

## MODELO PIEZOELECTRICO NO LINEAL PARA PLACAS CIRCULARES: INFLUENCIA DE LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA Y DE MATERIAL.

### NONLINEAR PIEZOELECTRIC MODEL FOR CIRCULAR PLATES: INFLUENCE OF GEOMETRIC AND MATERIAL NONLINEARITY

Carlos Vera<sup>a</sup>, Sebastián Machado<sup>a</sup>, Mariano Febbo<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP). Bahía Blanca, Argentina, [gimap@frbb.utn.edu.ar](mailto:gimap@frbb.utn.edu.ar), <https://www.frbb.utn.edu.ar/>*

<sup>b</sup> *CONICET-Universidad Nacional del Sur, Instituto de Física del Sur (IFISUR). Bahía Blanca, Argentina, [ifisur@uns.edu.ar](mailto:ifisur@uns.edu.ar), <http://www.ifisur-conicet.gob.ar/>*

**Palabras clave:** Recolección de energía, piezoelectricidad, vibraciones.

**Resumen.** Se presenta un modelo no lineal para recolectores piezoeléctricos de placas circulares cuya dinámica está basada en la teoría clásica de placas de Von – Karman que captura fenómenos no lineales asociados a grandes desplazamientos. El modelo incorpora la no linealidad del acoplamiento electromecánico constitutivo, la no linealidad constitutiva del material piezoeléctrico y no linealidad de disipación. El recolector tiene adosada una masa de oscilación que permite mejorar la obtención de energía y la sintonización para una frecuencia de resonancia indicada. La no linealidad geométrica se plantea a partir de la función de tensión conocida como Función de Airy, y se resuelve analíticamente para incorporarse a la ecuación de equilibrio transversal de la placa. El objetivo del presente artículo es analizar para grandes aceleraciones la influencia de la no linealidad geométrica determinada mediante esta formulación. Se comparan resultados entre formulaciones aproximadas y exactas con resultados de ensayos experimentales. El estudio se realiza sobre un recolector de energía cuya frecuencia de resonancia es de 141 Hz.

**Keywords:** Energy harvesting, piezoelectricity, vibration.

**Abstract.** A nonlinear model for circular plate piezoelectric collectors is presented based on the classical Von-Karman plate theory that captures nonlinear phenomena associated with large displacements. The model incorporates the nonlinearity of constitutive electromechanical coupling, the constitutive nonlinearity of the piezoelectric material, and dissipation nonlinearities. The harvester has an oscillating mass attached for improved energy extraction and tuning to a given resonant frequency. Geometric nonlinearity is derived from the stress function known as the Airy function and is solved analytically to be incorporated into the plate's transverse equilibrium equation.

This article analyzes the influence of geometric nonlinearity determined by this formulation for large accelerations. Results between approximate and exact formulations are compared with experimental test results. The study is carried out on an energy harvester whose resonant frequency is around 141 Hz.

## 1 INTRODUCCIÓN

El uso de recolectores de energía piezoeléctricos desde fuentes vibratorias (Erturk et. al 2009) y de geometría circular (Yang Y et. al 2018) son estudiados con alto interés debido a su bajo costo de manutención, su versatilidad constructiva y bajo valor de mercado. Estos dispositivos conocidos como buzzer se construyen mediante la unión de dos discos de diferente diámetro: uno de diámetro mayor y de latón (sustrato) sobre el que se monta otro de diámetro menor y de material piezoeléctrico. En particular se suele adosar una masa para mejorar la generación de energía y para sintonizar la frecuencia de resonancia. La generación de energía se da por aplicación de una tensión mecánica al recolector, que al contraerse o expandirse radialmente induce un momento flector en el actuador y provoca una deformación transversal. La obtención de una solución analítica precisa para esas deformaciones transversales es de gran importancia, tomando siempre en consideración las dimensiones del actuador, las propiedades del material y la frecuencia de resonancia (Yuanlin Hu et. al 2017).

Muchas de las soluciones analíticas parten de teorías clásicas de vibraciones de placas lineales (Chen et. al. 2014, Reddy et. al. 2006). Estas, sin embargo, dejan de lado efectos no lineales que juegan un rol importante en el comportamiento vibratorio del recolector, sobre todo para altas aceleraciones de excitación y principalmente en resonancia (Amabili M. 2008). Se destacan entre los efectos no lineales más estudiados los geométricos (Mak et. al. 2012), elásticos (Joshi, 1992) y de acoplamiento electromecánico (Abdelkefi er. al. 2012).

Los autores del presente trabajo vienen estudiando de manera analítica y experimental este tipo de resonadores con modelos lineales (Vera et. al 2022; Vera et. al 2023) y no lineales (Vera et. al 2024). En el citado trabajo desarrollaron un modelo analítico que considera términos de orden superior en las ecuaciones de tensiones radiales y transversales para el material piezoeléctrico, para el desplazamiento eléctrico (Machado et. al. 2016), y modela el efecto de amortiguamiento del tipo Rayleigh con un coeficiente de amortiguamiento no lineal. La parte piezoeléctrica se caracteriza mediante la inclusión de coeficientes de acoplamiento piezoeléctrico lineales y no lineales, capacidad interna e impedancias correspondientes (Stanton et. al. 2010). La deflexión transversal del recolector, sin embargo, cumple la teoría de placa delgada de Kirchhoff y la no linealidad geométrica se calcula de forma aproximada.

Para el presente trabajo se propone un modelo de la deflexión transversal a través de la teoría de placas circulares de Von-Karman (Faris W. 2003). Esta teoría permite capturar los fenómenos no lineales geométricos en la placa de manera completa, pero con una complejidad mínima en las ecuaciones de movimiento. El modelo obtenido así se denomina no lineal geométrico exacto. El sistema de ecuaciones electromecánicas no lineales se obtiene desde las ecuaciones de Lagrange, para la condición de borde de empotramiento en toda la circunferencia. La no linealidad geométrica requiere para su solución de la definición de una función de tensión conocida como Función de Airy, la que es resuelta analíticamente para incorporarse a la ecuación de equilibrio transversal de la placa (Touzé et. al. 2005).

El trabajo presenta comparaciones de los resultados analíticos obtenidos con la presente formulación en contraste con resultados del modelo no lineal geométrico según la teoría de placa tipo Kirchhoff (Vera, et. al. 2023) y con resultados experimentales de laboratorio para diferentes valores de excitación, en rangos que van desde 0,1g a 1g. La excitación se sintoniza a la frecuencia de resonancia del recolector, que es del orden de los 140 Hz.

La motivación del modelo analítico no lineal propuesto es la de optimizar el dispositivo recolector de energía de geometría circular, con un bajo costo computacional, de manera de poder incorporarlo como dispositivo de recolección de energía en estaciones de sensado autónomo de máquinas agrícolas (Machado et. al. 2023).

## 2 RECOLECTOR DE GEOMETRÍA CIRCULAR

### 2.1 Geometría del recolector

El recolector está construido por un disco de latón al que se le adosa un disco PZT-5H (Figuras 1a, 1b), estando el primero empotrado a lo largo de toda su circunferencia. Sobre el PZT-5H se coloca una masa  $M$  de acero para sintonizar la frecuencia de resonancia y optimizar la deformación.

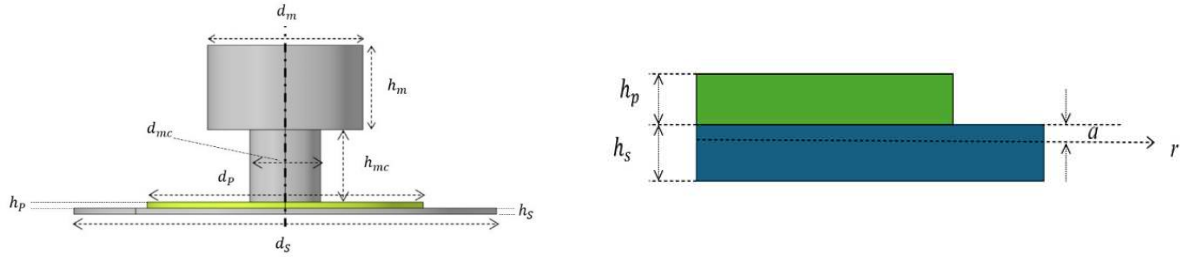


Figura 1 a,b). Esquema del recolector y ubicación del eje neutro.

Las dimensiones geométricas del dispositivo son: diámetro y espesor del sustrato ( $d_s, h_s$ ), diámetro y espesor del PZT ( $d_p, h_p$ ), diámetro ( $d_m$ ) y altura ( $h_m$ ) de la masa de oscilación. El contacto entre masa y PZT se materializa montando  $M$  sobre cilindros de menor diámetro ( $d_{mc}$ ) y de altura constante ( $h_{mc}$ ). Se define como “ $a$ ” a la distancia entre el eje neutro y la cota superior “ $h_s$ ”, tal se indica en el esquema de la Figura 1b).

### 2.2 Modelo analítico no lineal completo. Formulación variacional

La teoría de Von-Karman para placas circulares supone que el desplazamiento flexional  $w$  es del orden del espesor de la placa, y como consecuencia, la pendiente de la superficie deformada ya no es tan pequeña como para ser desestimada. Si  $u(r,t)$ ,  $v(r,t)$  y  $w(r,t)$  son los desplazamientos del plano medio y  $g(t) = G \cos(\Omega t)$  es la excitación armónica de la base, tomando simetría radial el desplazamiento total de un punto genérico la sección transversal de la placa es (Reddy, 1999)

$$u_r = u(r,t) - z \frac{\partial w}{\partial r}; \quad u_\theta = v(r,t); \quad u_z = w(r,t) + g(t) \quad (1)$$

Las deformaciones específicas no lineales y no nulas se calculan desde las ecuaciones

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \varepsilon_{r\theta} = -\frac{v}{2r} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial r} \quad (2)$$

en tanto que las tensiones para el sustrato ( $S$ ) y para el piezoeléctrico ( $p$ ) en dirección radial y transversal (Yuanlin et. al. 2017) se calculan desde

$$\sigma_r^{(S)} = \frac{E_S}{(1-\nu_S^2)} (\varepsilon_r + \nu_S \varepsilon_\theta); \quad \sigma_\theta^{(S)} = \frac{E_S}{(1-\nu_S^2)} (\varepsilon_\theta + \nu_S \varepsilon_r) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(p)} = & \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu_p^2)} (\varepsilon_p + \nu_p \varepsilon_\theta) - \frac{e_{31}}{s_{11}^E (1-\nu_p^2)} E_3 + \frac{1}{s_{111}^E (1-\nu_p^2)} [\varepsilon_\theta^2 + \nu_p \varepsilon_\theta \varepsilon_r] \text{sign}(\varepsilon_\theta) \\ & - \frac{e_{311}}{s_{111}^E (1-\nu_p^2)} (1 + \nu_p) \varepsilon_\theta \text{sign}(\varepsilon_\theta) E_3 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_r^{(p)} = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_p^2)}(\varepsilon_r + \nu_p \varepsilon_\theta) - \frac{e_{31}}{s_{11}^E(1-\nu_p)}E_3 + \frac{1}{s_{111}^E(1-\nu_p^2)}[\varepsilon_r^2 + \nu_p \varepsilon_\theta \varepsilon_r] \text{sign}(\varepsilon_r) - \frac{e_{311}}{s_{111}^E(1-\nu_p^2)}(1+\nu_p)\varepsilon_r \text{sign}(\varepsilon_r)E_3 \quad (5)$$

En las Ecs. (3), (4) y (5)  $E_S$  y  $\nu_S$  son el módulo de Young y el módulo de Poisson del sustrato,  $s_{11}^E$  y  $\nu_p$  la flexibilidad elástica del material piezoelectrico a campo eléctrico constante y el módulo de Poisson del piezoelectrico,  $E_3$  el campo eléctrico en la dirección  $z$ ,  $e_{31}$  la constante piezoelectrica lineal y  $s_{111}^E$  y  $e_{311}$  el módulo de elasticidad no lineal y la constante piezoelectrica no lineal, términos asociados a la no linealidad constitutiva.

La energía potencial  $U$  (de deformación y del potencial eléctrico) para el sustrato ( $S$ ) y para el piezoelectrico ( $p$ ) se obtiene desde las expresiones

$$U_S = \int_{V_S} \frac{1}{2} \{ \varepsilon_r \sigma_r^{(S)} + \varepsilon_\theta \sigma_\theta^{(S)} \} dV_S \quad (6)$$

$$U_p = \int_{V_p} \frac{1}{2} \{ \varepsilon_r \sigma_r^{(p)} + \varepsilon_\theta \sigma_\theta^{(p)} \} dV_p - \int_{V_p} D_3 E_3 dV$$

en la que la energía del potencial eléctrico en ( $p$ ) se define como

$$D_3 = d_{13} (\sigma_r^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)}) + \epsilon_{33}^T E_3 + \frac{e_{311}}{S_{11}^E(1-\nu_p)} \varepsilon_r \quad (7)$$

siendo  $D_3$  la componente del desplazamiento eléctrico,  $\epsilon_{33}^T$  la permitividad a tensión constante,  $d_{13}$  la constante piezoelectrica, y  $E_3$  el campo eléctrico en la dirección  $z$ , cuya expresión es (Erturk et. al. 2011)

$$E_3 = -\frac{V_t}{h_p} \quad (8)$$

La deformación flexional  $w(r, t)$  se divide en 3 secciones (Vera et. al 2023): sustrato (1), sustrato y piezoelectrico (2) y masa oscilante (3). La energía cinética  $T$  se calcula integrando en cada sección como

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_3} \rho_M (\dot{w}_3 + \dot{g})^2 dV_3 + \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p (\dot{w}_2 + \dot{g})^2 dV_p + \frac{1}{2} \int_{V_S} \rho_S (\dot{w}_1 + \dot{g})^2 dV_S \quad (9)$$

en la que  $\rho_p$ ,  $\rho_S$  y  $\rho_M$  son las densidades por unidad lineal del piezoelectrico, del sustrato y de la masa oscilante

Reemplazando la Ec. (2) en las Ecs. (4) y (5), aplicando las Ecs. (6) y (9) y mediante el operador de Lagrange  $L=T-U$ , se derivan las ecuaciones del movimiento desde el principio de Hamilton

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}'} \right) - \frac{\partial}{\partial r^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}''} \right) + c\dot{w} + c\dot{w}^2 \text{sign}(\dot{w}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{V}} \right) + \frac{V}{R_L} = 0 \quad (10)$$

expresión en la que el trabajo de las fuerzas no conservativas se lo supone en dos términos, uno debido a la disipación viscosa estructural lineal del buzzer y el otro término debido a la disipación no lineal (Stanton et. al. 2010).

De la aplicación de la Ec. (10) surge un sistema de tres ecuaciones diferenciales

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r N_r) + M \ddot{u} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_r) - \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (r N_r w') \right] - EI_{n\theta} w' [w' - r w''] \text{sign}(w') + \\ & EI_{nr} \left[ (6 + 2\nu_p) w'' w''' + 3r (w''')^2 + (\nu_p w' + 3r w'') w^{IV} \right] \text{sign}(w'') \\ & - J_{pn\theta} v [w' - r w''] \text{sign}(w') - J_p [w' + r w''] - J_{pnr} v [2w'' + r w^{IV}] + M \ddot{w} = -M \ddot{g} \end{aligned} \quad (12)$$

$$C_p v + \frac{v}{R_L} + J_p [\dot{w}'' + r \dot{w}'''] + J_{pnr} r \dot{w}'' \text{sign}(w'') + J_{pn\theta} r w' \dot{w}' \text{sign}(w') = 0 \quad (13)$$

en las que aparecen los términos de rigidez no lineal piezoeléctrica ( $EI_{nr}$  y  $EI_{n\theta}$ ), el acoplamiento electromecánico no lineal ( $J_{pnr}$  y  $J_{pn\theta}$ ), la masa  $M$ , y la capacidad  $C_p$ , definidas por las expresiones

$$\begin{aligned} M &= 2\pi r \rho_i; \quad EI_{n\theta} = \frac{h_p (4a^3 + 6a^2 h_p + 4a h_p^2 + h_p^3) \pi (3 + \nu_p)}{2r^3 S_{11p\theta} (1 - \nu_p^2)}; \\ EI_{nr} &= \frac{h_p (4a^3 + 6a^2 h_p + 4a h_p^2 + h_p^3) \pi}{2S_{11pr} (1 - \nu_p^2)}; \quad J_p = 2\pi \frac{d_{31}}{S_{11p} (1 - \nu_p)} \frac{(2a h_p + h_p^2)}{2h_p} \\ J_{pn\theta} &= \frac{e_{311\theta} \pi}{r^2 (1 - \nu_p)} (-3a^2 - 3a h_p - h_p^2); \quad J_{pnr} = \frac{e_{311r} \pi}{(1 - \nu_p)} (-3a^2 - 3a h_p - h_p^2) \end{aligned} \quad (14)$$

Los esfuerzos normales y los momentos flectores  $N_r$ ,  $N_\theta$ ,  $M_r$  y  $M_\theta$  del sustrato se definen de acuerdo con las expresiones

$$\begin{aligned} N_r &= \int \frac{E_s}{1 - \nu_s} (\varepsilon_r + \nu_s \varepsilon_\theta) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r dz; \quad N_\theta = \int \frac{E_s}{1 - \nu_s} (\varepsilon_\theta + \nu_s \varepsilon_r) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz; \\ M_r &= \int \frac{E_s}{1 - \nu_s} (\varepsilon_r + \nu_s \varepsilon_\theta) z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz; \quad M_\theta = \int \frac{E_s}{1 - \nu_s} (\varepsilon_\theta + \nu_s \varepsilon_r) z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz \end{aligned} \quad (15)$$

Estos esfuerzos están acoplados con los desplazamientos  $u(x,t)$  y  $w(x,t)$  en las Ecs. (11) y (12). Como las frecuencias naturales longitudinales son grandes en comparación con las transversales, el término de inercia en el plano puede despreciarse. De esta manera se busca desacoplar la ecuación axial de la transversal. Para ello se define una función de tensión  $F(r,t)$  denominada función de Airy (Faris W. 2003), que cumple con las ecuaciones

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F(r,t)}{\partial r}; \quad N_\theta = \frac{\partial^2 F(r,t)}{\partial r^2} \quad (16)$$

Reemplazando las Ecs. (15) y (16) en las Ecs. (11) y (12) queda ahora

$$\begin{aligned}
& D_s \nabla^4 w - \frac{1}{r} w'' F' - \frac{1}{r} w' F'' - EI_{n\theta} w' [w' - rw''] \text{sign}(w') + \\
& EI_{nr} \left[ (6 + 2\nu_p) w'' w''' + 3r (w''')^2 + (\nu_p w' + 3rw'') w^{IV} \right] \text{sign}(w'') \\
& - J_{pn\theta} v [w' - rw''] \text{sign}(w') - J_p [w' + rw''] - J_{pnr} v [2w'' + rw^{IV}] + M\ddot{w} = -M\ddot{g}
\end{aligned} \quad (17)$$

Tomando las deformaciones específicas

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_s h_s} (N_r - \nu_s N_\theta); \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E_s h_s} (N_\theta - \nu_s N_r) \quad (18)$$

y reemplazando las Ecs. (15) e igualándolas con la Ec. (2) se obtiene un sistema que relaciona  $u$  y  $u'$  con la ecuación de compatibilidad  $F(r, t)$

$$u' = -\frac{1}{2} (w')^2 + \frac{1}{E_s h_s} \left( \frac{1}{r} F' - \nu_s F'' \right); \quad \frac{u}{r} = \frac{1}{E_s h_s} \left( F'' - \frac{\nu_s}{r} F' \right) \quad (19)$$

Eliminando  $u$  de las Ecs. (19), se obtiene ahora la nueva ecuación diferencial de compatibilidad para la función de Airy  $F$

$$rF''' + F'' - \frac{1}{r} F' = -\frac{E_s h_s}{2} (w'')^2 \quad (20)$$

Al haber eliminado al desplazamiento longitudinal  $u$  y tomando la Ec. (20), el problema queda definido por un sistema de las tres ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
& D_s \nabla^4 w - \frac{1}{r} w'' F' - \frac{1}{r} w' F'' - EI_{n\theta} w' [w' - rw''] \text{sign}(w') + \\
& EI_{nr} \left[ (6 + 2\nu_p) w'' w''' + 3r (w''')^2 + (\nu_p w' + 3rw'') w^{IV} \right] \text{sign}(w'') \\
& - J_{pn\theta} v [w' - rw''] \text{sign}(w') - J_p [w' + rw''] - J_{pnr} v [2w'' + rw^{IV}] + M\ddot{w} = -M\ddot{g}
\end{aligned} \quad (21)$$

$$rF''' + F'' - \frac{1}{r} F' + \frac{E_s h_s}{2} (w')^2 = 0 \quad (22)$$

$$C_p v + \frac{v}{R_L} + J_p [\dot{w}'' + r\dot{w}'''] + J_{pnr} r\dot{w}'' \text{sign}(w'') + J_{pn\theta} r w' \dot{w}' \text{sign}(w') = 0 \quad (23)$$

El desplazamiento flexional  $w(r, t)$  es expandido de forma modal de acuerdo con

$$w(r, t) = \sum_{k=1}^3 \phi_{(k),n}(r) q(t) \quad (24)$$

en la que  $\phi_{(k),n}(r)$  son los  $n$  modos normales de vibración de cada sección ( $i$ ) y  $q(t)$  es el desplazamiento temporal. Los modos se determinan según (Vera et. al. 2023) y responden a

$$\phi_{(i)}(r) = A_i J_0(\beta_i r) + B_i Y_0(\beta_i r) + C_i I_0(\beta_i r) + D_i K_0(\beta_i r); \quad i = 1, 2, 3 \quad (25)$$

La normalización de  $\hat{\phi}_{(k),n}(r)$  respecto de la masa se calcula a través de la integral en tres tramos

$$1 = 2\pi \left[ \int_{r_1}^{r_2} m_1 \phi_1^2(r) r dr + \int_{r_2}^{r_3} m_2 \phi_2^2(r) r dr + \int_0^{r_3} m_3 \phi_3^2(r) r dr \right] \quad (26)$$

Para la solución particular de la Ec. (22) se propone una función  $F(r, t)$  expandida de la forma

$$F(r, t) = \varphi(r) q^*(t) \quad (27)$$

en la que  $\varphi(r)$  es un modo de placa circular para la condición de borde del problema, y  $q^*(t)$  una función del tiempo. Reemplazando la Ec. (27) en la Ec. (22), resolviendo  $F(r, t)$ , introduciendo esta solución en (21) y normalizando, se llega ahora al sistema

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) + \xi \dot{q}(t) - KN q^2(t) \text{sign}[q(t)] - v(t) \theta_p - \theta_{pn} v(t) q(t) \text{sign}(q) \\ - KG_{NL} q^3(t) + C_n \dot{q}(t) \dot{q}(t) \text{sign}[\dot{q}(t)] = -M_g \ddot{g} \\ \frac{v(t)}{R_L} + 2\pi r \frac{\epsilon_{33}}{h_p} v(t) + \theta_p \dot{q}(t) + \psi_{pn} \dot{q}(t) q(t) \text{sign}[q(t)] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Las nuevas constantes de la Ec.(28) se definen según las expresiones

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \int K \phi(r) \left[ \frac{1}{r^3} \phi'(r) - \frac{1}{r^2} \phi''(r) + \frac{2}{r} \phi'''(r) + \phi^{IV}(r) \right] dr; \\ KG_{NL} &= \frac{E_{Si} h_{Si}}{2} \int \phi(r) \left[ \frac{1}{r} \phi''(r) \phi'(r) + \frac{1}{r} \phi'(r) \phi''(r) \right] dr; \\ KN &= \int EI_{n\theta} \phi(r) [\phi'(r) - r \phi''(r)] \text{sign}(\phi'(r)) dr + \\ &\int EI_{nr} \phi(r) [(6 + 2\nu_p) \phi''(r) \phi'''(r) + 3r \phi^{m2}(r) + (\nu_p \phi'(r) + 3r \phi''(r)) \phi^{IV}(r)] \text{sign}(\phi''(r)) dr; \\ \theta_p &= \int J_p (\phi'(r) + r \phi''(r)) dr; \\ \theta_{pn} &= \int [J_{pnr} (2\phi''' + r \phi^{IV}) \text{sign}(\phi''(r)) + J_{pn\theta} (\phi' - r \phi'') \text{sign}(\phi''(r))] dr; \\ C_n &= \int \phi(r)^3 2\xi_n \omega \text{sign}(\phi(r)) dr; \quad M_g = 2\pi r \rho_i \int \phi_i(r) dr \\ \psi_{pn} &= \int [J_{pnr} r \phi^{n2}(r) \text{sign}(\phi''(r)) + J_{pn\theta} r \phi'(r) \text{sign}(\phi'(r))] dr. \end{aligned} \quad (29)$$

en la que  $KG_{NL}$  es la rigidez no lineal geométrica completa. Los coeficientes  $KN$  (rigidez no lineal constitutiva),  $C_n$  (amortiguamiento no lineal),  $\theta_p$  (acoplamiento no lineal geométrico),  $\theta_{pn}$  (acoplamiento no lineal constitutivo mecánico),  $\psi_{pn}$  (acoplamiento no lineal eléctrico) y  $\omega$  (rigidez normalizada del dispositivo) ya fueron obtenidos por los autores en (Vera et. al. 2024).

### 3 RESULTADOS

Se realizaron comparaciones del modelo completo con valores experimentales y con un modelo analítico no lineal (Vera et. al. 2024), que, a diferencia del modelo completo, calcula  $KG_{NL}$  no por la expresión indicada en la Ec. (29), sino según la expresión aproximada

$$KG_{NL} = \frac{12\pi D_s}{h^2} \int \phi(r) \phi'^2(r) [\phi'(r) + 3\phi''(r)] dr \quad (30)$$



La Tabla 1 indica las dimensiones del dispositivo y en la Tabla 2 las constantes mecánicas y eléctricas. Experimentalmente se realizaron barridos en frecuencia entre 130 Hz y 170 Hz con excitación en unidades de  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$  (0.1g, 0.2g, 0.8g y 1.0g), resistencia  $R = 9.1 \text{ k}\Omega$ , amortiguamiento lineal  $\xi = 0.1$ , y no lineal  $\xi_{NL} = 0.016$

$d_m$	$h_m$	$d_{cm}$	$h_{cm}$	$d_s$	$h_s$	$d_p$	$h_p$
13.25mm	7 mm	6 mm	6 mm	36 mm	0.1 mm	23.5 mm	0.1 mm

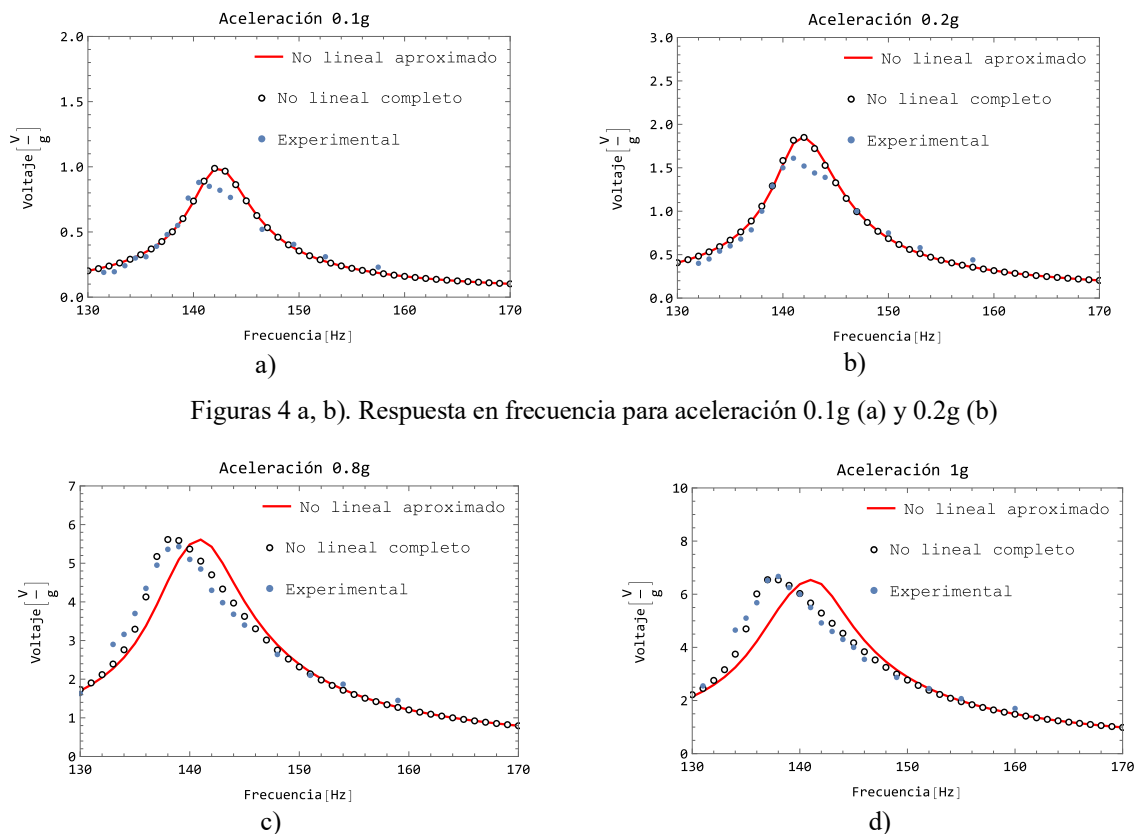
Tabla 1: dimensiones geométricas del dispositivo

$E_s$	$\rho_s$	$\nu_s$	$C_p$	$S_{11}^E$	$\rho_p$	$d_{31}$	$S_{111}^E$
97 GPa	7850 kg/cm <sup>3</sup>	0.31	$8.15 \cdot 10^{-15} \text{ Fa}$	62.3GPa	7500 kg/cm <sup>3</sup>	$125 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^2$	$-2.685 \cdot 10^{-12} \text{ l/Pa}$

Tabla 2: valores mecánicos y eléctricos del dispositivo

La señal de entrada se genera en un equipo Rigol DG4062, se amplifica e ingresa a un shaker Labworks ET-132. La respuesta se mide con un acelerómetro PCB Piezotronics (sensibilidad de 98.7 mV/g) y es adquirida por una placa National Instruments NI 9234 para ser postprocesada mediante un código propio en Matlab.

Las Figuras 4 (a, b, c, d) comparan curvas de generación entre los modelos no lineales y experimentales.



Figuras 4 a, b). Respuesta en frecuencia para aceleración 0.1g (a) y 0.2g (b)

Figura 4 c y d). Respuesta en frecuencia para aceleración 0.8g (c) y 1g (d)

Para bajas aceleraciones (0.1g y 0.2g) se observa que ambos modelos ajustan con los valores experimentales, tanto en resonancia como fuera de resonancia, 141 Hz, lo que indica una muy buena predicción con lo obtenido en laboratorio. Los valores de generación para estos casos son del orden de 1 V y 2 V respectivamente, Figuras 4a) y 4b).



Para altas aceleraciones (0.8g y 1g) los resultados experimentales muestran un efecto Softening, con un corrimiento de frecuencia hacia la izquierda. Este comportamiento es capturado exitosamente por el modelo no lineal completo, con valores máximos de generación en 138.65 Hz y 137.4 Hz para 0.8g y 1g respectivamente. Sin embargo, el modelo no lineal aproximado no presenta la curvatura Softening necesaria para ajustar con los valores experimentales, presentando valores de generación pico en 141 Hz. Como se aprecia en las Figuras 4c) y 4d) se mantienen los valores máximos de generación (del orden de los 5.6 Volts para 0.8g y 5.65 para 1g), pero la diferencia en la curvatura de la respuesta en frecuencia difiere en los valores de frecuencia para los valores picos.

#### 4 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo analítico no lineal de recolector piezoeléctrico de geometría circular, basado en la teoría clásica de placas de Von – Karman, la cual permite capturar la influencia en la generación de la no linealidad geométrica asociada a grandes desplazamientos en la dinámica del recolector. El modelo es una mejora del presentado por los autores con anterioridad, en la que los efectos no lineales geométricos se calculaban de manera aproximada y la teoría de placas circulares respondía al modelo de placas de Kirchhoff.

La importancia de considerar los efectos no lineales radica en la limitación de los modelos lineales a la hora de predecir la generación de energía para altas aceleraciones. El presente modelo captura con mayor precisión el efecto de curvatura de la respuesta en frecuencia provocada por el efecto geométrico no lineal. En este caso en particular existe una competencia entre el efecto Harding provocado por el efecto geométrico no lineal y el efecto softening provocado por la no linealidad constitutiva del material piezoeléctrico. Al considerar un modelo no lineal aproximado se sobre estima la rigidez geométrica no lineal, lo que se traduce en una disminución del efecto softening. Para bajas aceleraciones hay coincidencia entre las predicciones entre ambos modelos, debido a que los efectos no lineales, geométricos y constitutivos, influyen de menor manera en la respuesta dinámica del recolector de energía.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Facultad Regional Bahía Blanca - Universidad Tecnológica Nacional; a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y a la Comisión de Investigaciones Científicas (CIC) de la Provincia de Buenos Aires.

#### REFERENCIAS

- Abdelkefi A, Nayfeh A, and Hajj M. "Effects of nonlinear piezoelectric coupling on energy harvesters under direct excitation," *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, pp. 1221-1232, 2012. doi:10.1007/s11071-011-0064-9
- Amabili, M. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press. United Kingdom, 2008.
- Chen X R, Yang T Q, Wang W and Yao X. Vibration energy harvesting with a clamped piezoelectric circular diaphragm. *Ceram. Int.* 38 S271–4, 2012. doi:10.1016/j.ceramint.2011.04.099
- Erturk A. and Imnan D. J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*, 18(2), 2009. doi: 10.1088/0964-1726/18/2/025009

- Erturk A. and Inman D. J. *Piezoelectric Energy Harvesting*. Wiley, Chichester, United Kingdom, 2011. doi:10.1002/9781119991151.ch10
- Faris Waleed F. *Nonlinear Dynamics of Annular and Circular Plates under Thermal and Electrical Loadings. Dissertation submitted to the Faculty of the Engineering Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics Blacksburg, Virginia*. 2003.
- Haterbouch M., Benamar R. The effects of large vibration amplitudes on the axisymmetric mode shapes and natural frequencies of clamped thin isotropic circular plates. Part I: iterative and explicit analytical solution for non-linear transverse vibration. *Journal of Sound and Vibration*. 265 – (123 – 154). 2003. doi:10.1016/S0022-460X(02)01443-8
- Joshi S. J. Non-linear constitutive relations for piezoceramic materials. *Smart Materials and Structures*. Vol. 1, p. 80, 1992. doi: 10.1088/0964-1726/1/1/012
- Machado, S.P, Gatti, C.D., Ramirez, and Febbo, M., Influence of nonlinear constitutive relations in unimorphs piezoelectric harvesters. *Journal of Physics: Conference Series*, 773.012093, 2016. doi:10.1088/1742-6596/773/1/012093
- Machado, S. Febbo, M. Dispositivos autónomos para el sensado inalámbrico de máquinas agrícolas. *MECOM 2023*, págs. 947-956. Concordia, Argentina. Noviembre 2023. ISSN 1666-6070
- Mak K. H. Popov A. A, and McWilliam S. "Experimental model validation for a nonlinear energy harvester incorporating a bump stop" *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, pp. 2602-2623, 2012. doi:10.1016/j.jsv.2012.01.023
- Reddy J. N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. (Boca Raton, FL: CRC Press), 2006.
- Stanton S. C, Erturk A, Mann B. P, and Inman D. J. Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: Modeling and experimental identification. *Journal of Applied Physics*, vol. 108, p. 074903, 2010. doi: 10.1063/1.3486519
- Touzé C, Thomas O, and Chaigne A. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part 1: theory. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4), 649–676. 2012. doi: 10.1006/jsvi.2002.5143
- Vera C, Febbo M, Machado S. Estudios paramétricos de un recolector de energía que utiliza piezoeléctricos de geometría circular. *MECOM 2022*, págs. 921-930 *Bahía Blanca, Argentina*, 2022. ISSN 1666-6070
- Vera C, Febbo M, Machado S. Un modelo analítico para el estudio de recolectores de energía piezoeléctricos de geometría circular con condiciones de vinculación particulares. *MECOM 2023*, págs. 731 – 740 *Concordia, Argentina*, 2023. ISSN 1666-6070
- Vera C, Machado S, Febbo M. Estudios analíticos y experimentales de recolectores de energía piezoeléctricos de geometría circular: análisis de la influencia de grandes aceleraciones para diferentes frecuencias. *MECOM 2024*, págs. 757 – 767. *Rosario, Argentina*, 2024. ISSN 1666-6070
- Yang Y., Li Y., Guo Y., Xu B. -X and Yang T. Improved vibration-based energy harvesting by annular mass configuration of piezoelectric circular diaphragms. *Smart Materials Structure*. 27, 2018, 035004 (9pp), 2018. https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa586
- Yuanlin Hu, Xin Liang and Wen Wang. A theoretical solution of resonant circular diaphragm-type piezoactuators with added mass loads. *Sensors and Actuators A: Physical*. A 258 74-87.2017. https://doi.org/10.1016/j.sna.2017.02.029