viento. Esta última es un factor fundamental del forzamiento y se define como

$$v_w = v_{w0} + A_w \sin \Omega_w t + v_g, \quad (8)$$

donde v_{w0} es la componente media del viento y A_w y Ω_w son los parámetros de variabilidad regular del viento. Las ráfagas de viento se modelan como sucesos aislados, en donde la velocidad media de viento aumenta repentinamente, desde v_{w0} a un valor mucho mayor v_{g0} . Así, en (7) la velocidad de ráfaga v_g se define como

$$v_g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (v_{g0} - v_{w0}) [\tanh[k(t - t_i)] - \tanh[k(t - t_i - \Delta t_i)]], \quad (9)$$

donde t_i es el tiempo inicial y Δt_i la duración de la i -ésima ráfaga, k es el factor de pendiente que controla la agudeza de los flancos de las ráfagas y N el número total de ráfagas consideradas.

Ahora bien, si el desplazamiento vertical $y(t)$ se prescribe como el movimiento impuesto por el oleaje, el sistema puede expresarse a partir de la formulación lagrangiana (Goldstein et al., 2002) únicamente en términos del grado de libertad θ . De esta forma se obtiene la siguiente ecuación diferencial que gobierna el problema

$$\begin{aligned} & \left(I_B + \frac{1}{4} l^2 m_c \right) \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + c \dot{\theta}^2 \operatorname{sgn} \dot{\theta} + \left(\frac{1}{2} g l m_c + g m \delta + \frac{1}{4} l m_c \ddot{y} \right) \sin \theta \\ & - \frac{1}{2} h_a \rho_a A_a C_a v_w^2 \operatorname{sgn} v_w = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Resolviendo (10) se determina completamente la dinámica del punto B. Notar que la masa agregada m_a no aparece en (10). Esto sucede debido a la eliminación de $y(t)$ como grado de libertad del sistema. Desarrollando la mecánica lagrangiana para $y(t)$ puede obtenerse una ecuación algebraica de equilibrio dinámico en dirección vertical, donde sí aparece m_a . Por último, en las simulaciones se asume de manera simplificada un oleaje basado en la conocida teoría de Airy, dado por

$$y(t) = y_{S0} + l + A \sin \Omega t. \quad (11)$$

3 MEDICIONES DE CAMPO

La formulación del modelo en cuestión surgió como necesidad de replicar computacionalmente, aunque sea de manera cualitativa, las mediciones de aceleraciones realizadas previamente sobre una boya de balizamiento ubicada en el estuario de Bahía Blanca. Para ello, se empleó el sistema de medición que se muestra en la Figura 2a, de desarrollo y fabricación conjunta entre el personal del GIMAP y del Instituto de Física del Sur (IFISUR-UNS-CONICET). El sensor principal del dispositivo es un acelerómetro triaxial MPU6050. El sistema puede adquirir muestras a intervalos de 50, 100, 150 o 250 ms y permite seleccionar rangos de aceleración a escala completa de 2, 4, 8 o 16 g. La electrónica de guardado de datos crea automáticamente un nuevo archivo tras 24 horas de registro continuo, lo que garantiza la integridad de los datos en caso de contingencia. Para la campaña de medición, el rango de aceleración y el intervalo de muestreo se establecieron en 4 g y 100 milisegundos, respectivamente. Se registraron 21 días de mediciones. La Figura 2b muestra la instalación del sistema de medición dentro de una caja estanca sobre la boya '15V', propiedad del Consorcio de Gestión del Puerto de Bahía Blanca, por parte del Ing. Rojas, autor del presente artículo. El equipo se ubica en la torre metálica de la boya, $h_E = 2.0$ m por encima del

punto B. Así, su posición en tiempo real está determinada por: $x_E - x_B = h_E \sin \theta$, $y_E = y(t) + h_E \cos \theta$.

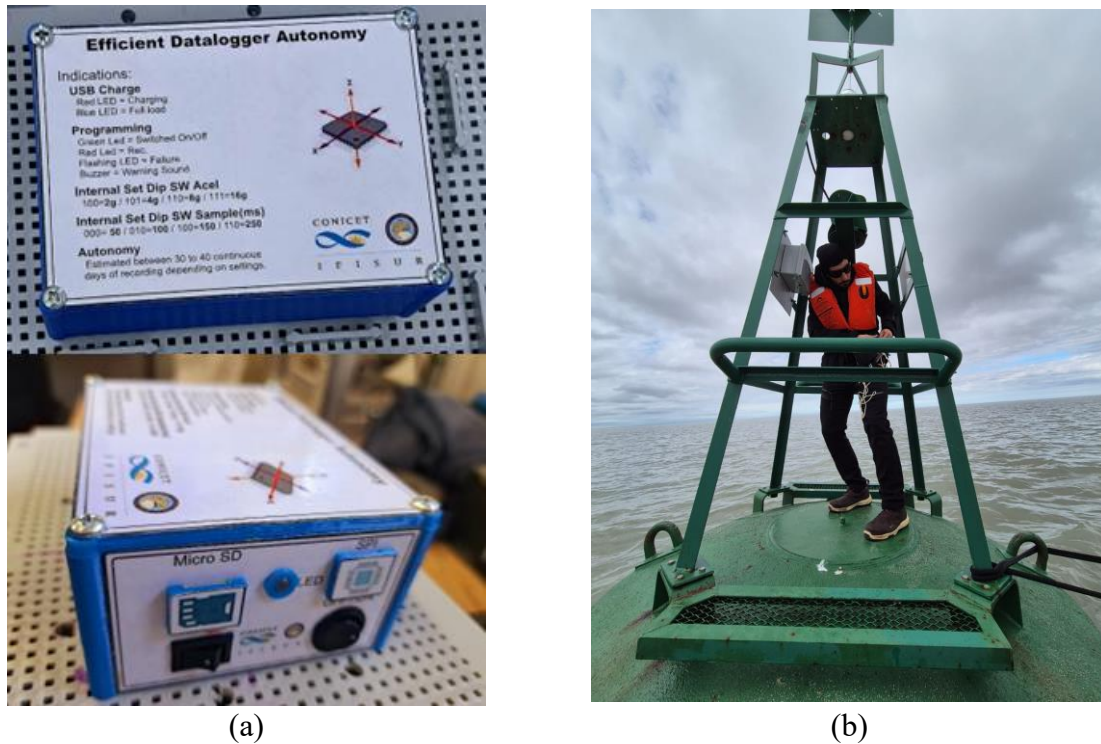


Figura 2: Medición de campo de aceleraciones sobre una boya de balizamiento. (a) Sistema de medición. (b) Instalación del sistema de medición sobre la boya '15V' en el estuario de Bahía Blanca.

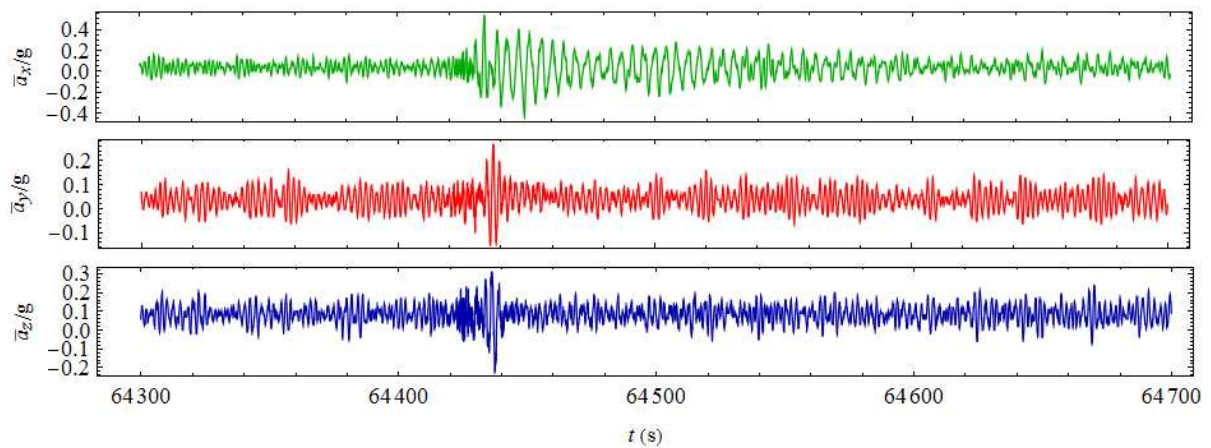


Figura 3: Extracto de historia temporal de aceleraciones medidas sobre la boya '15V' en el estuario de Bahía Blanca. Medición tomada el día 7 de julio de 2024. Las direcciones x e y coinciden con las definidas en la Figura 1. La coordenada z completa la terna cartesiana convencional.

Las mediciones arrojaron un clima de oleaje muy regular, con extensos intervalos de excitación prácticamente vertical alternando con períodos de movimiento prácticamente nulo. Esto se determinó a partir del análisis de las historias temporales y espectros de frecuencia de las mediciones. Se comprobó además que el forzamiento vertical se presenta a una frecuencia siempre cercana a $\Omega = 2.95$ rad/s (0.47 Hz) y con amplitudes rondando $A = 0.35$ m, lo cual resulta coherente con estudios previos (Dotti et al., 2024). Además de estos aspectos generales, se observó que la presencia de ráfagas de viento activa la oscilación de la boya

respecto al punto B, la cual se produce aproximadamente a una frecuencia de 1.38 rad/s (0.22 Hz). La Figura 3 presenta las historias temporales mientras que la Figura 4 muestra los espectros de potencia de un extracto de mediciones típico, donde se evidencia el comportamiento descrito. En la Figura 3, claramente se observa que la regularidad del movimiento es alterada por un evento súbito, que se desencadena en $t \cong 64430$ s, y que genera un movimiento vibratorio típico de oscilación con decaimiento. Tal evento se asocia con fuertes ráfagas de viento de unos pocos segundos de duración, comunes en toda la zona del estuario (Perillo y Piccolo, 1995). La Figura 4 muestra que el evento de ráfaga se evidencia mayoritariamente en la dirección x (0.225 Hz) como un evento muy potente. Cabe mencionar que la dirección x corresponde a la dirección NO-SE y coincide con la dirección predominante de viento en la zona (Dotti et al., 2024). Esto además es coherente con un movimiento de cabeceo de la boya. Por su parte, el forzamiento del oleaje se evidencia mayoritariamente en dirección vertical (dirección y). Por último, se observa que el movimiento en la dirección transversal (dirección z), cuenta con menor potencia que los otros dos.

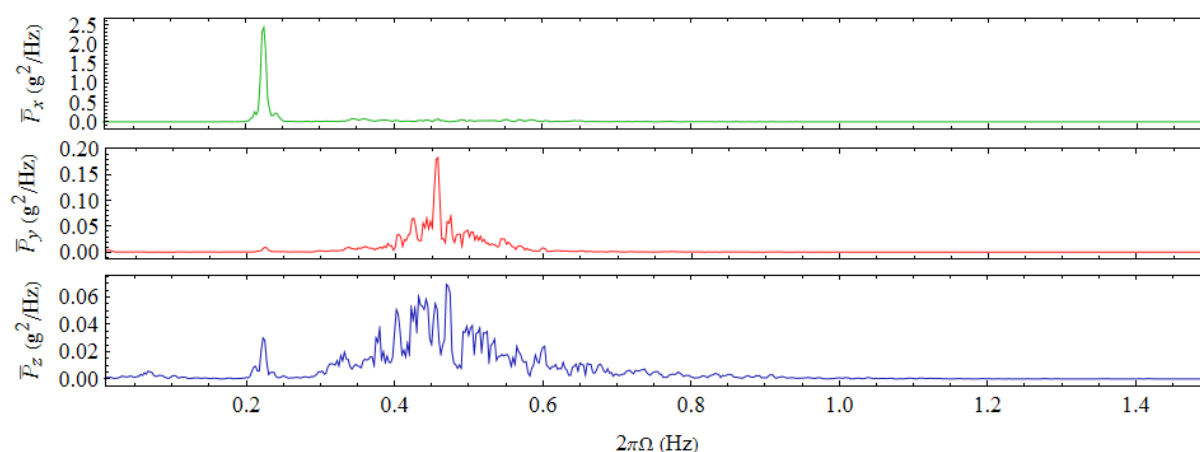


Figura 4: Espectros de potencia asociados a las historias temporales de medición aceleraciones de la Figura 3. Las direcciones x e y coinciden con las definidas en la Figura 1. La coordenada z completa la terna cartesiana convencional.

4 COMPARACIÓN MODELO VS. MEDICIONES Y BREVE DISCUSIÓN

Dada la incertidumbre en la determinación de algunos de los múltiples parámetros, el modelo propuesto en (10) debe ser respaldado mediante una validación. Esto se realiza comparando los resultados de las simulaciones con las mediciones de campo. Ahora bien, algunos de los parámetros del modelo pueden determinarse con mayor exactitud que otros. Para aquéllos asociados a la configuración geométrica del sistema, su cálculo o medición resulta relativamente simple, o bien pueden obtenerse de especificaciones. De esta manera, se determinaron los siguientes valores: $m = 3615$ Kg, $I_B = 13500$ Kg·m², $l = 2.25$ m, $A_a = 1.62$ m², $\delta = 0.706$ m, $\eta = 3.6$ m, $h_a = 2.37$ m, $m_c = 630$ Kg y $g = 9.81$ m/s². Otros parámetros se estimaron a partir de datos estadísticos históricos y/o promedio del estuario; así se establecieron: $\rho_a = 1.22$ Kg/m³, $v_{w0} = 8$ m/s, $A_w = 3$ m/s, $\Omega_w =$ rad/s, $v_{g0} = 25$ m/s, $y_0 = 13.10$ m, $A = 0.3$ m y $\Omega = 2.95$ rad/s. Por último, los parámetros de arrastre y de fricción se setearon en términos de lograr acuerdo con las mediciones. Así, valores que arrojaron buenos resultados razonables en las simulaciones fueron: $C_a = 1.2$, $b = 15$ Nms/rad y $c = 2.5$ Nms/rad².

Con este seteo de parámetros y empleando el forzamiento sinusoidal simple dado en (11) se realizó una simulación de 400 s, cuyos resultados se muestran en la Figura 5 en términos de espectros de potencia. Para la simulación, se consideraron $N = 3$ eventos de tipo ráfaga de duración $\Delta t = 6$ s, distribuidos aleatoriamente en el tiempo de simulación. Este cálculo replica de forma precisa los resultados de las mediciones de campo de la Figura 4 para las direcciones x e y , sobreestimándolos levemente. Se observan picos en 0.225 Hz, lo cual corresponde a la frecuencia natural teórica del sistema y 0.46 Hz, asociado al forzamiento considerado. Por supuesto, el modelo no contempla la dirección z .

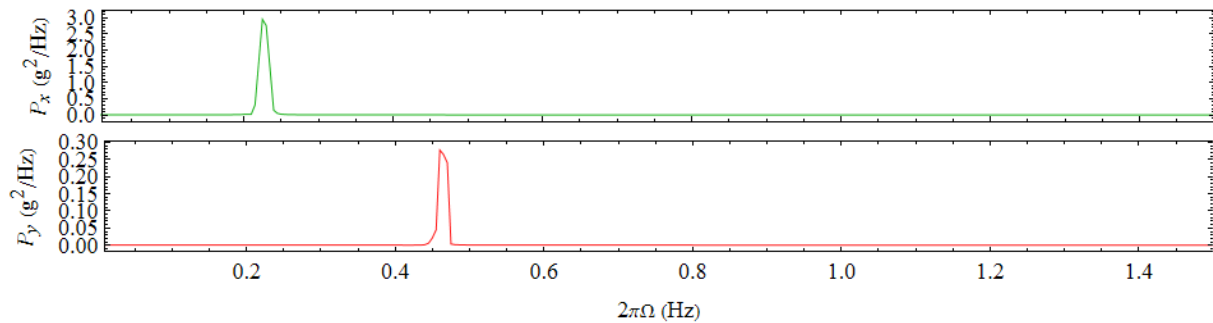


Figura 4: Espectros de potencia calculados mediante simulación, asumiendo forzamiento senoidal. La evaluación de las variables corresponde a la posición del equipo de medición.

El ajuste de los parámetros C_a , b , c y Δt fue realizado manualmente, de forma elemental y sin recurrir a estrategias más complejas, como puede ser un enfoque de optimización. Con estos valores de parámetros se lograron replicar mediante simulaciones varias de las mediciones realizadas con relativa facilidad. Incluso estas simulaciones se mostraron robustas frente a variaciones en la fricción, el arrastre y la velocidad, observándose leves variaciones en las historias temporales y en la potencia de la señal. En otras mediciones, la verificación ha sido solamente cualitativa, no pudiendo el modelo replicar los valores de potencia. Dado lo simplificado del enfoque, y de las fuertes hipótesis adoptadas para modelar forzamientos que son en esencia pseudo-aleatorios, las comparaciones realizadas dan indicios promisorios de la validez del modelo.

5 CONCLUSIONES

El modelo matemático propuesto resultó exitoso en lo que respecta a la comparación cuantitativa con varias mediciones de campo acerca de la respuesta dinámica de una boya anclada sometida a oleaje y viento en el estuario de Bahía Blanca. A pesar de su carácter simplificado, reprodujo adecuadamente las frecuencias dominantes observadas en las mediciones, tanto para el forzamiento vertical asociado al oleaje como para las oscilaciones inducidas por ráfagas de viento. En otras mediciones, la comparación resultó exitosa sólo en términos cualitativos. La validación con parámetros medidos o estimados, junto con la robustez frente a variaciones de arrastre y fricción, sugiere que esta formulación simplificada puede ser una herramienta útil para evaluar el movimiento de plataformas flotantes en aplicaciones marinas.

Siendo este un trabajo preliminar, se requiere más investigación y comparaciones en cuanto al comportamiento del modelo frente a variaciones de los parámetros. La inclusión de al menos un grado de libertad extra de movimiento y la consideración de forzamientos más realistas de oleaje podrían resultar adecuados para mejorar la precisión del modelo.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

REFERENCIAS

- Battaglia, L., Storti, M., Rojas, L. y Dotti, F. (2023). Caracterización del oleaje en el estuario de Bahía Blanca para la obtención de energía undimotriz. *Mecánica Computacional*, 41, 1255–1264.
- Cruz, J. (2008). *Ocean Wave Energy: Current Status and Future Perspectives*. Springer.
- Dotti, F. y Virla, J., Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2021.
- Dotti, F., Rojas, L., Virla, N., Oxarango, L. y Vera, C. (2024). Estudio de oleaje y viento en el Km 28 del canal principal del estuario de Bahía Blanca con miras a aplicaciones undimotrices. *V Congreso Argentino de Energías Sustentables (CES 2024)*, Bahía Blanca, 16–19 de octubre de 2024.
- Falnes, J. (2002). *Ocean Waves and Oscillating Systems: Linear Interactions Including Wave-Energy Extraction*. Cambridge University Press.
- Goldstein, H., Poole, C. y Safko, J. (2002). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley.
- Harnois, V., Weller, S., Johanning, L., Thies, P., Le Boulluec, M., Le Roux, D., Soulé, V. y Ohana, J. (2015). Numerical model validation for mooring systems: Method and application for wave energy converters. *Renewable Energy*, 75, 869–887.
- Perillo, G. y Piccolo, C. (1995). Geomorphological and physical characteristics of the Bahía Blanca estuary, Argentina. En: *Estuaries of South America*, Capítulo 9. Elsevier, Ámsterdam, Países Bajos.
- Rojas, L., Dotti, F., Battaglia, L. y Storti, M. (2024). Simulación de un convertidor undimotriz de péndulo paramétrico con miras a su implementación en el estuario de Bahía Blanca. *Mecánica Computacional*, 41, 747–756.
- Sarpkaya, T. y Isaacson, M. (1981). *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*. Van Nostrand Reinhold.