

UN ENFOQUE ITERATIVO PARA LA ASIGNACIÓN DINÁMICA DE TRÁFICO URBANO: MODELO CONTINUO

AN ITERATIVE APPROACH TO DYNAMIC URBAN TRAFFIC ASSIGNMENT: CONTINUOUS MODEL

Víctor H. Cortínez^{a,b,c}, Patricia N. Dominguez^{a,b} y Cecilia I. Stoklas^a

^a Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada CIMTA, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina,

vcortine@hotmail.com

^b Universidad Nacional del Sur, Departamento de Ingeniería, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar

^c Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET

Palabras clave: tráfico congestionado, asignación dinámica, modelo continuo, enfoque Physarum.

Resumen. En este trabajo se desarrolla un modelo de asignación dinámica sobre un dominio espacialmente continuo que representa aproximadamente el sistema de transporte urbano (medio poroso equivalente). Se tiene en cuenta la variación espacial y temporal diurna de la demanda de viajes. El problema consiste en obtener la distribución espacial y temporal de los flujos vehiculares en la ciudad. La formulación matemática se basa en ecuaciones de conservación vehicular y en la definición de los flujos superficiales en función de gradientes de funciones potenciales para definir la elección de ruta por parte de los usuarios (modelo de equilibrio de usuario dinámico reactivo). Tales ecuaciones se implementan en un esquema computacional que extiende el enfoque Physarum utilizado para problemas de asignación estacionaria de tráfico. Se presenta la formulación propuesta, junto con resultados numéricos que ilustran su eficiencia.

Keywords: congested traffic, dynamic assignment, continuous model, Physarum approach.

Abstract. In this work, a dynamic traffic assignment model is developed over a spatially continuous domain that approximately represents the urban transportation system (equivalent porous medium). The diurnal spatial and temporal variation of travel demand is taken into account. The problem consists of determining the spatial and temporal distribution of vehicular flows in the city. The mathematical formulation is based on vehicular conservation equations and on the definition of surface flows as functions of potential gradients, in order to model users' route choice (reactive user equilibrium model). These equations are implemented in a computational scheme that extends the Physarum approach used for static traffic assignment problems. The proposed formulation is presented, along with numerical results that illustrate its efficiency.

1 INTRODUCCIÓN

La asignación de tráfico en redes congestionadas es un aspecto clave de la planificación urbana, cuyo propósito es determinar la distribución del flujo vehicular y los tiempos de viaje en un intervalo temporal determinado. Este problema parte del conocimiento previo de la topología de la red y de las tasas de generación de viajes hacia determinados destinos (centros), que en su versión estacionaria se consideran constantes durante el período de análisis. Tradicionalmente, la formulación se basa en el primer principio de Wardrop, que postula que los usuarios escogen sus rutas procurando minimizar individualmente sus costos totales (o tiempos de viaje), lo que conduce a un problema de optimización de gran escala (Boyles et al., 2023). Usualmente, para resolver el problema de asignación, la red se modela mediante un conjunto de nodos y arcos (modelo discreto). Sin embargo, para redes muy grandes, es conveniente sustituir el entramado de calles por un medio continuo poroso equivalente. Esta aproximación continua conduce a una formulación basada en ecuaciones diferenciales a derivadas parciales no lineales. Una estrategia eficiente para la solución del modelo continuo se logra utilizando el Método de Elementos Finitos (Du et al., 2016; Cortínez y Dominguez, 2017). Sin embargo, las ecuaciones gobernantes del modelo de tráfico continuo son altamente degeneradas (Carlier y Santambrogio, 2012) tendiendo a indeterminarse en regiones de flujos muy bajos, lo que trae ciertos problemas numéricos. Para solucionar esta cuestión se ha desarrollado un enfoque de elementos finitos iterativo, denominado Método Physarum, que ha mostrado robustez y buenas propiedades de convergencia (Xu et al., 2018; Cortínez y Dominguez, 2023).

El problema de asignación descripto previamente resulta independiente del tiempo. Sin embargo, en contextos urbanos reales, la demanda de tráfico suele variar significativamente en el curso del día, lo que hace necesario recurrir a modelos dinámicos que reflejen mejor la evolución del flujo vehicular. Tal problema se conoce como asignación dinámica de tráfico (Jiang et al., 2016, 2022). En este caso, las ecuaciones gobernantes corresponden a las ecuaciones de conservación vehicular no estacionarias de la cantidad de vehículos dirigiéndose hacia diferentes destinos, acopladas a un modelo de elección de ruta basada en la minimización del costo de viaje instantáneo (función potencial) de cada conductor. Este criterio de elección de ruta es una extensión al caso dinámico del primer principio de Wardrop. Desde el punto de vista matemático puede expresarse como una ecuación tipo Eikonal que relaciona el tiempo de circulación en la red con las funciones potenciales de costo hacia cada destino. Este modelo se conoce como modelo de equilibrio de usuario reactivo (Aghamohammadi y Laval, 2020).

En este trabajo tal modelo se aborda a partir de una extensión del enfoque Physarum previamente utilizado para el problema de asignación estacionaria (Cortínez y Dominguez, 2023) y semi dinámica (Cortínez y Dominguez, 2025). Se presenta la formulación matemática y un ejemplo numérico para ilustrar el potencial del enfoque.

2 ASIGNACIÓN DINÁMICA TRÁFICO. FORMULACIÓN CONTINUA

Se considera una red urbana bidimensional con N^d centros de atracción (Figura 1), en la cual se generan viajes hacia cada centro según una tasa superficial conocida $q^d(x, y, t)$ (veh/km²/h). El problema consiste en obtener la distribución espacial y temporal de los vectores de flujo vehiculares hacia cada centro de destino d , \mathbf{f}^d (veh/h/km). Se asume conocida la infraestructura de la red urbana que viene codificada en una función de tiempo de

viale unitario c (h/km) (1/velocidad media) que se define empíricamente. Tal función puede depender de la densidad de vehículos, o también de una medida del flujo vehicular, en un punto dado. En este trabajo se utiliza la segunda forma, que si bien es algo más restringida, puede representar con suficiente precisión los efectos de la asignación dinámica (excepto fenómenos de sobrecongestión, embotellamientos, etc.). Una expresión usual es la siguiente:

$$c(x, y) = a + b \left(\sum_{d=1}^{Nd} |\mathbf{f}^d| \right)^{\gamma}, \quad a, b, \gamma > 0 \quad (1)$$

donde a , b y γ contemplan la geometría de calles y dependen de x e y (Du et al., 2016). Debe observarse que se trata de una función creciente con los flujos vehiculares, reflejando así el efecto de la congestión. Los flujos vehiculares, dirigiéndose hacia cada destino d , deben verificar ecuaciones de conservación:

$$-\nabla \cdot \mathbf{f}^d + q^d = \frac{\partial \rho^d}{\partial t} \quad (2)$$

siendo $\rho^d(x, y, t)$ la densidad superficial (veh/km²) de los vehículos hacia el destino d . Por definición, la magnitud del flujo vehicular se relaciona con la densidad de la siguiente manera:

$$|\mathbf{f}^d| = \rho^d V \quad (3)$$

donde la velocidad V es la inversa del tiempo de viaje por unidad de longitud c . Consecuentemente, es posible escribir:

$$\rho^d = c |\mathbf{f}^d| \quad (4)$$

El sistema anterior se debe completar con el criterio de elección de ruta por parte de los usuarios. En problemas de asignación estacionaria, se asume que los conductores eligen el camino que minimiza su tiempo total de recorrido $u^d(x, y)$ desde un punto determinado hasta el destino correspondiente. Para ello, la estrategia de ruta puede ser expresada en la forma (Du et al., 2016):

$$\mathbf{f}^d = -\frac{|\mathbf{f}^d|}{c} \nabla u^d \quad (5)$$

Debe observarse que de esta última expresión se deduce que la función potencial u^d verifica la ecuación de la Eikonal:

$$c = |\nabla u^d| \quad (6)$$

Esta ecuación expresa el hecho de que el módulo del gradiente de la función potencial es el mismo para cualquier destino. Uno de los criterios seguidos para la asignación de rutas en el caso de asignación dinámica es suponer la validez de la ecuación (5), aunque contemplando el hecho de que c y u^d dependen del tiempo. En este caso, el significado de la función u^d es el de tiempo de recorrido total “instantáneo” que corresponde al tiempo que insumiría el recorrido desde un punto dado hacia el destino si se mantuvieran las condiciones de congestión de ese momento. La interpretación de tal criterio, sería que cada conductor elige el camino que minimiza su tiempo de viaje total instantáneo y se denomina “equilibrio dinámico de usuario reactivo”. Su grado de aproximación a la realidad es adecuado en el caso de que los

conductores reciban información del tráfico en tiempo real a través de radios, teléfonos móviles y/o servicios de navegación inteligentes.

De acuerdo a lo anterior, el problema de asignación dinámica se formula mediante las ecuaciones (1), (2), (4) y (5), conjuntamente con las siguientes condiciones de borde e iniciales:

$$\begin{aligned} u^d|_d &= 0, \\ \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{n}_\Gamma|_\Gamma &= 0, \quad d = 1, 2, \dots, N_d, \\ \rho^d(x, y, 0) &= \rho_0^d(x, y). \end{aligned} \quad (7a-c)$$

donde \mathbf{n}_Γ el versor normal al perímetro urbano Γ , (7a) se verifica por definición (el tiempo de viaje en el destino es nulo), (7b) indica que no hay viajes entrando o saliendo de la ciudad y (7c) expresa que la densidad inicial se conoce.

3 ESQUEMA DE SOLUCIÓN ITERATIVO. MÉTODO PHYSARUM

Para la solución numérica del sistema de ecuaciones presentado, el tiempo total bajo análisis T se divide en subintervalos pequeños Δt . En cada uno de ellos, las ecuaciones del problema dinámico se resuelven en forma iterativa hasta convergencia. Entonces, se pasa al cálculo del período siguiente, tomándose como aproximaciones iniciales los valores que se acaban de calcular en el subperíodo corriente (de manera similar al algoritmo seguido por Cortínez y Dominguez, 2025, para asignación semidinámica).

A continuación se muestra el correspondiente esquema de cálculo.

- Para el tiempo t se conocen: la tasa superficial de generación de viajes $q^d(x, y, t)$ y la densidad correspondiente al período anterior $\rho^d(x, y, t - \Delta t)$.
- En la primera iteración para el tiempo t , se toma una aproximación para $\mathbf{f}^d \rightarrow \bar{\mathbf{f}}^d$. Luego se adopta $R^d = |\bar{\mathbf{f}}^d|$ y se aproxima c mediante la ecuación (1): $\tau = a + b \left(\sum_{d=1}^{Nd} |\bar{\mathbf{f}}^d| \right)^\gamma$, entonces, la expresión (5) puede ser aproximada como $\mathbf{f}^d = -k^d \nabla \bar{u}^d$, donde $k^d = R^d / \tau$. A su vez, la densidad en el tiempo actual puede aproximarse a partir de (4) como $\bar{\rho}^d = \tau |\bar{\mathbf{f}}^d|$.
- Se resuelven los N^d sistemas de ecuaciones diferenciales lineales mediante el método de elementos finitos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k^d \nabla \bar{u}^d) + \bar{q}^d &= 0, \\ \bar{u}^d|_d &= 0, \quad -k^d \frac{\partial \bar{u}^d}{\partial n}|_\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (8a-c)$$

donde

$$\bar{q}^d(x, y, t) = q^d(x, y, t) - \frac{\bar{\rho}^d(x, y, t) - \rho^d(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (9)$$

Observar que la ecuación (8a) se obtiene introduciendo la aproximación a la ecuación

(5) en la ecuación (2), aproximando por diferencias finitas: $\frac{\partial \rho^d}{\partial t}(x, y, t) \rightarrow \frac{\bar{\rho}^d(x, y, t) - \rho^d(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t}$ y utilizando la aproximación de la densidad indicada anteriormente. Se procede en forma similar con las condiciones de borde (8c).

- d) Una vez determinadas las funciones potenciales aproximadas \bar{u}^d , se obtiene una nueva aproximación para los flujos:

$$\bar{\mathbf{f}}^d = -k^d \nabla \bar{u}^d \quad (10)$$

- e) Con $\bar{\mathbf{f}}^d$ se obtienen nuevas aproximaciones para R^d , los tiempos de viaje por unidad de longitud τ , las conductividades k^d y las densidades $\bar{\rho}^d$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R^d &\leftarrow \frac{|\bar{\mathbf{f}}^d| + R^d}{2}, \\ \tau &\leftarrow \frac{c \left(\sum_d |\bar{\mathbf{f}}^d| \right) + \tau}{2}, \\ k^d &= R^d / \tau, \\ \bar{\rho}^d &\leftarrow (\tau |\bar{\mathbf{f}}^d| + 4 \bar{\rho}^d) / 5. \end{aligned} \quad (11a-d)$$

Observar que en estas actualizaciones para R^d , τ y k^d no se emplean en forma directa las fórmulas utilizadas para las aproximaciones iniciales sino que se utilizan expresiones promediadas entre las aproximaciones previas y las calculadas en el paso actual. En la actualización de la densidad (10d) se asigna mayor peso al valor de la iteración previa. Estas actualizaciones mejoran la convergencia.

- f) finalmente, con los valores actualizados (10-11) se vuelve al paso c) y se itera hasta convergencia.
g) Se repiten los cálculos para el próximo período $t + \Delta t$.

4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para ejemplificar la metodología descripta, se presenta una ciudad de aproximadamente 790 km² tal como la de la [Figura 1a](#)). Se estudia el comportamiento de la red en un período de 4 horas correspondientes a las primeras horas de la mañana. Se considera que durante la hora pico, las demandas (máximas) hacia los centros C_1 y C_2 son $q^1 = 80$ y $q^2 = 60$ veh/h/km² respectivamente. Estas tasas varían temporalmente durante el período de estudio de la siguiente manera ([Figura 1c](#)): a) en la primera hora la demanda crece desde el 10% de la demanda máxima hasta alcanzar los valores máximos, b) durante la segunda hora se mantiene constante en el máximo, c) en la tercera hora la demanda decrece hasta llegar al 20% de la demanda máxima y d) en la cuarta hora se mantiene constante en el 20%. Se adoptan los siguientes valores para la función de costo hacia ambos destinos (2): $a=1/60$, $b=0.21 \times 10^{-5}$ y $\gamma=1.2$ ([Figura 1b](#)). Se asume que en el instante inicial las densidades son nulas.

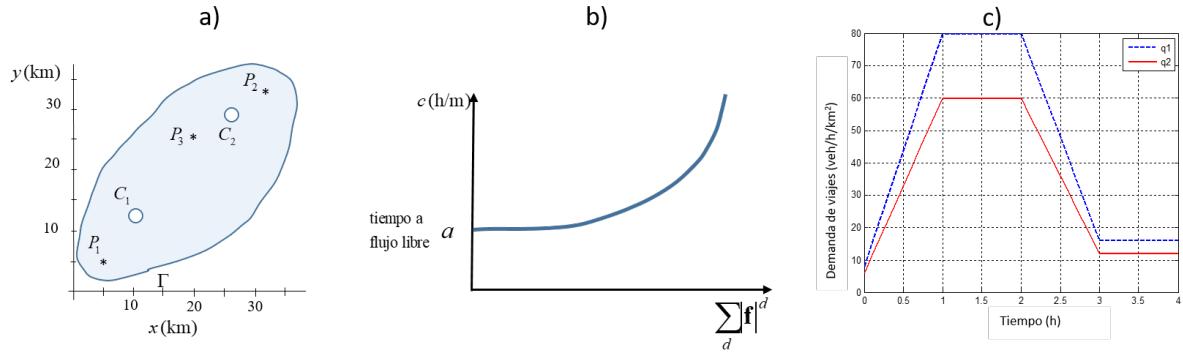


Figura 1: a) Esquema de la red de transporte urbano, b) función del tiempo unitario de viaje c y c) tasa de generación de viajes q^1 y q^2 hacia los destinos 1 y 2, respectivamente.

El intervalo de tiempo de 4 horas que se estudia se subdivide en pasos $\Delta t = 0.1\text{h}$. Las iteraciones del método Physarum se fijan en 8 para cada paso de tiempo. En las Figuras 2a) y 2b) se puede apreciar la convergencia del tiempo de viaje u^1 desde los puntos P_1 , P_2 y P_3 hacia el destino C_1 en función de las iteraciones, para los instantes de tiempo $t=0.7\text{ h}$ y $t=2.8\text{ h}$, respectivamente. Como se puede apreciar, con cambios importantes de demanda, la convergencia se alcanza en 6 o 7 iteraciones, mientras que prácticamente son suficientes 2 iteraciones cuando los cambios en la demanda son pequeños.

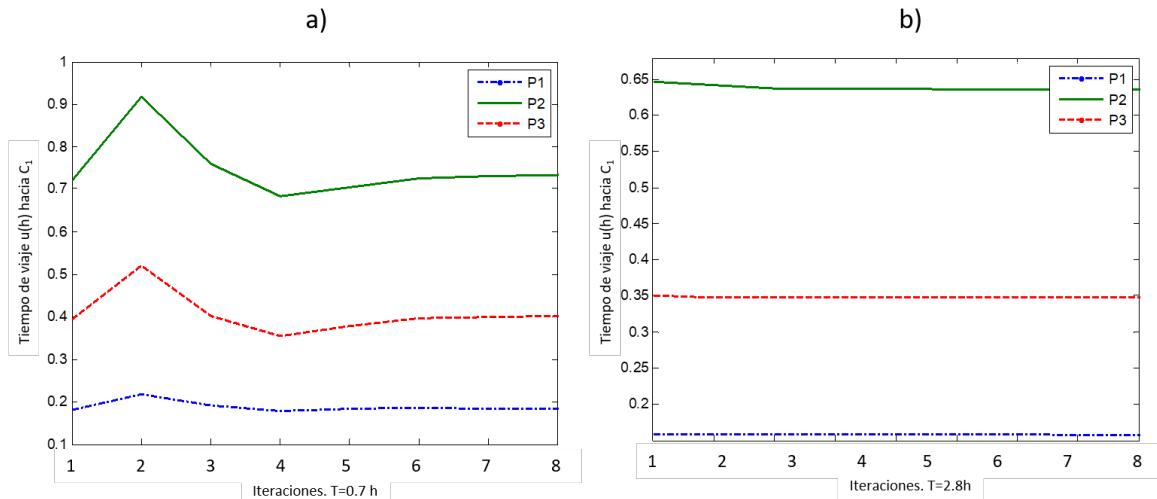


Figura 2: Convergencia de u^1 en los puntos P_1 a P_3 en los instantes, a) $t=0.7$ y b) u^1 en $t=2.8\text{h}$.

Asimismo, en la Figura 3a) se muestra la convergencia del proceso iterativo en el tiempo $t=0.2\text{h}$ en términos de las densidades ρ^1 y ρ^2 en los puntos P_1 , P_2 y P_3 y en la Figura 3b) se puede observar la convergencia para las últimas 2 iteraciones en $t=1.5\text{ h}$ de las densidades ρ^1 y ρ^2 sobre la línea S .

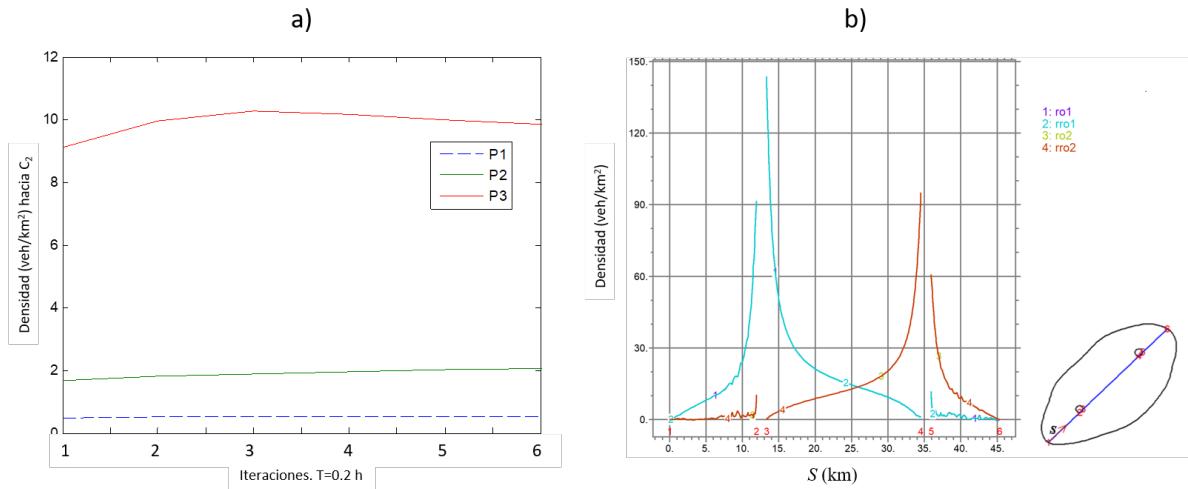


Figura 3: Convergencia de la densidad: a) ρ^2 en los puntos P_1 a P_3 en el instante $t=0.2$ h, b) ρ^1 y ρ^2 sobre el segmento S para $t=3$ h (ro1, ro2= ρ^1 , ρ^2 última iteración, rro1, rro2 = ρ^1 , ρ^2 , ante última iteración)

A modo de ejemplo, en las Figuras 4a-c) se muestran resultados de la convergencia de los tiempos de viaje u^1 y u^2 en las dos iteraciones finales del intervalo, los vectores de flujo hacia ambos destinos y la densidad superficial hacia el destino C_1 , todos para $t=1.5$ h.

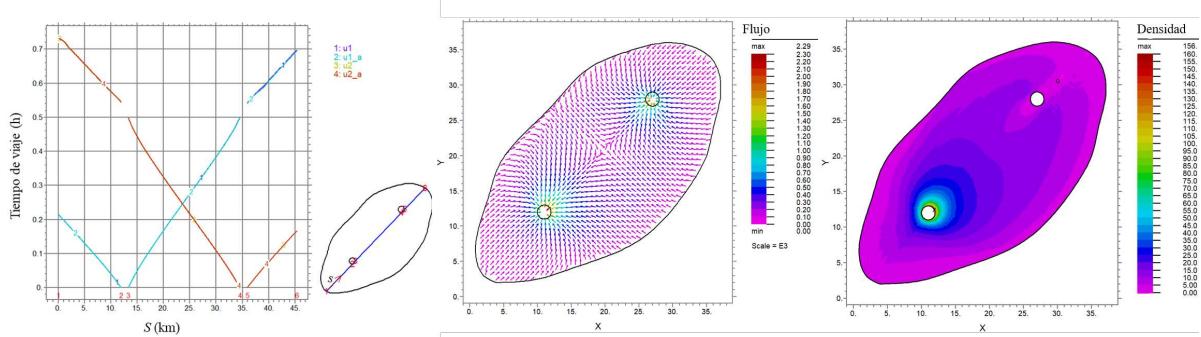


Figura 4: Resultados en $t=1.5$ h, a) convergencia del tiempo de viaje u^1 y u^2 en dos iteraciones sucesivas (u1_a, u2_a, corresponden a la anteúltima iteración), b) flujos hacia ambos destinos y c) densidad ρ^1 .

En la Figura 5a) se muestra la evolución temporal de los tiempos de viaje u^1 y u^2 hacia los centros C_1 y C_2 , desde los puntos P_1 a P_3 . En la Figura 5b) se muestra un gráfico similar para las densidades ρ^1 y ρ^2 en los mismos puntos.

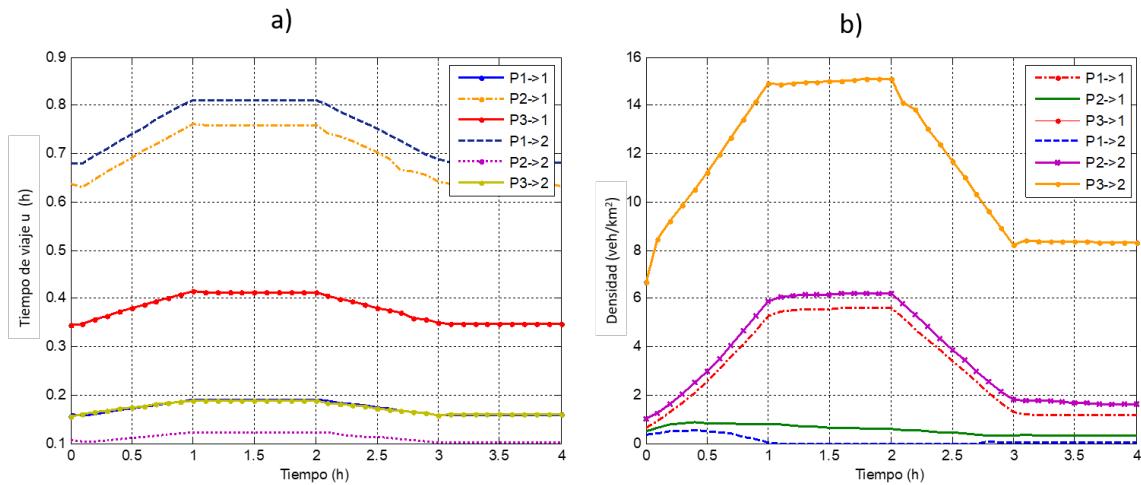


Figura 5: Evolución temporal, a) de u^1 y u^2 desde P_1 , P_2 y P_3 , b) de las densidades ρ^1 , ρ^2 en los mismos puntos.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo iterativo evolutivo en el tiempo basado en el enfoque Physarum para resolver el problema continuo bidimensional de asignación dinámica de tráfico urbano según el criterio reactivo de elección de ruta. Los resultados de los ejemplos son auspiciosos mostrando buenas propiedades de convergencia. Actualmente se está investigando la eficiencia de la metodología en comparación con otras que se han propuesto en la literatura. Asimismo, se está trabajando en la extensión de la presente metodología a situaciones de sobrecongestión. Un aspecto interesante del enfoque propuesto es la posibilidad de paralelizar el algoritmo para analizar grandes redes.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el financiamiento por parte de las instituciones de pertenencia.

REFERENCIAS

- Aghamohammadi, R. y Laval, J.A., Dynamic traffic assignment using the microscopic fundamental diagram: a review of vehicular and pedestrian flow models, *Transportation Research Part B, Methodological* 137, 99-118, 2020.
- Boyles, S.D., Lownes, N.E. y Unnicrishan, A. *Transportation Network Analysis*, Vol. 1, Ver. 09, <https://sboyles.github.io/blubook.html>, 2023.
- Carlier, G. y Santambrogio, F., A continuous Theory of Traffic Congestion and Wardrop Equilibria, *Journal of Mathematical Sciences* 181, 792-804, 2012.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N., An anisotropic continuum model for traffic assignment in mixed transportation networks. *Applied Mathematical Modelling* 50, 585-603, 2017.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N., Un modelo evolutivo continuo-discreto para la determinación de flujos vehiculares en redes urbanas congestionadas, *Mecánica Computacional XL*, 1097-1106, 2023.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N., Un modelo continuo iterativo para la asignación semi dinámica de Tráfico urbano, MACI vol, X, 188-191, 2025.

- Du, Y.C., Wong, S.C., Sun, L.J., A multi-commodity discrete/continuum model for a traffic equilibrium system, *Transportmétrica A Transport Science* 12, 249-271, 2016.
- Jiang, Y. Q, Wong, S.C., Zhang, P. y Choi, K., Dynamic continuum model with elastic demand for a polycentric urban city, *Transportation Science* 51(3), 931-945, 2016.
- Jiang, Y., Ding, Z., Zhou, J., Wu, P. y Chen, B., Estimation of traffic emissions in a polycentric urban city based on a macroscopic approach, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 602, 127391, 2022.
- Xu, S., Jiang, W., Deng, X. Y Shou, Y., A modified Physarum-inspired model for the user equilibrium traffic assignment problem, *Applied Mathematical Modelling* 55, 340-353, 2018.